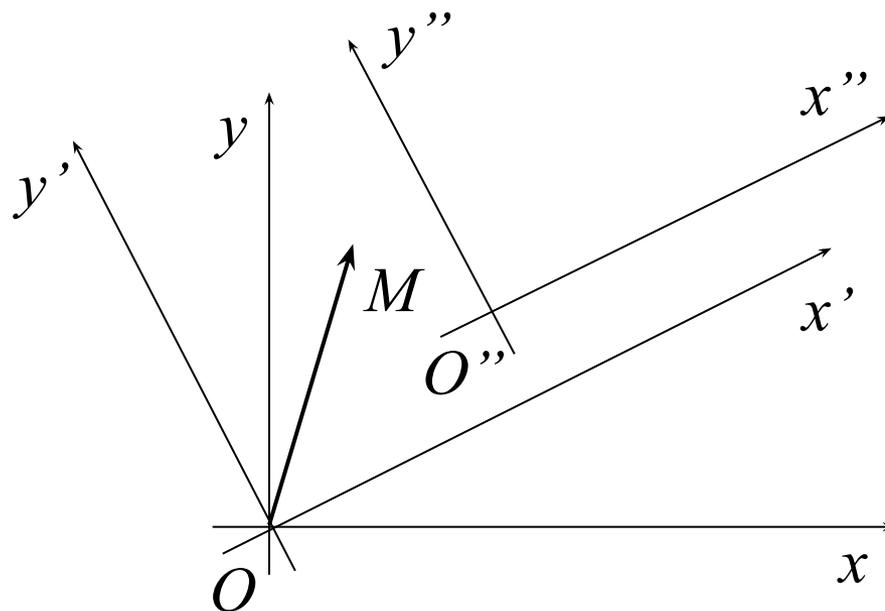


9.2 Преобразование координатного базиса

9.2.1. Постановка задачи

$$M(x, y) = M(x'', y'')$$

$$Oxy \rightarrow O''x''y''?$$



Преобразование в 2 этапа:

1) поворот осей координат

$$Oxy \rightarrow O'x'y'$$

2) параллельный перенос

$$Oxy \rightarrow O'x'y'$$

9.2.2. Поворот осей координат

Радиус-вектор точки не меняется:

$$\overrightarrow{OM} = \mathbf{r} = \mathbf{r}'$$

но координаты различны:

$$\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} \quad \mathbf{r}' = x'\mathbf{i}' + y'\mathbf{j}'$$

$$x\mathbf{i} + y\mathbf{j} = x'\mathbf{i}' + y'\mathbf{j}'$$

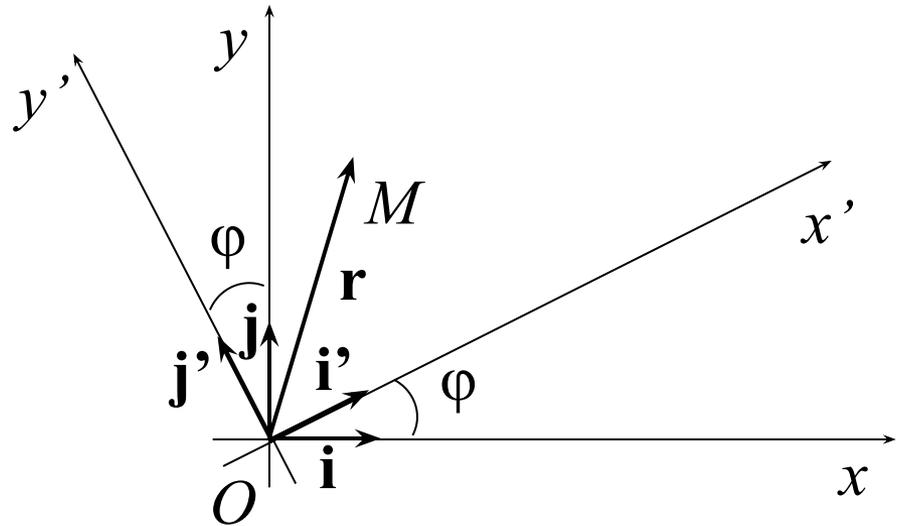
·**i**:

$$x\mathbf{i}\mathbf{i} + y\mathbf{j}\mathbf{i} = x'\mathbf{i}'\mathbf{i} + y'\mathbf{j}'\mathbf{i}$$

$$x = x'\cos\varphi + y'\cos(90^\circ + \varphi)$$

$$x = x'\cos\varphi + y'(\cos 90^\circ \cos\varphi - \sin 90^\circ \sin\varphi)$$

$$x = x'\cos\varphi - y'\sin\varphi$$



·**j**:

$$x\mathbf{i}\mathbf{j} + y\mathbf{j}\mathbf{j} = x'\mathbf{i}'\mathbf{j} + y'\mathbf{j}'\mathbf{j}$$

$$y = x'\cos(90^\circ - \varphi) + y'\cos\varphi$$

$$y = x'(\cos 90^\circ \cos\varphi + \sin 90^\circ \sin\varphi) + y'\cos\varphi$$

$$y = x'\sin\varphi + y'\cos\varphi$$

Получаем систему уравнений:

$$\begin{cases} x = x' \cos \varphi - y' \sin \varphi \\ y = x' \sin \varphi + y' \cos \varphi \end{cases}$$

или, в матричном виде:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

или, ещё короче: $\mathbf{r} = T_{\varphi} \mathbf{r}'$,

где T_{φ} - матрица поворота

Свойства матрицы поворота:

1. $\det(T_{\varphi}) = 1$ при любом φ .

$$2. \quad T_{\varphi}^{-1} = \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ -\sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix} = T_{-\varphi}$$

$$3. \quad T_{\alpha} \cdot T_{\beta} = T_{\beta} \cdot T_{\alpha}$$

$$4. \quad T_{\alpha+\beta} = T_{\alpha} \cdot T_{\beta}$$

9.2.3. Параллельный перенос осей координат

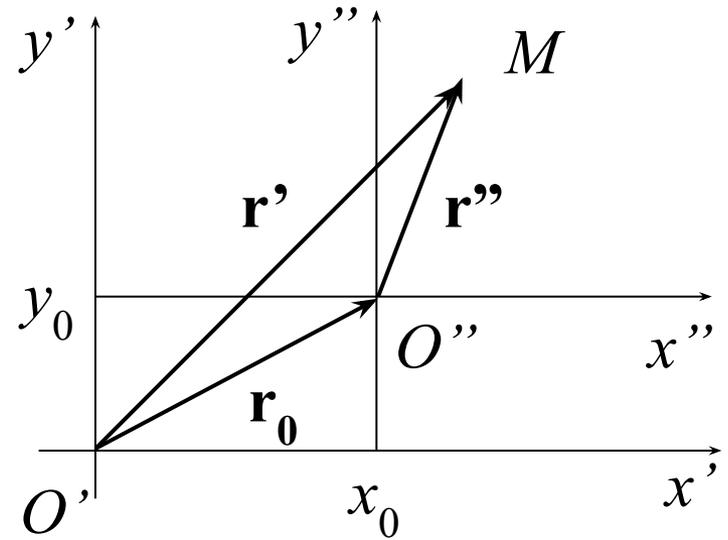
$O'x'y' \rightarrow O''x''y''$?

Пусть:

$\mathbf{r}' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ - радиус-вектор точки М
в исходной системе коор-т

$\mathbf{r}'' = \begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix}$ - радиус-вектор точки М
в новой системе коор-т

$\mathbf{r}_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$ - радиус-вектор начала новой
системы координат в старой



$$\mathbf{r}' = \mathbf{r}'' + \mathbf{r}_0 \quad \text{или} \quad \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \quad \text{или} \quad \begin{cases} x' = x'' + x_0 \\ y' = y'' + y_0 \end{cases}$$

9.3 Квадратичная форма

9.3.1. Понятие квадратичной формы

Форма - однородный многочлен, все члены которого имеют одинаковую степень.

Квадратичная форма - однородный многочлен второй степени:

$$F(x, y) = a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2.$$

Матрица квадратичной формы: $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}$

Пусть $\mathbf{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$. Тогда:

$$F(x, y) = \mathbf{r}^T A \mathbf{r} = (x \quad y) \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2.$$

Пример:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \rightarrow F(x, y) = (x \ y) \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = (x + 3y \quad 2x + 4y) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \\ = (x + 3y)x + (2x + 4y)y = x^2 + 3xy + 2xy + 4y^2 = x^2 + 5xy + 4y^2$$

9.3.2. Геометрический смысл квадратичной формы

Пусть x, y - координаты точки на плоскости. Тогда

$$F(x, y) = c \text{ или}$$

$$a_{11}x^2 + a_{12}xy + a_{22}y^2 = c \text{ или}$$

$$a_{11}x^2 + a_{12}xy + a_{22}y^2 + c' = 0 - \text{уравнение кривой 2-го порядка.}$$

9.3.3. Собственный вектор и собственное число

Пусть
$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} \quad \mathbf{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

$A \cdot \mathbf{r} = \mathbf{R}$ - некоторый вектор. Пусть существует такой вектор \mathbf{r} , что $\mathbf{R} = \lambda \mathbf{r}$, т.е. $A \cdot \mathbf{r} = \lambda \mathbf{r}$. Такой \mathbf{r} называется *собственным*.
Для собственного вектора: $A \cdot \mathbf{r} \parallel \mathbf{r}$.

Очевидно, если $A \cdot \mathbf{r} = \lambda \mathbf{r}$, то $A \cdot (\alpha \mathbf{r}) = \lambda (\alpha \mathbf{r})$, где α - число $\neq 0$.
Т.е. вектор $(\alpha \mathbf{r})$ будет также собственным. Т.е. собственный вектор задаётся с точностью до константы и определяет некоторое направление.

9.3.4. Геометрический смысл собственного вектора

Пусть $F(x, y) = a_{11}x^2 + a_{12}xy + a_{22}y^2$ – квадратичная форма.

Тогда $a_{11}x^2 + a_{12}xy + a_{22}y^2 = c$ – уравнение кривой 2-го порядка.

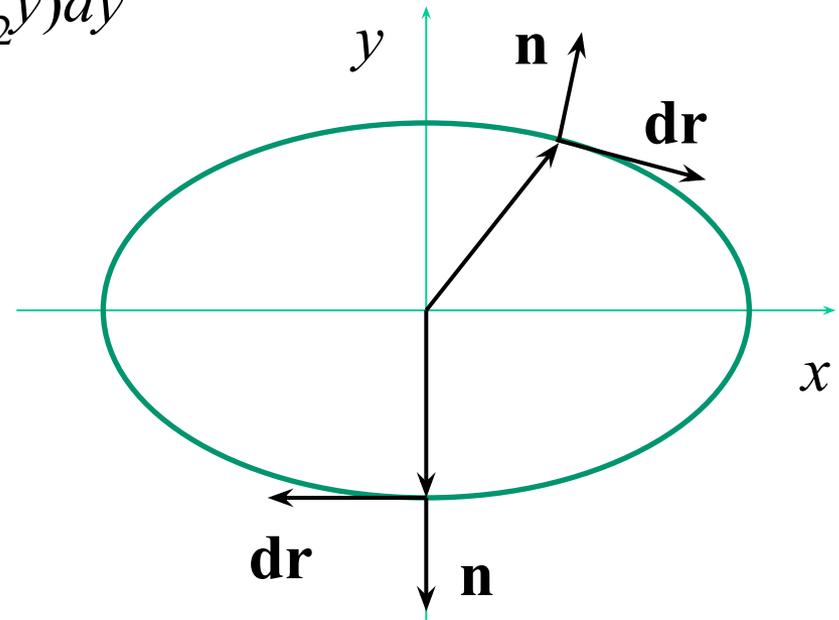
Полный дифференциал: $dF(x, y) = \frac{\partial F}{\partial x} dx + \frac{\partial F}{\partial y} dy$.

$$\Rightarrow 2(a_{11}x + a_{12}y)dx + 2(a_{12}x + a_{22}y)dy$$

$$\Rightarrow (dx \quad dy) \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0$$

или $\mathbf{dr} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{r} = 0$

Обозначим $\mathbf{A} \cdot \mathbf{r} = \mathbf{n}$



$\mathbf{n} \parallel \mathbf{r}$ на осях симметрии \Rightarrow в этих точках $\mathbf{n} = \lambda \mathbf{r}$ или $\mathbf{A} \cdot \mathbf{r} = \lambda \mathbf{r}$

9.3.5. Вычисление собственных векторов и собственных чисел

Итак, пусть $A \cdot \mathbf{r} = \lambda \mathbf{r} \Rightarrow A \cdot \mathbf{r} - \lambda \mathbf{r} = \mathbf{0}$ или

$$\left[\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right] \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} (a_{11} - \lambda)x + a_{12}y = 0 \\ a_{12}x + (a_{22} - \lambda)y = 0 \end{cases}$$

Система имеет ненулевое решение, если $\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} - \lambda \end{vmatrix} = 0$

$$\Rightarrow \left| \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right| = 0 \quad \text{или, в матричном виде:}$$

$|A - \lambda E| = 0$ - характеристическое уравнение на нахождение λ .

Полученные λ_i подставляем в исходную систему и находим собственные вектора \mathbf{r}_i . Проверяем результат: $\mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{r}_2 = 0$.

Пример:

Найти: Собственные числа и собственные векторы для квадратичной формы $F(x, y) = 5x^2 + 4xy + 2y^2$.

Составляем матрицу и характеристическое уравнение:

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 5 - \lambda & 2 \\ 2 & 2 - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

Решаем харак-ое уравнение: $\lambda^2 - 7\lambda + 6 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 6, \lambda_2 = 1$.

Составляем систему для нахождения собственных векторов:

$$\begin{cases} (5 - \lambda)x + 2y = 0 \\ 2x + (2 - \lambda)y = 0 \end{cases}$$

$$\lambda_1 = 6: \begin{cases} -x + 2y = 0 \\ 2x - 4y = 0 \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{Выбираем } y_1 = 1, \\ \text{находим } x_1 = 2 \end{array} \Rightarrow \mathbf{r}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} \text{Проверяем:} \\ \mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{r}_2 = \\ = 2 \cdot 1 + 1 \cdot (-2) = \\ = 0 \end{array}$$
$$\lambda_2 = 1: \begin{cases} 4x + 2y = 0 \\ 2x + y = 0 \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{Выбираем } x_2 = 1, \\ \text{находим } y_2 = -2 \end{array} \Rightarrow \mathbf{r}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

9.3.6. Теоремы о собственных векторах

Теорема 1. Для симметричной матрицы существуют собственные числа и собственные векторы.

Теорема 2. Собственные векторы симметричной матрицы, соответствующие различным собственным числам, ортогональны.

Замечание. Для матрицы второго порядка достаточно найти один собственный вектор. Второй можно найти из условия: $\mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{r}_2 = 0$.

$$\text{Пусть } \mathbf{r}_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}. \quad \text{Тогда } \mathbf{r}_2 = \begin{pmatrix} -y_1 \\ x_1 \end{pmatrix}.$$

9.3.7. Матрица поворота

Главное направление квадратичной формы - это направление осей симметрии соответствующей кривой 2-го порядка.

Пусть $\lambda_1 \neq \lambda_2$. Им соответствуют векторы: $\mathbf{r}_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{r}_2 = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$

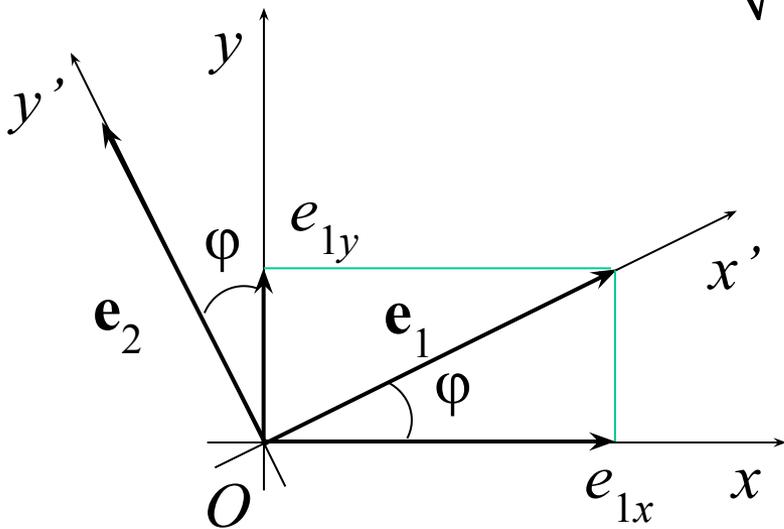
Нормируем их: $\mathbf{e}_1 = \frac{\mathbf{r}_1}{|\mathbf{r}_1|} = \frac{1}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2}} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{e}_2 = \frac{\mathbf{r}_2}{|\mathbf{r}_2|} = \frac{1}{\sqrt{x_2^2 + y_2^2}} \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$

$$e_{1x} = \frac{x_1}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2}} = \cos \varphi, \quad e_{1y} = \frac{y_1}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2}} = \sin \varphi.$$

$$\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} -\sin \varphi \\ \cos \varphi \end{pmatrix}.$$

$(\mathbf{e}_1 | \mathbf{e}_2)$ образуют матрицу поворота к главным направлениям кв.формы:

$$T_\varphi = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix}$$



9.3.8. Приведение квадратичной формы к каноническому виду

Дана квадратичная форма $F(x, y) = a_{11}x^2 + a_{12}xy + a_{22}y^2$.

Нужно привести её к каноническому виду: $F(x, y) = \lambda_1x^2 + \lambda_2y^2$.

Матрица квадратичной формы: $A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$.

Теорема 1. Каждая квадратичная форма имеет единственный канонический вид.

Теорема 2. При повороте координатных осей до главных направлений квадратичная форма принимает канонический вид с коэффициентами, равными собственным числам.

Как привести квадратичную форму к каноническому виду:

1. Составить матрицу A .
2. Найти собственные числа λ_1 и λ_2 .
3. Записать квадратичную форму в каноническом виде:

$$F(x, y) = \lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2.$$

Для нахождения угла поворота к главным направлениям вычисляем нормированный собственный вектор e_1 .

9.3.9. Геометрический смысл приведения

Приведение к каноническому виду геометрически означает поворот осей координат до главных направлений кв. формы.

При этом:

1. λ_1 и λ_2 - одного знака: кв. форма эллиптического типа.
2. λ_1 и λ_2 - разного знака: кв. форма гиперболического типа.
3. $\lambda_1 = 0$ или $\lambda_2 = 0$: кв. форма параболического типа.