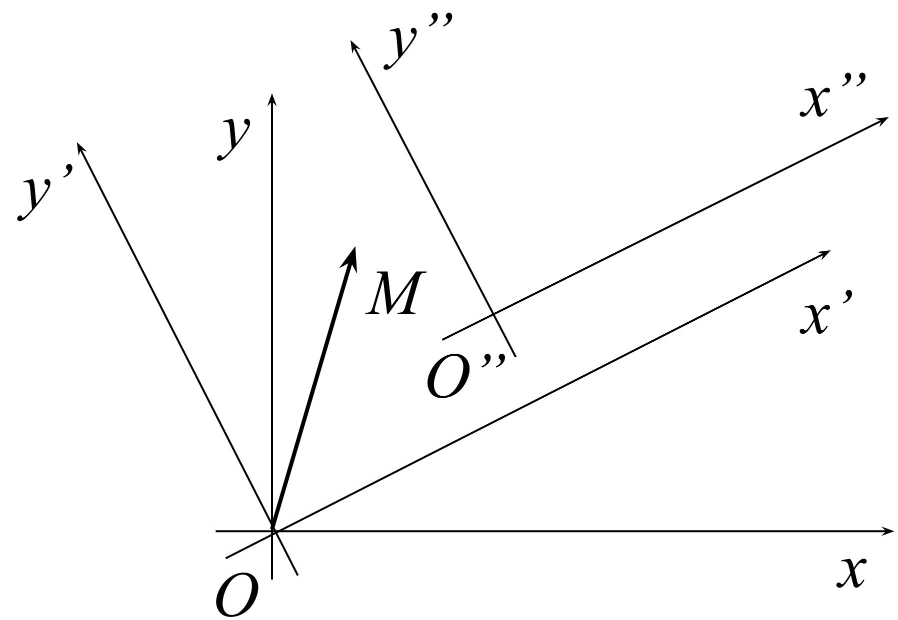
9.2 Преобразование координатного базиса

9.2.1. Постановка задачи

$M(x, y) = M(x'', y'')$

$Oxy \to O''x''y''$?



Преобразование в 2 этапа:

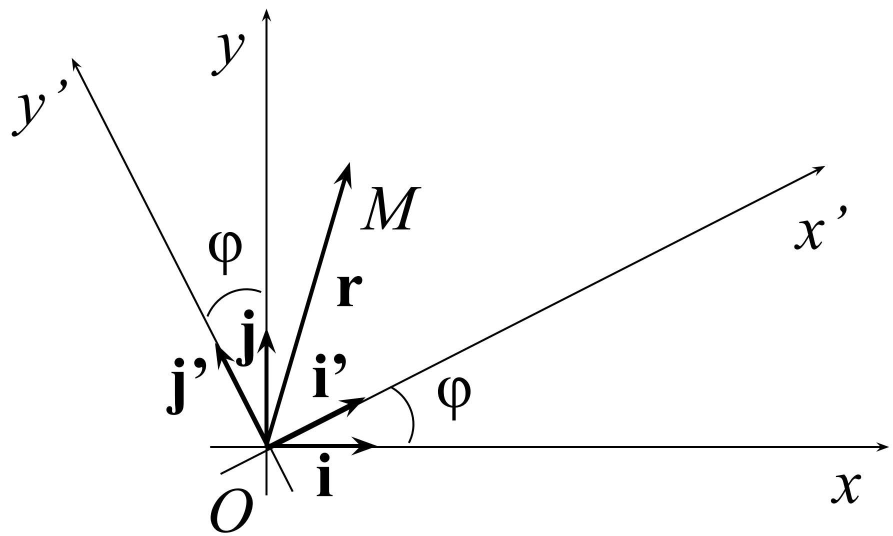
1) поворот осей координат $Oxy \to O'x'y'$

2) параллельный перенос осей координат $Oxy \to O'x'y'$

9.2.2. Поворот осей координат

Радиус-вектор точки не меняется:

$\overrightarrow{OM} = \mathbf{r} = \mathbf{r}'$



но координаты различны:

$\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} \qquad \mathbf{r}' = x'\mathbf{i}' + y'\mathbf{j}'$

$x\mathbf{i} + y\mathbf{j} = x'\mathbf{i}' + y'\mathbf{j}'$

$\cdot\mathbf{i}$:

$x\mathbf{ii} + y\mathbf{ji} = x'\mathbf{i}'\mathbf{i} + y'\mathbf{j}'\mathbf{i}$

$x = x'\cos\varphi + y'\cos(90^0+\varphi)$

$x = x'\cos\varphi +$
$+ y'(\cos 90^0 \cos\varphi - \sin 90^0 \sin\varphi)$

$x = x'\cos\varphi - y'\sin\varphi$

$\cdot\mathbf{j}$:

$x\mathbf{ij} + y\mathbf{jj} = x'\mathbf{i}'\mathbf{j} + y'\mathbf{j}'\mathbf{j}$

$y = x'\cos(90^0-\varphi) + y'\cos\varphi$

$y = x'(\cos 90^0 \cos\varphi + \sin 90^0 \sin\varphi)$
$+ y'\cos\varphi$

$y = x'\sin\varphi + y'\cos\varphi$

Получаем систему уравнений: $\begin{cases} x = x'\cos\varphi - y'\sin\varphi \\ y = x'\sin\varphi + y'\cos\varphi \end{cases}$

или, в матричном виде: $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$

или, ещё короче: $\mathbf{r} = T_\varphi \mathbf{r}'$, где T_φ - матрица поворота

Свойства матрицы поворота:

1. $\det(T_\varphi) = 1$ при любом φ.

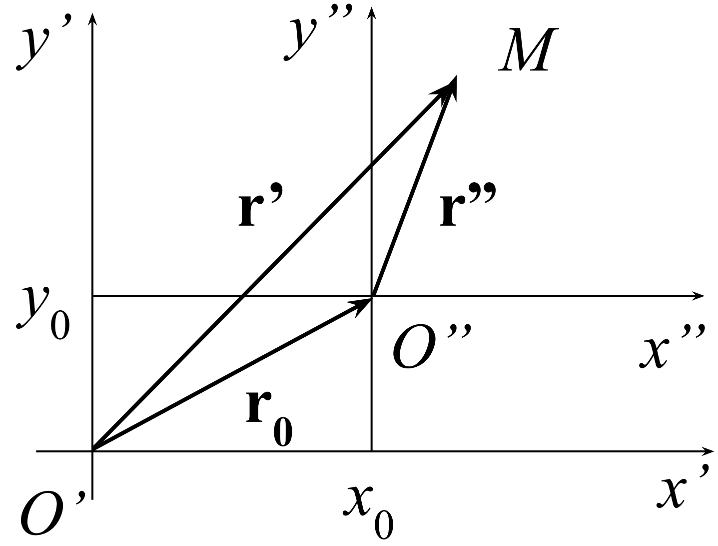
2. $T_\varphi^{-1} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} = T_{-\varphi}$

3. $T_\alpha \cdot T_\beta = T_\beta \cdot T_\alpha$

4. $T_{\alpha+\beta} = T_\alpha \cdot T_\beta$

9.2.3. Параллельный перенос осей координат

$O'x'y' \to O''x''y''?$



Пусть:

$\mathbf{r}' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ - радиус-вектор точки М в исходной системе коор-т

$\mathbf{r}'' = \begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix}$ - радиус-вектор точки М в новой системе коор-т

$\mathbf{r}_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$ - радиус-вектор начала новой системы координат в старой

$\mathbf{r}' = \mathbf{r}'' + \mathbf{r}_0$ или $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$ или $\begin{cases} x' = x'' + x_0 \\ y' = y'' + y_0 \end{cases}$

9.3 Квадратичная форма

9.3.1. Понятие квадратичной формы

Форма - однородный многочлен, все члены которого имеют одинаковую степень.
Квадратичная форма - однородный многочлен второй степени: $F(x, y) = a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2$.

Матрица квадратичной формы: $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}$

Пусть $\mathbf{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$. Тогда:

$$F(x, y) = \mathbf{r}^T A\mathbf{r} = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2.$$

Пример:

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}\to F(x,y)=\begin{pmatrix}x & y\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x+3y & 2x+4y\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=$$

$$=(x+3y)x+(2x+4y)y=x^2+3xy+2xy+4y^2=x^2+5xy+4y^2$$

9.3.2. Геометрический смысл квадратичной формы

Пусть x, y - координаты точки на плоскости. Тогда

$F(x, y) = c$ или
$a_{11}x^2 + a_{12}xy + a_{22}y^2 = c$ или
$a_{11}x^2 + a_{12}xy + a_{22}y^2 + c' = 0$ - уравнение кривой 2-го порядка.

9.3.3. Собственный вектор и собственное число

Пусть $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}$ $\mathbf{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

$A \cdot \mathbf{r} = \mathbf{R}$ - некоторый вектор. Пусть существует такой вектор $\mathbf{r}$, что $\mathbf{R} = \lambda\mathbf{r}$, т.е. $A \cdot \mathbf{r} = \lambda\mathbf{r}$. Такой $\mathbf{r}$ называется *собственным*. Для собственного вектора: $A \cdot \mathbf{r} \parallel \mathbf{r}$.

Очевидно, если $A \cdot \mathbf{r} = \lambda\mathbf{r}$, то $A \cdot (\alpha\mathbf{r}) = \lambda(\alpha\mathbf{r})$, где α - число $\neq 0$. Т.е. вектор $(\alpha\mathbf{r})$ будет также собственным. Т.е. собственный вектор задаётся с точностью до константы и определяет некоторое направление.

9.3.4. Геометрический смысл собственного вектора

Пусть $F(x, y) = a_{11}x^2 + a_{12}xy + a_{22}y^2$ – квадратичная форма.

Тогда $a_{11}x^2 + a_{12}xy + a_{22}y^2 = c$ – уравнение кривой 2-го порядка.

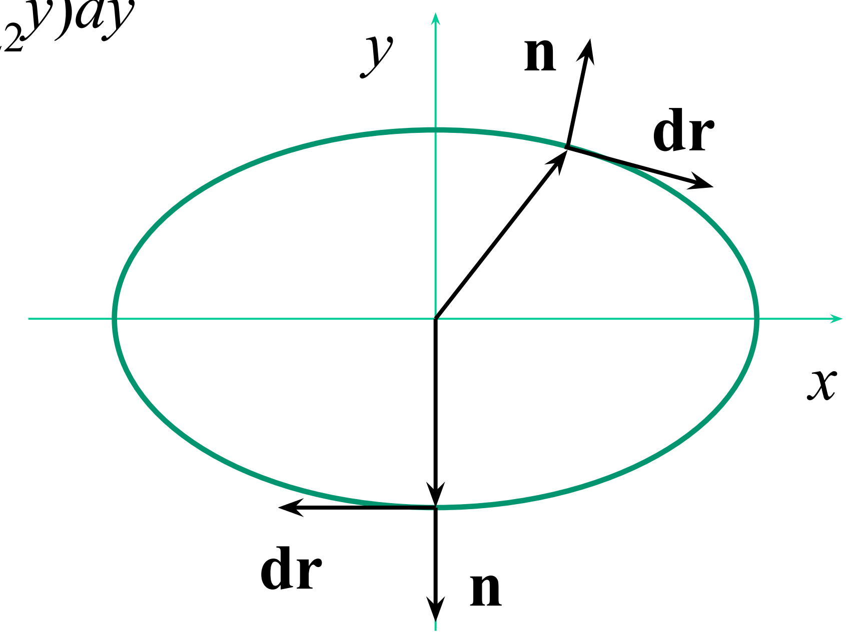
Полный дифференциал: $dF(x,y) = \dfrac{\partial F}{\partial x}dx + \dfrac{\partial F}{\partial y}dy.$

$=> 2(a_{11}x + a_{12}y)dx + 2(a_{12}x + a_{22}y)dy$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} dx & dy \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0$$

или $\mathbf{dr} \cdot A \cdot \mathbf{r} = 0$

Обозначим $A \cdot \mathbf{r} = \mathbf{n}$



$\mathbf{n} \parallel \mathbf{r}$ на осях симметрии => в этих точках $\mathbf{n} = \lambda\mathbf{r}$ или $A \cdot \mathbf{r} = \lambda\mathbf{r}$

9.3.5. Вычисление собственных векторов и собственных чисел

Итак, пусть $A\cdot\mathbf{r} = \lambda\mathbf{r}$ => $A\cdot\mathbf{r} - \lambda\mathbf{r} = 0$ или

$$\left[\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right] \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \begin{cases} (a_{11} - \lambda)x + a_{12}y = 0 \\ a_{12}x + (a_{22} - \lambda)y = 0 \end{cases}$$

Система имеет ненулевое решение, если $\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} - \lambda \end{vmatrix} = 0$

$$\Rightarrow \left|\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right| = 0$$ или, в матричном виде:

$|A - \lambda E| = 0$ - характеристическое уравнение на нахождение λ.

Полученные λ_i подставляем в исходную систему и находим собственные вектора $\mathbf{r}_i$. Проверяем результат: $\mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{r}_2 = 0$.

Пример:

<u>Найти</u>: Собственные числа и собственные векторы для квадратичной формы $F(x, y) = 5x^2 + 4xy + 2y^2$.

Составляем матрицу и характеристическое уравнение:

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 5-\lambda & 2 \\ 2 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

Решаем харак-ое уравнение: $\lambda^2 - 7\lambda + 6 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 6, \lambda_2 = 1.$

Составляем систему для нахождения собственных векторов:

$$\begin{cases} (5-\lambda)x + 2y = 0 \\ 2x + (2-\lambda)y = 0 \end{cases}$$

$\lambda_1 = 6:$ $\begin{cases} -x + 2y = 0 \\ 2x - 4y = 0 \end{cases}$ Выбираем $y_1 = 1$, находим $x_1 = 2$ $\Rightarrow \mathbf{r}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\lambda_2 = 1:$ $\begin{cases} 4x + 2y = 0 \\ 2x + y = 0 \end{cases}$ Выбираем $x_2 = 1$, находим $y_2 = -2$ $\Rightarrow \mathbf{r}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$

Проверяем:
$\mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{r}_2 =$
$= 2 \cdot 1 + 1 \cdot (-2) =$
$= 0$

9.3.6. Теоремы о собственных векторах

Теорема 1. Для симметричной матрицы существуют собственные числа и собственные векторы.

Теорема 2. Собственные векторы симметричной матрицы, соответствующие различным собственным числам, ортогональны.

Замечание. Для матрицы второго порядка достаточно найти один собственный вектор. Второй можно найти из условия: $\mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{r}_2 = 0$.

Пусть $\mathbf{r}_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$. Тогда $\mathbf{r}_2 = \begin{pmatrix} -y_1 \\ x_1 \end{pmatrix}$.

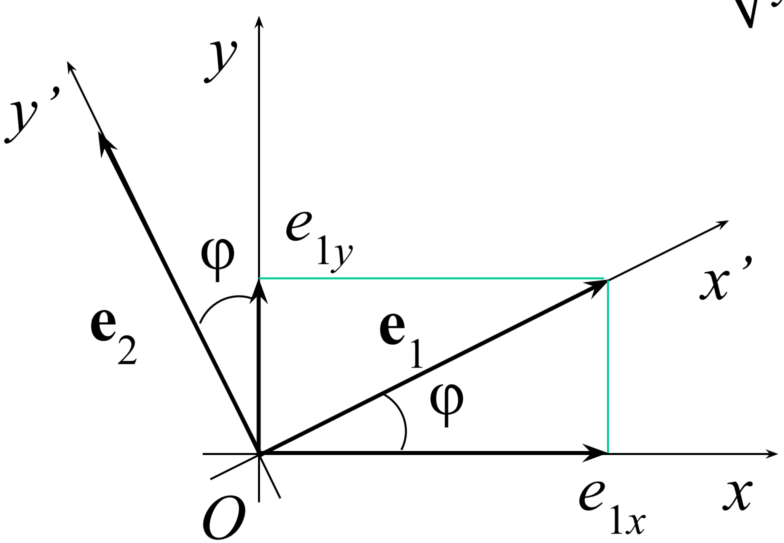
9.3.7. Матрица поворота

Главное направление квадратичной формы - это направление осей симметрии соответствующей кривой 2-го порядка.

Пусть $\lambda_1 \neq \lambda_2$. Им соответствуют векторы: $\mathbf{r}_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{r}_2 = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$

Нормируем их: $\mathbf{e}_1 = \dfrac{\mathbf{r}_1}{|\mathbf{r}_1|} = \dfrac{1}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2}} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}_2 = \dfrac{\mathbf{r}_2}{|\mathbf{r}_2|} = \dfrac{1}{\sqrt{x_2^2 + y_2^2}} \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$

$$e_{1x} = \frac{x_1}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2}} = \cos\varphi, \quad e_{1y} = \frac{y_1}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2}} = \sin\varphi.$$



$$\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} -\sin\varphi \\ \cos\varphi \end{pmatrix}.$$

$(\mathbf{e}_1 | \mathbf{e}_2)$ образуют матрицу поворота к главным направлениям кв.формы:

$$T_\varphi = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$$

9.3.8. Приведение квадратичной формы к каноническому виду

Дана квадратичная форма $F(x, y) = a_{11}x^2 + a_{12}xy + a_{22}y^2$.

Нужно привести её к каноническому виду: $F(x, y) = \lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2$.

Матрица квадратичной формы: $A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$.

<u>Теорема 1</u>. Каждая квадратичная форма имеет единственный канонический вид.

<u>Теорема 2</u>. При повороте координатных осей до главных направлений квадратичная форма принимает канонический вид с коэффициентами, равными собственным числам.

Как привести квадратичную форму к каноническому виду:

1. Составить матрицу А.
2. Найти собственные числа λ_1 и λ_2.
3. Записать квадратичную форму в каноническом виде:

$$F(x, y) = \lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2.$$

Для нахождения угла поворота к главным направлениям вычисляем нормированный собственный вектор $\mathbf{e}_1$.

9.3.9. Геометрический смысл приведения

Приведение к каноническому виду геометрически означает поворот осей координат до главных направлений кв. формы.

При этом:

1. λ_1 и λ_2 - одного знака: кв. форма эллиптического типа.
2. λ_1 и λ_2 - разного знака: кв. форма гиперболического типа.
3. $\lambda_1 = 0$ или $\lambda_2 = 0$: кв. форма параболического типа.