

Числовые последовательности

Понятие числовой последовательности

Рассмотрим ряд натуральных чисел N :

$$1, 2, 3, \dots, n-1, n, n+1, \dots$$

Функцию $y = f(x)$, $x \in N$ называют функцией натурального аргумента или числовой последовательностью и обозначают $y = f(n)$ или $y_1, y_2, \dots, y_n, \dots$ или $\{y_n\}$.

Величина y_n называется общим членом последовательности.

Обычно числовая последовательность задаётся некоторой формулой $y_n = f(n)$, позволяющей найти любой член последовательности по его номеру n ;
эта формула называется формулой общего члена.



Примеры числовых последовательностей

$1, 2, 3, 4, 5, \dots$ – ряд натуральных чисел;

$2, 4, 6, 8, 10, \dots$ – ряд чётных чисел;

$1, 4, 9, 16, 25, \dots$ – ряд квадратов натуральных чисел;

$5, 10, 15, 20, \dots$ – ряд натуральных чисел, кратных 5;

$1, 1/2, 1/3, 1/4, 1/5, \dots$ – ряд вида $1/n$, где $n \in \mathbb{N}$;

и т.д.



Способы задания

1. **Перечислением** членов последовательности (словесно).
2. Заданием аналитической формулы.
3. Заданием рекуррентной формулы.

Пример

1. Последовательность **н** простых чисел:

2; 3; 5; 7; 11; 13; 17; 19; 23; 29; ...

2. Арифметическая прогрессия:

$$a_n = a_1 + (n - 1)d$$

3. Геометрическая прогрессия:

$$b_{n+1} = b_n \cdot q$$



Ограниченность числовой последовательности

Последовательность $\{y_n\}$ называют *ограниченной сверху*, если все ее члены не больше некоторого числа.

Последовательность $\{y_n\}$ ограничена сверху, если существует число M такое, что для любого n выполняется неравенство

$$y_n \leq M$$

Число M называют *верхней границей* последовательности.

Пример: $-1, -4, -9, -16, \dots, -n^2, \dots$ - ограничена сверху 0 .



Ограниченность числовой последовательности

Последовательность $\{y_n\}$ называют *ограниченной снизу*, если все ее члены *не меньше* некоторого числа.

Последовательность $\{y_n\}$ *ограничена снизу*, если существует число m такое, что для любого n выполняется неравенство

$$y_n \geq m$$

Число m называют *нижней границей последовательности*.

Пример: $1, 4, 9, 16, \dots, n^2, \dots$ - ограничена снизу 1 .

Если последовательность *ограничена и сверху и снизу*, то ее называют *ограниченной последовательностью*.



Возрастание и убывание числовой последовательности

Последовательность $\{y_n\}$ называют *возрастающей последовательностью*, если каждый ее член больше предыдущего:

$$y_1 < y_2 < y_3 < y_4 < \dots < y_n < y_{n+1} < \dots$$

Пример: 1, 3, 5, 7, 9, $2n - 1$, ... - возрастающая последовательность.

Последовательность $\{y_n\}$ называют *убывающей последовательностью*, если каждый ее член меньше предыдущего:

$$y_1 > y_2 > y_3 > y_4 > \dots > y_n > y_{n+1} > \dots$$

Пример: 1, $1/3$, $1/5$, $1/7$, $1/(2n - 1)$, ... - убывающая последовательность.

Возрастающие и убывающие последовательности называют *монотонными*



Предел числовой последовательности

Рассмотрим числовую последовательность, общий член которой приближается к некоторому числу a при увеличении порядкового номера n .

В этом случае говорят, что числовая последовательность имеет *предел*. Это понятие имеет более строгое определение.

Число a называется пределом числовой последовательности $\{u_n\}$ если для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое число $N = N(\varepsilon)$, зависящее от ε , что $|u_n - a| < \varepsilon$ при $n > N$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = a$$



Предел числовой последовательности

Это определение означает, что a есть предел числовой последовательности, если её общий член неограниченно приближается к a при возрастании n . Геометрически это значит, что для любого $\varepsilon > 0$ можно найти такое число N , что начиная с $n > N$ все члены последовательности расположены внутри интервала $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$.

Последовательность, имеющая предел, называется *сходящейся*; в противном случае – *расходящейся*.



Рассмотрим последовательность:

$1; \frac{1}{2}; \frac{1}{3}; \frac{1}{4}; \frac{1}{5}; \dots; \frac{1}{n}; \dots$ – гармонический ряд $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$

Если $m \in \mathbb{N}$, $k \in \mathbb{R}$, то $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{k}{n^m} = 0$

Если $|q| < 1$, то $\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = 0$

Если $|q| > 1$, то последовательность $y_n = q^n$ расходится



Свойства пределов

Если $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = b$, то $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = c$

1. предел суммы равен сумме пределов:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n + y_n) = b + c$$

2. предел произведения равен произведению пределов:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n y_n) = bc$$

3. предел частного равен частному пределов:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{x_n}{y_n} \right) = \frac{b}{c}$$

4. постоянный множитель можно вынести за знак предела:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (k x_n) = kb$$



Примеры:

$$1) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0 \cdot 0 = 0$$

$$2) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2}{n} - \frac{5}{n^2} + 3 \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{n} - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5}{n^2} + \lim_{n \rightarrow \infty} 3 = 0 - 0 + 3 = 3$$

$$3) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^k} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n} \cdot \dots \cdot \frac{1}{n} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \cdot \dots \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0 \cdot \dots \cdot 0 = 0$$

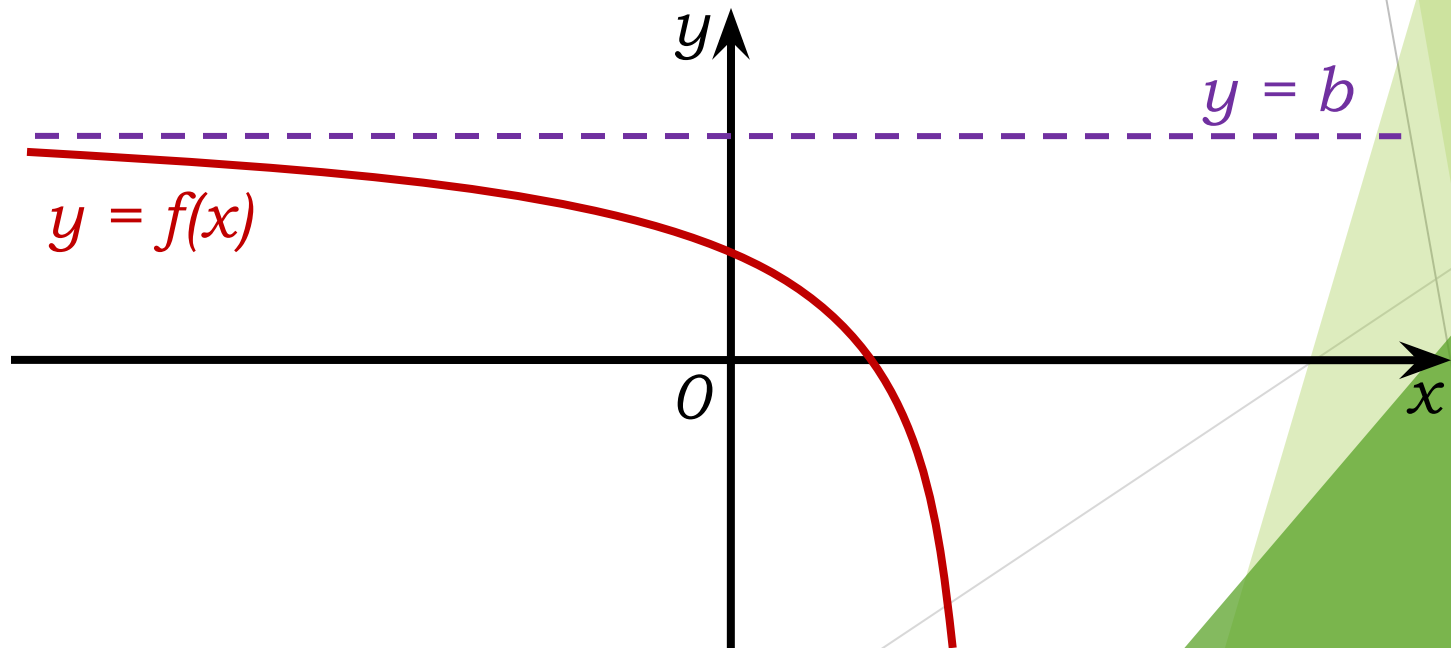
$$\begin{aligned} 4) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n^2 + 3}{n^2 + 4} \right) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\frac{2n^2}{n^2} + \frac{3}{n^2}}{\frac{n^2}{n^2} + \frac{4}{n^2}} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2 + \frac{3}{n^2}}{1 + \frac{4}{n^2}} \right) = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} \left(2 + \frac{3}{n^2} \right)}{\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{4}{n^2} \right)} = \\ &= \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} 2 + \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3}{n^2} \right)}{\lim_{n \rightarrow \infty} 1 + \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{4}{n^2} \right)} = \frac{2 + 0}{1 + 0} = 2 \end{aligned}$$



Горизонтальная асимптота графика функции

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(n) = b$$

Это равенство означает, что прямая $y = b$ является горизонтальной асимптотой графика последовательности $y_n = f(n)$, то есть графика функции $y = f(x)$, $x \in \mathbb{N}$



Сумма бесконечной геометрической

Пример: прогрессии

$$S = \frac{b_1}{1 - q}$$

Дано: $b_1 + b_2 + b_3 + b_4 + \dots + b_n + \dots = 9;$
 $(b_1)^2 + (b_2)^2 + (b_3)^2 + (b_4)^2 + \dots + (b_n)^2 + \dots = 40,5.$

Найти: $b_5.$

Решение:

$$\begin{cases} \frac{b_1}{1 - q} = 9, \\ \frac{b_1^2}{1 - q^2} = 40,5; \end{cases} \quad \begin{cases} b_1 = 9(1 - q), \\ \frac{9^2(1 - q)^2}{1 - q^2} = 40,5; \end{cases} \quad \begin{cases} b_1 = 9(1 - q), \\ \frac{1 - q}{1 + q} = \frac{1}{2}; \end{cases} \quad \begin{cases} b_1 = 6, \\ q = \frac{1}{3}. \end{cases}$$

$$b_5 = 6 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^4 = \frac{2}{27}.$$

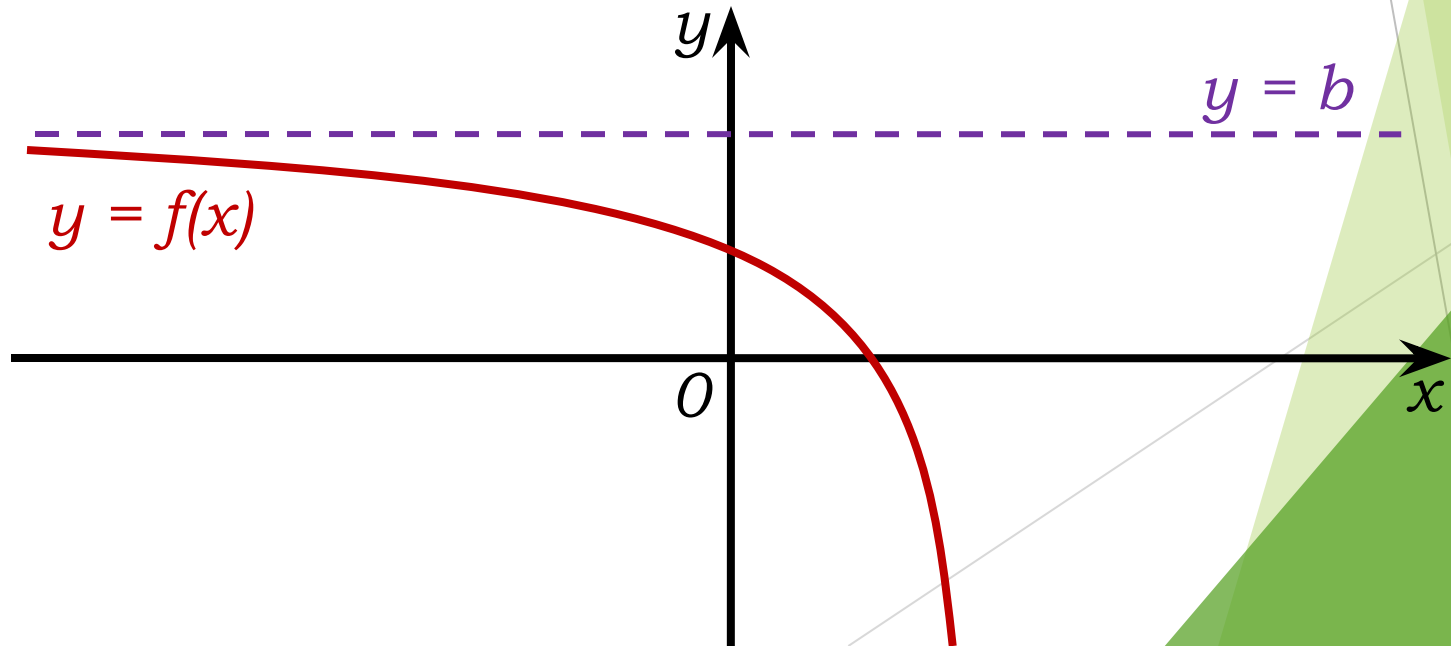
Ответ: $\frac{2}{27}.$



Предел функции на бесконечности $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = b$

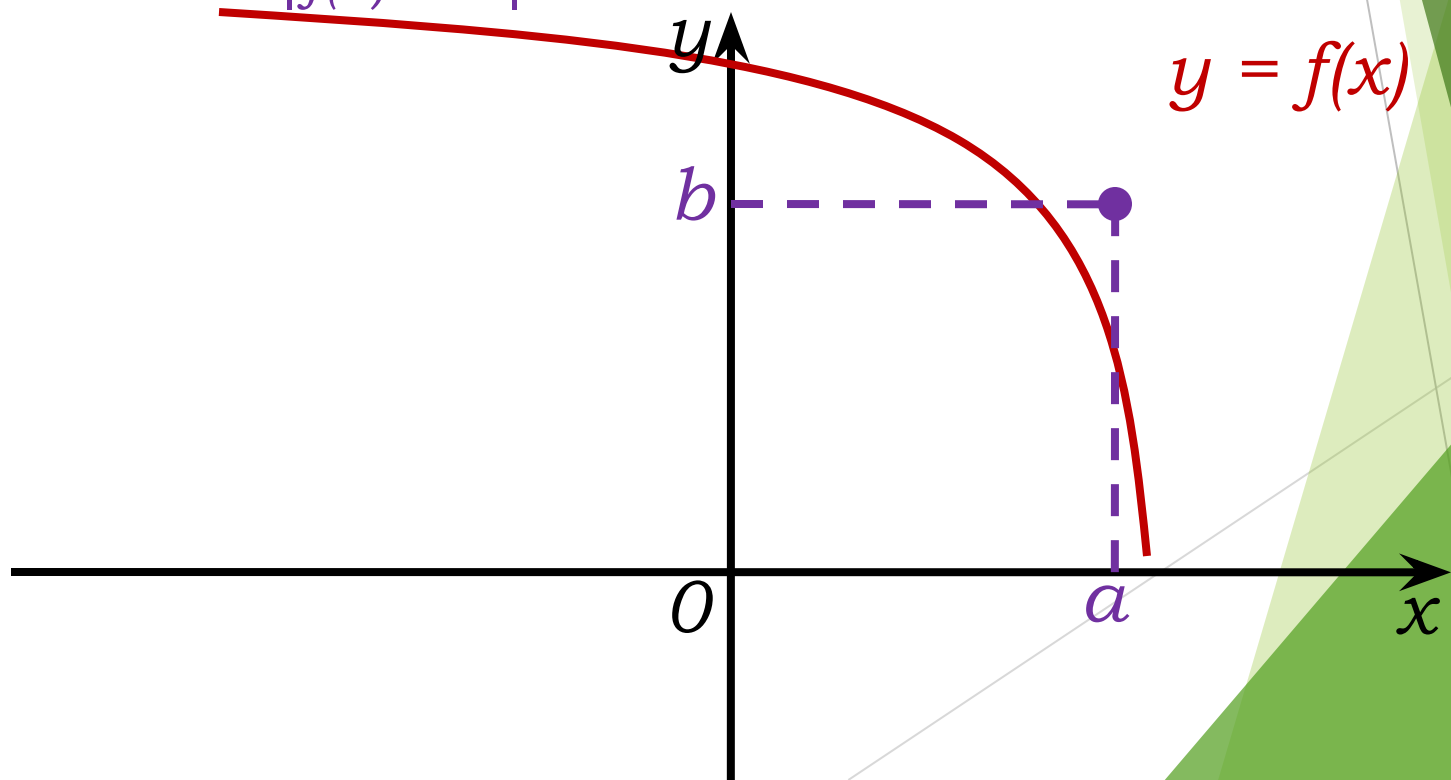
Будем говорить, что функция $f(x)$ стремится к пределу b при $x \rightarrow \infty$, если для произвольного малого положительного числа ε можно указать такое положительное число M , что для всех значений x , удовлетворяющих неравенству $|x| > M$, выполняется неравенство $|f(x) - b| < \varepsilon$.

В этом случае прямая $y = b$ является горизонтальной асимптотой графика функции $y = f(x)$.



Предел функции в точке $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$

Функция $y = f(x)$ стремится к пределу b при $x \rightarrow a$, если для каждого положительного числа ε , как бы мало оно не было, можно указать такое положительное число δ , что при всех $x \neq a$ из области определения функции, удовлетворяющих неравенству $|x - a| < \delta$, имеет место неравенство $|f(x) - b| < \varepsilon$.



Непрерывность функции в точке

Функцию $y = f(x)$ называют непрерывной в точке $x = a$, если выполняется условие

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$$

Примеры:

$$1) \lim_{x \rightarrow 1} (x^3 - 2x^2 + 5x + 3) = 1^3 - 2 \cdot 1^2 + 5 \cdot 1 + 3 = 7$$

$$2) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sin \pi x}{\sqrt{x} + 4} = \frac{\sin 2\pi}{\sqrt{2} + 4} = \frac{0}{\sqrt{2} + 4} = 0$$

$$3) \lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^2 - 9}{4x + 12} = \left(\frac{0}{0} \right) = \lim_{x \rightarrow -3} \frac{(x - 3)(x + 3)}{4(x + 3)} = \lim_{x \rightarrow -3} \frac{x - 3}{4} = \\ = \frac{-3 - 3}{4} = -\frac{6}{4} = -1,5$$

