Числовые последовательности

Понятие числовой последовательности

Рассмотрим ряд натуральных чисел N:

$$1, \quad 2, \quad 3, \quad \ldots, \quad n-1, \quad n, \quad n+1, \quad \ldots$$

*Функцию $y = f(x)$, $x \in N$ называют **функцией натурального аргумента** или **числовой последовательностью** и обозначают $y = f(n)$ или y_1, y_2, …, y_n, … или $\{y_n\}$.*

*Величина y_n называется **общим членом** последовательности.*

Обычно числовая последовательность задаётся некоторой формулой $y_n = f(n)$, позволяющей найти любой член последовательности по его номеру n;

*эта формула называется **формулой общего члена**.*

Примеры числовых последовательностей

1, 2, 3, 4, 5, … – ряд натуральных чисел;

2, 4, 6, 8, 10, … – ряд чётных чисел;

1, 4, 9, 16, 25, … – ряд квадратов натуральных чисел;

5, 10, 15, 20, … – ряд натуральных чисел, кратных 5;

1, 1/2, 1/3, 1/4, 1/5, … – ряд вида 1/n, где $n \in N$;

и т.д.

Способы задания последовательностей

1. *Перечислением членов последовательности (словесно).*
2. *Заданием аналитической формулы.*
3. *Заданием рекуррентной формулы.*

Примеры:

1. *Последовательность простых чисел:*

   2; 3; 5; 7; 11; 13; 17; 19; 23; 29; …

2. *Арифметическая прогрессия:*

   $$a_n = a_1 + (n - 1)d$$

3. *Геометрическая прогрессия:*

   $$b_{n+1} = b_n \cdot q$$

Ограниченность числовой последовательности

Последовательность $\{y_n\}$ называют ограниченной сверху, если все ее члены не больше некоторого числа.

Последовательность $\{y_n\}$ ограниченна сверху, если существует число M такое, что для любого n выполняется неравенство

$$y_n \le M$$

Число M называют верхней границей последовательности.

Пример: -1, -4, -9, -16, …, $-n^2$, … - ограничена сверху 0.

Ограниченность числовой последовательности

Последовательность $\{y_n\}$ называют ограниченной снизу, если все ее члены не меньше некоторого числа.

Последовательность $\{y_n\}$ ограниченна снизу, если существует число m такое, что для любого n выполняется неравенство

$$y_n \geq m$$

Число m называют нижней границей последовательности.

Пример: *1, 4, 9, 16, …, n^2, … - ограничена снизу 1.*

Если последовательность ограничена и сверху и снизу, то ее называют ограниченной последовательностью.

Возрастание и убывание числовой последовательности

Последовательность $\{y_n\}$ называют возрастающей последовательностью, если каждый ее член больше предыдущего:

$$y_1 < y_2 < y_3 < y_4 < \ldots < y_n < y_{n+1} < \ldots$$

Пример: 1, 3, 5, 7, 9, 2n – 1, … - возрастающая последовательность.

Последовательность $\{y_n\}$ называют убывающей последовательностью, если каждый ее член меньше предыдущего:

$$y_1 > y_2 > y_3 > y_4 > \ldots > y_n > y_{n+1} > \ldots$$

Пример: 1, 1/3, 1/5, 1/7, 1/(2n – 1), … - убывающая последовательность.

Возрастающие и убывающие последовательности называют монотонными

Предел числовой последовательности

Рассмотрим числовую последовательность, общий член которой приближается к некоторому числу a *при увеличении порядкового номера* n.
В этом случае говорят, что числовая последовательность имеет предел. Это понятие имеет более строгое определение.

Число a *называется пределом числовой последовательности* $\{u_n\}$ *если для любого* $\varepsilon > 0$ *найдется такое число* $N = N(\varepsilon)$, *зависящее от* ε, *что* $|u_n - a| < \varepsilon$ *при* $n > N$

$$\lim_{n\to\infty} u_n = a$$

Предел числовой последовательности

Это определение означает, что a есть предел числовой последовательности, если её общий член неограниченно приближается к a при возрастании n. Геометрически это значит, что для любого $\varepsilon > 0$ можно найти такое число N, что начиная с $n > N$ все члены последовательности расположены внутри интервала $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$.

Последовательность, имеющая предел, называется сходящейся; в противном случае – расходящейся.

Рассмотрим последовательность:

$1;\ \frac{1}{2};\ \frac{1}{3};\ \frac{1}{4};\ \frac{1}{5};\ \ldots;\ \frac{1}{n};\ \ldots$ – *гармонический ряд* $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$

Если $m\in N,\ k\in R$, *то* $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{k}{n^m}=0$

Если $|q|<1$, *то* $\lim\limits_{n\to\infty}q^n=0$

Если $|q|>1$, *то последовательность* $y_n=q^n$ *расходится*

Свойства пределов

Если $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = b$, *то* $\lim\limits_{n \to \infty} y_n = c$

1. *предел суммы равен сумме пределов:*

$$\lim_{n \to \infty} (x_n + y_n) = b + c$$

2. *предел произведения равен произведению пределов:*

$$\lim_{n \to \infty} (x_n y_n) = bc$$

3. *предел частного равен частному пределов:*

$$\lim_{n \to \infty} \left(\frac{x_n}{y_n} \right) = \frac{b}{c}$$

4. *постоянный множитель можно вынести за знак предела:*

$$\lim_{n \to \infty} (k x_n) = kb$$

Примеры:

1) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{n}\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\cdot\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0\cdot 0=0$

2) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{2}{n}-\frac{5}{n^2}+3\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2}{n}-\lim\limits_{n\to\infty}\frac{5}{n^2}+\lim\limits_{n\to\infty}3=0-0+3=3$

3) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^k}=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{n}\cdot\ldots\cdot\frac{1}{n}\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\cdot\ldots\cdot\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0\cdot\ldots\cdot 0=0$

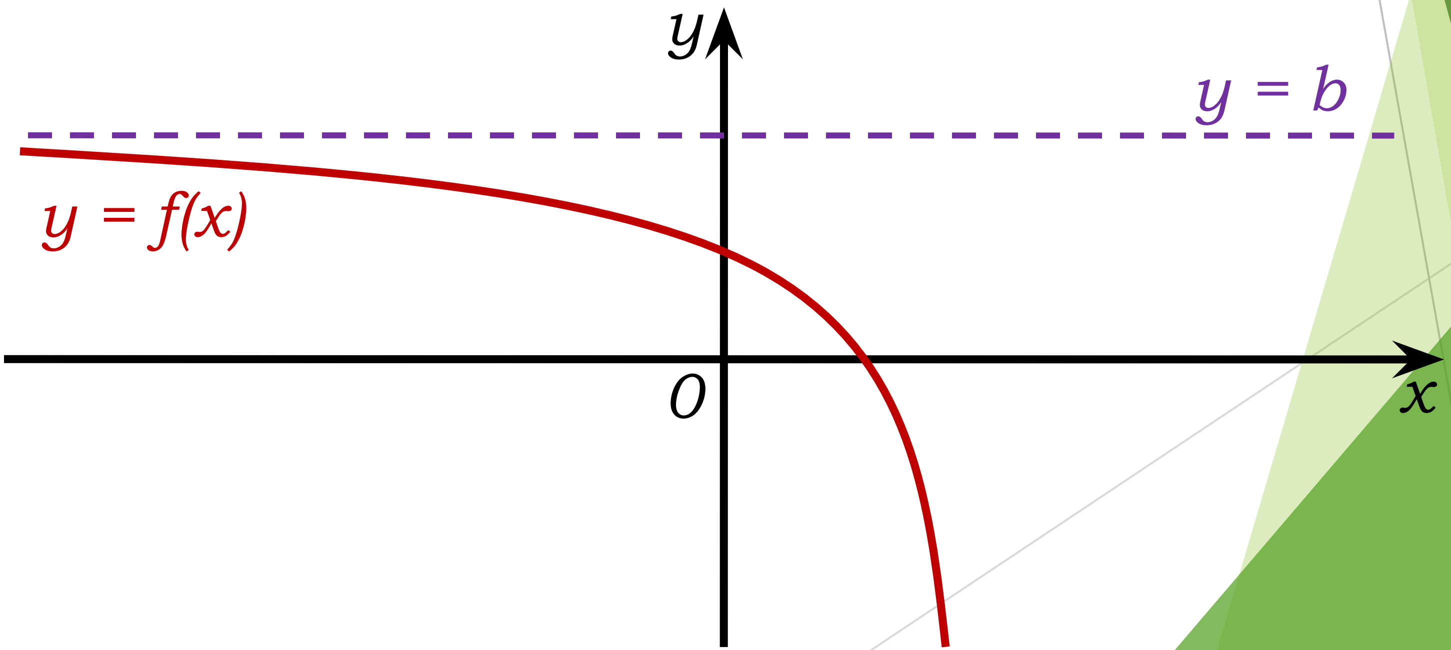
4) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{2n^2+3}{n^2+4}\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{\frac{2n^2}{n^2}+\frac{3}{n^2}}{\frac{n^2}{n^2}+\frac{4}{n^2}}\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{2+\frac{3}{n^2}}{1+\frac{4}{n^2}}\right)=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}\left(2+\frac{3}{n^2}\right)}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{4}{n^2}\right)}=$

$$=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}2+\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{3}{n^2}\right)}{\lim\limits_{n\to\infty}1+\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{4}{n^2}\right)}=\frac{2+0}{1+0}=2$$

Горизонтальная асимптота графика функции

$$\lim_{n \to \infty} f(n) = b$$

Это равенство означает, что прямая $y = b$ является горизонтальной асимптотой графика последовательности $y_n = f(n)$, то есть графика функции $y = f(x)$, $x \in N$



Сумма бесконечной геометрической прогрессии

$$S = \frac{b_1}{1-q}$$

Пример:

Дано: $b_1 + b_2 + b_3 + b_4 + \ldots + b_n + \ldots = 9;$
$(b_1)^2 + (b_2)^2 + (b_3)^2 + (b_4)^2 + \ldots + (b_n)^2 + \ldots = 40{,}5.$
Найти: b_5.
Решение:

$$\begin{cases} \dfrac{b_1}{1-q} = 9, \\ \dfrac{b_1^2}{1-q^2} = 40{,}5; \end{cases} \quad \begin{cases} b_1 = 9(1-q), \\ \dfrac{9^2(1-q)^2}{1-q^2} = 40{,}5; \end{cases} \quad \begin{cases} b_1 = 9(1-q), \\ \dfrac{1-q}{1+q} = \dfrac{1}{2}; \end{cases} \quad \begin{cases} b_1 = 6, \\ q = \dfrac{1}{3}. \end{cases}$$

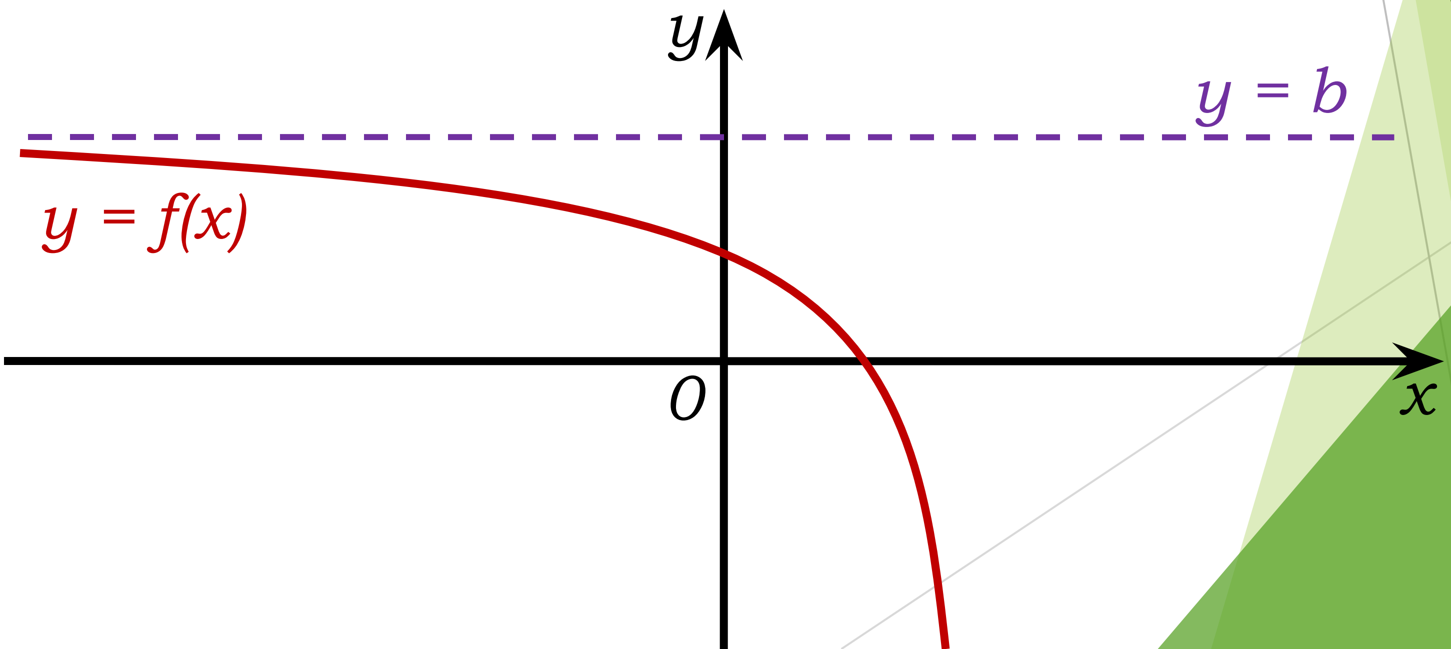
$$b_5 = 6 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^4 = \frac{2}{27}.$$

Ответ: $\dfrac{2}{27}$.

Предел функции на бесконечности $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = b$

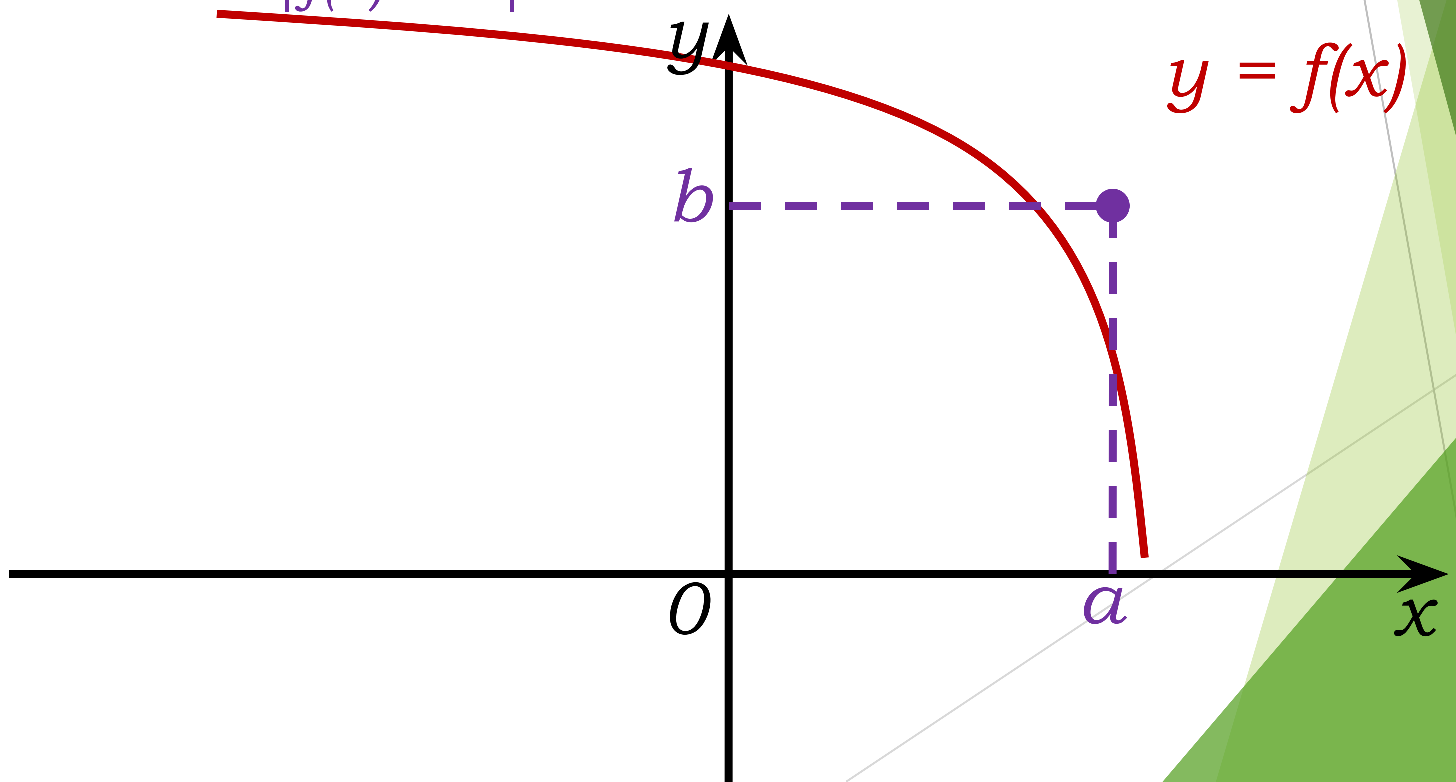
Будем говорить, что функция $f(x)$ стремится к пределу b при $x \to \infty$, если для произвольного малого положительного числа ε можно указать такое положительное число M, что для всех значений x, удовлетворяющих неравенству $|x| > M$, выполняется неравенство $|f(x) - b| < \varepsilon$.

В этом случае прямая $y = b$ является горизонтальной асимптотой графика функции $y = f(x)$.



Предел функции в точке $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$

Функция $y = f(x)$ стремится к пределу b при $x \to a$, если для каждого положительного числа ε, как бы мало оно не было, можно указать такое положительное число δ, что при всех $x \neq a$ из области определения функции, удовлетворяющих неравенству $|x - a| < \delta$, имеет место неравенство $|f(x) - b| < \varepsilon$.



Непрерывность функции в точке

Функцию $y = f(x)$ называют непрерывной в точке $x = a$, если выполняется условие

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$

Примеры:

$$1)\ \lim_{x \to 1}\left(x^3 - 2x^2 + 5x + 3\right) = 1^3 - 2 \cdot 1^2 + 5 \cdot 1 + 3 = 7$$

$$2)\ \lim_{x \to 2} \frac{\sin \pi x}{\sqrt{x} + 4} = \frac{\sin 2\pi}{\sqrt{2} + 4} = \frac{0}{\sqrt{2} + 4} = 0$$

$$3)\ \lim_{x \to -3} \frac{x^2 - 9}{4x + 12} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x \to -3} \frac{(x-3)(x+3)}{4(x+3)} = \lim_{x \to -3} \frac{x-3}{4} =$$

$$= \frac{-3-3}{4} = -\frac{6}{4} = -1{,}5$$