Теория вероятностей

Лекция 6: Системы случайных величин

- Двумерные случайные величины
- Зависимые и независимые случайные величины
- Линейная регрессия
- Закон больших чисел

Двумерные случайные величины

Двумерной называют случайную величину (X, Y), возможные значения которой есть пары чисел (x, y). Составляющие X и Y, рассматриваемые одновременно, образуют *систему* двух случайных величин.

Двумерную величину геометрически можно истолковать как случайную точку $M(X; Y)$ на плоскости xOy либо как случайный вектор OM.

Дискретной называют двумерную величину, составляющие которой дискретны.

Непрерывной называют двумерную величину, составляющие которой непрерывны.

Законом распределения вероятностей двумерной случайной величины называют соответствие между возможными значениями и их вероятностями.

Определение. **Функцией распределения** системы двух случайных величин называется функция двух аргументов $F(x, y)$, равная вероятности совместного выполнения двух неравенств $X<x$, $Y<y$.

$$F(x, y) = P(X < x, Y < y)$$

Геометрически это равенство можно истолковать так: $F(x, y)$ есть вероятность того, что случайная точка (X, Y) попадет в бесконечный квадрант с вершиной (x, y), расположенный левее и ниже этой вершины.

Отметим следующие свойства функции распределения системы двух случайных величин:

1) Если один из аргументов стремится к плюс бесконечности, то функция распределения системы стремится к функции распределения одной случайной величины, соответствующей другому аргументу.

$$\lim_{y\to\infty} F(x, y) = F_1(x);$$

$$\lim_{x\to\infty} F(x, y) = F_2(y);$$

2) Если оба аргумента стремятся к бесконечности, то функция распределения системы стремится к единице.

$$F(\infty, \infty) = 1;$$

3) При стремлении одного или обоих аргументов к минус бесконечности функция распределения стремится к нулю.

$$F(-\infty, y) = F(x, -\infty) = F(-\infty, -\infty) = 0;$$

4) Функция распределения является неубывающей функцией по каждому аргументу.

5) Вероятность попадания случайной точки (X, Y) в произвольный прямоугольник со сторонами, параллельными координатным осям, вычисляется по формуле:

$$P(a \le X \le b, c \le Y \le d) = F(b, d) - F(a, d) - F(b, c) + F(a, c)$$

Задано распределение вероятностей дискретной двумерной случайной величины:

Y	X		
	3	10	12
4	0,17	0,13	0,25
5	0,10	0,30	0,05

Найти законы распределения составляющих X и Y.

Решение. Сложив вероятности «по столбцам», получим вероятности возможных значений X: $p(3)=0{,}27$, $p(10)=0{,}43$, $p(12)=0{,}30$. Напишем закон распределения составляющей X:

X	3	10	12
p	0,27	0,43	0,30

Сложив вероятности «по строкам», аналогично найдем распределение составляющей Y:

Y	4	5
p	0,55	0,45

Определение. Плотностью совместного распределения вероятностей двумерной случайной величины (X, Y) называется вторая смешанная частная производная от функции распределения.

$$\boxed{f(x,y)=\frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x \partial y}}$$

Если известна плотность распределения, то функция распределения может быть легко найдена по формуле:

$$\boxed{F(x,y)=\int_{-\infty}^{y}\int_{-\infty}^{x} f(x,y)dxdy}$$

Двумерная плотность распределения неотрицательна и двойной интеграл с бесконечными пределами от двумерной плотности равен единице.

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dxdy=1$$

Задана функция распределения двумерной случайной величины

$$F(x, y) = \begin{cases} 1 - 3^{-x} - 3^{-y} + 3^{-x-y} & \text{при } x \geqslant 0,\ y \geqslant 0, \\ 0 & \text{при } x < 0 \text{ или } y < 0. \end{cases}$$

Найти двумерную плотность вероятности системы.

Решение. Используем формулу $f(x, y) = \frac{\partial^2 F}{\partial x\, \partial y}$. Найдем частные производные:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \ln 3 \cdot (3^{-x} - 3^{-x-y}), \quad \frac{\partial^2 F}{\partial x\, \partial y} = \ln^2 3 \cdot 3^{-x-y}.$$

Итак, искомая двумерная плотность вероятности

$$f(x, y) = \begin{cases} \ln^2 3 \cdot 3^{-x-y} & \text{при } x \geqslant 0,\ y \geqslant 0, \\ 0 & \text{при } x < 0 \text{ или } y < 0. \end{cases}$$

По известной плотности совместного распределения можно найти плотности распределения каждой из составляющих двумерной случайной величины.

$$\boxed{f_1(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dy; \qquad f_2(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dx}$$

$$F_1(x) = F(x,\infty) = \int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dxdy; \quad F_2(y) = F(\infty,y) = \int_{-\infty}^{y}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dxdy;$$

Плотность совместного распределения можно рассматривать как предел отношения вероятности попадания случайной точки в прямоугольник со сторонами Δx и Δy к площади этого прямоугольника, когда обе его стороны стремятся к нулю; геометрически ее можно истолковать как поверхность, которую называют *поверхностью распределения*.

Пример

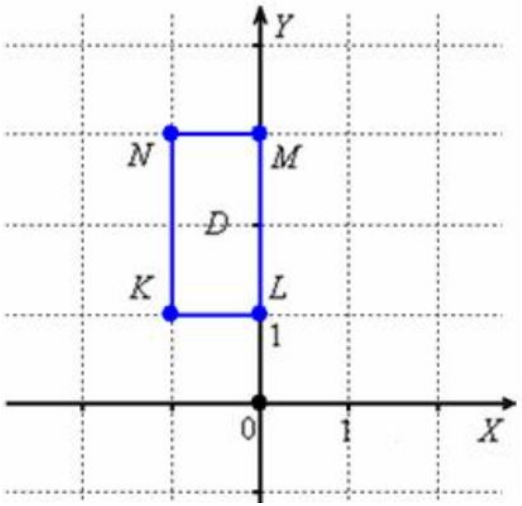
Непрерывная двумерная случайная величина (X,Y) распределена равномерно в прямоугольнике с вершинами $K(-1;1)$, $L(0;1)$, $M(0;3)$, $N(-1;3)$. Требуется:

1) Составить функцию плотности распределения $f(x,y)$ случайной величины (X,Y) и плотности распределений $f(x)$, $f(y)$ составляющих X и Y.

2) Найти функцию распределения вероятностей $F(x,y)$.

3) Построить графики $f(x,y)$, $F(x,y)$.

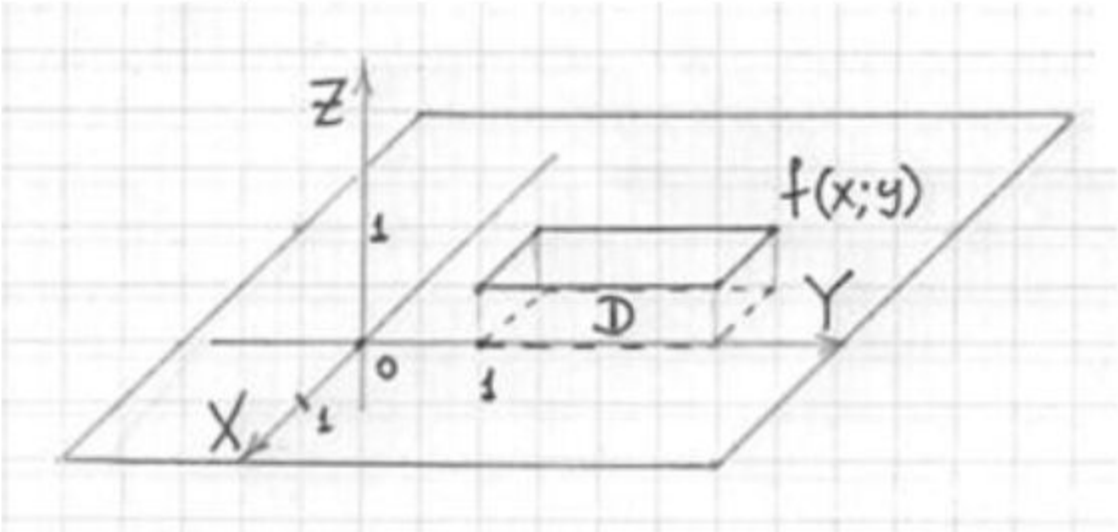
Решение: из условия следует, что случайная величина (X,Y) с равной вероятностью может принять любое значение из области D, которая ограничена прямоугольником $KLMN$:



По сути, перед нами двумерная версия **равномерного распределения вероятностей**, и для нахождения её плотности проще всего разделить единицу на площадь области D.

Очевидно, что эта площадь равна $|KL|\cdot|LM|=1\cdot 2=2$ ед.^{2} и искомая функция плотности:

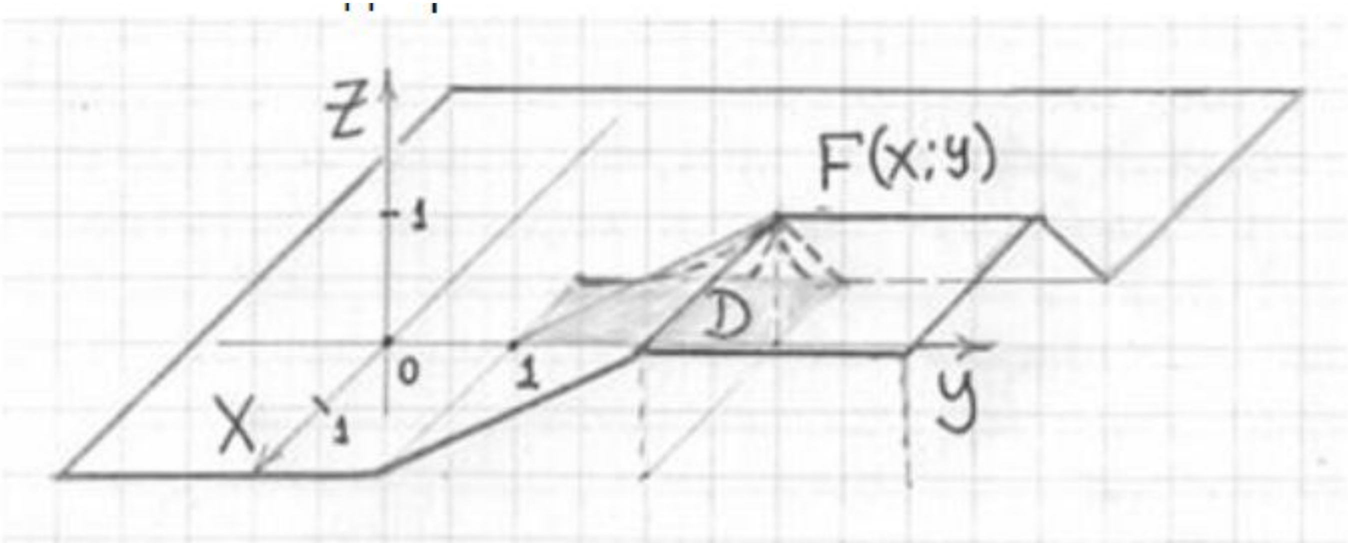
$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{1}{2}, & \text{если } -1\le x\le 0,\ 1\le y\le 3\\ 0, & \text{если } (x,y)\notin D\end{cases}$$



$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dxdy=\iint_D f(x,y)dxdy=\iint_D\frac{1}{2}dxdy=\frac{1}{2}\int_{-1}^{0}dx\int_{1}^{3}dy=$$

$=\frac{1}{2}\int_{-1}^{0}(y)\Big|_1^3 dx=\frac{1}{2}\cdot(3-1)\cdot\int_{-1}^{0}dx=(x)\Big|_{-1}^{0}=0-(-1)=1$, что и требовалось проверить.

$$F(x,y)=\begin{cases}0, & \text{если } x\le -1 \text{ или } y\le 1\\ \frac{1}{2}(x+1)(y-1), & \text{если } -1<x\le 0,\ 1<y\le 3\\ x+1, & \text{если } -1<x\le 0,\ y>3\\ \frac{1}{2}(y-1), & \text{если } x>0, 1<y\le 3\\ 1, & \text{если } x>0, y>3\end{cases}$$



<u>Определение.</u> Распределение одной случайной величины, входящей в систему, найденное при условии, что другая случайная величина приняла определенное значение, называется **условным законом распределения**.

Условный закон распределения можно задавать как функцией распределения так и плотностью распределения.

Условная плотность распределения вычисляется по формулам:

$$f(x/y) = \frac{f(x,y)}{f_2(y)} = \frac{f(x,y)}{\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dx}$$

$$f(y/x) = \frac{f(x,y)}{f_1(x)} = \frac{f(x,y)}{\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dy}$$

Условная плотность распределения обладает всеми свойствами плотности распределения одной случайной величины.

__**Определение.**__ **Условным математическим ожиданием** дискретной случайной величины Y при X = x (x – определенное возможное значение X) называется произведение всех возможных значений Y на их условные вероятности.

$$M(Y/X=x)=\sum_{i=1}^{m} y_i p(y_i/x)$$

Для непрерывных случайных величин:

$$M(Y/X=x)=\int_{-\infty}^{\infty} yf(y/x)dy,$$

где $f(y/x)$ – условная плотность случайной величины Y при X=x.

Условное математическое ожидание $M(Y/x)=f(x)$ является функцией от x и называется **функцией регрессии X на Y.**

Пример. Найти условное математическое ожидание составляющей Y при $X = x_1 = 1$ для дискретной двумерной случайной величины, заданной таблицей:

Y	X			
	$x_1=1$	$x_2=3$	$x_3=4$	$x_4=8$
$y_1=3$	0,15	0,06	0,25	0,04
$y_2=6$	0,30	0,10	0,03	0,07

$$p(x_1) = 0{,}15 + 0{,}30 = 0{,}45$$

$$p(y_1 / x_1) = p(x_1, y_1) / p(x_1) = 0{,}15 / 0{,}45 = 1/3;$$

$$p(y_2 / x_1) = p(x_1, y_2) / p(x_1) = 0{,}30 / 0{,}45 = 2/3;$$

$$M(Y / X = x_1) = \sum_{j=1}^{2} y_j p(y_j / x_1) = y_1 p(y_1 / x_1) + y_2 p(y_2 / x_1) = 3/3 + 12/3 = 5.$$

Аналогично определяются условная дисперсия и условные моменты системы случайных величин.

Зависимые и независимые случайные величины.

Случайные величины называются независимыми, если закон распределения одной из них не зависит от того какое значение принимает другая случайная величина.

Понятие зависимости случайных величин является очень важным в теории вероятностей.

Условные распределения независимых случайных величин равны их безусловным распределениям.

Определим необходимые и достаточные условия независимости случайных величин.

Теорема. *Для того, чтобы случайные величины X и Y были независимы, необходимо и достаточно, чтобы функция распределения системы (X, Y) была равна произведению функций распределения составляющих.*

$$F(x, y) = F_1(x)F_2(y)$$

Пример

Две независимые дискретные случайные величины X и Y заданы своими законами распределения вероятностей:

X	x_i	-2	1	4
	p_i	0,2	0,3	0,5

Y	y_j	-1	0	1	2	3
	p_j	0,3	0,1	0,2	0,3	0,1

Требуется:

1) Найти закон распределения вероятностей системы (X, Y) и вычислить $P(x < 0, y \geq 0)$, $P(x \geq 1, -1 < y < 2)$, $P(x \leq 4, y > 2)$.

2) Найти закон распределения вероятностей случайной величины $Z = X \cdot Y$, вычислить $M(Z)$, $D(Z)$ и вероятность того, что полученная СВ примет отрицательное значение.

3) Проверить справедливость равенства $M(XY) = M(X) \cdot M(Y)$

В последнем пункте сформулировано ещё одно свойство математического ожидания, которое справедливо **только для независимых** случайных величин.

1) Используя теоремы умножения вероятностей независимых и сложения несовместных событий, составим закон распределения системы (X,Y):

X	Y				
	-1	0	1	2	3
-2	0,06	0,02	0,04	0,06	0,02
1	0,09	0,03	0,06	0,09	0,03
4	0,15	0,05	0,1	0,15	0,05

Суммируя вероятности по строкам, убеждаемся, что получается закон распределения случайной величины X, и, суммируя вероятности по столбцам, получаем в точности закон распределения Y.

Вычислим требуемые вероятности:

$$P(x<0, y\geq 0)=0{,}02+0{,}04+0{,}06+0{,}02=0{,}14$$

$$P(x\geq 1, -1<y<2)=0{,}03+0{,}06+0{,}05+0{,}1=0{,}24$$

$$P(x\leq 4, y>2)=0{,}02+0{,}03+0{,}05=0{,}1$$

2) Найдём закон распределения случайной величины $Z = X \cdot Y$.

Начнём с наименьшего значения $z_1 = -2 \cdot 3 = -6$, *которое даёт пара* $(x_i; y_j) = (-2; 3)$. *Вероятности появления всех возможных комбинаций уже вычислены в предыдущем пункте:*

$p(1) = 0,02$

Произведению $z_2 = -4$ *соответствуют пары* $(-2; 2), (4; -1)$. *По теореме сложения несовместных событий:*

$p(2) = 0,06 + 0,15 = 0,21$

Произведению $z_3 = -2$ *соответствует пара* $(-2; 1)$:

$p(3) = 0,04$

Произведению $z_4 = -1$ *– пара* $(1; -1)$:

$p(4) = 0,09$

Произведению $z_5 = 0$ *соответствуют пары* $(-2; 0), (1; 0), (4; 0)$:

$p(5) = 0,02 + 0,03 + 0,05 = 0,1$

Произведению $z_5 = 0$ *соответствуют пары* $(-2;0), (1;0), (4;0)$ *:*

$p(5) = 0{,}02 + 0{,}03 + 0{,}05 = 0{,}1$

Произведению $z_6 = 1$ *– пара* $(1;1)$ *:*

$p(6) = 0{,}06$

Произведению $z_7 = 2$ *– пары* $(-2;-1), (1;2)$ *:*

$p(7) = 0{,}06 + 0{,}09 = 0{,}15$

Произведению $z_8 = 3$ *– пара* $(1;3)$ *:*

$p(8) = 0{,}03$

Произведению $z_9 = 4$ *– пара* $(4;1)$ *:*

$p(9) = 0{,}1$

Произведению $z_{10} = 8$ *– пара* $(4;2)$ *:*

$p(10) = 0{,}15$

и, наконец, произведению $z_{11} = 12$ *– пара* $(4;3)$ *:*

$p(11) = 0{,}05$

Закон распределения случайной величины $Z = XY$ *сведём в 2 верхние строки расчётной таблицы, не забывая проконтролировать, что* $\sum p(k) = 1$*:*

z_k	-6	-4	-2	-1	0	1	2	3	4	8	12	Суммы:
$p(k)$	0,02	0,21	0,04	0,09	0,1	0,06	0,15	0,03	0,1	0,15	0,05	1
$z_k \cdot p(k)$	-0,12	-0,84	-0,08	-0,09	0	0,06	0,3	0,09	0,4	1,2	0,6	1,52
$z_k^2 \cdot p(k)$	0,72	3,36	0,16	0,09	0	0,06	0,6	0,27	1,6	9,6	7,2	23,66

Математическое ожидание: $M(Z) = \sum z_k p(z_k) = 1{,}52$, *дисперсия:*

$$D(Z) = \sum z_k^2 p(k) - (M(Z))^2 = 23{,}66 - (1{,}52)^2 = 23{,}66 - 2{,}3104 = 21{,}3496$$

$P(z < 0) = 0{,}02 + 0{,}21 + 0{,}04 + 0{,}09 = 0{,}36$ *– вероятность того, что случайная величина* Z *примет отрицательное значение.*

3) Покажем справедливость равенства $M(XY) = M(X) \cdot M(Y)$.

$M(XY) = 1{,}52$ *– вычислено в предыдущем пункте.*

Вычислим матожидания исходных случайных величин:

$$M(X) = -2 \cdot 0{,}2 + 1 \cdot 0{,}3 + 4 \cdot 0{,}5 = -0{,}4 + 0{,}3 + 2 = 1{,}9$$

$$M(Y) = -1 \cdot 0{,}3 + 0 \cdot 0{,}1 + 1 \cdot 0{,}2 + 2 \cdot 0{,}3 + 3 \cdot 0{,}1 = -0{,}3 + 0 + 0{,}2 + 0{,}6 + 0{,}3 = 0{,}8$$

Таким образом:

$1{,}52 = 1{,}9 \cdot 0{,}8$

$1{,}52 = 1{,}52$ *– получено верное равенство, что и требовалось проверить.*

<u>Теорема.</u> *Для того, чтобы случайные величины X и Y были независимы, необходимо и достаточно, чтобы плотность совместного распределения системы (X, Y) была равна произведению плотностей распределения составляющих.*

$$f(x, y) = f_1(x) f_2(y)$$

<u>Определение.</u> Корреляционным моментом μ_{xy} случайных величин X и Y называется математическое ожидание произведения отклонений этих величин.

$$\operatorname{cov}(X, Y) = \mu_{xy} = M\{[X - M(X)][Y - M(Y)]\}$$

Практически используются формулы:

Для дискретных случайных величин: $\boxed{\mu_{xy} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} [x_i - M(X)][y_j - M(Y)] p(x_i, y_j)}$

Для непрерывных случайных величин: $\boxed{\mu_{xy} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} [x - M(X)][y - M(Y)] f(x, y) dxdy}$

Корреляционный момент служит для того, чтобы охарактеризовать связь между случайными величинами. Если случайные величины независимы, то их корреляционный момент равен нулю.

Корреляционный момент имеет размерность, равную произведению размерностей случайных величин X и Y. Этот факт является недостатком этой числовой характеристики, т.к. при различных единицах измерения получаются различные корреляционные моменты, что затрудняет сравнение корреляционных

Для того, чтобы устранить этот недостаток применятся другая характеристика – коэффициент корреляции.

Определение. Коэффициентом корреляции r_{xy} случайных величин X и Y называется отношение корреляционного момента к произведению средних квадратических отклонений этих величин.

$$\boxed{r_{xy} = \frac{\mu_{xy}}{\sigma_x \sigma_y}}$$

<u>Свойство:</u> Абсолютная величина корреляционного момента двух случайных величин X и Y не превышает среднего геометрического их дисперсий.

$$|\mu_{xy}| \le \sqrt{D_x D_y}$$

<u>Свойство:</u> Абсолютная величина коэффициента корреляции не превышает единицы.

$$|r_{xy}| \le 1$$

Случайные величины называются **коррелированными**, если их корреляционный момент отличен от нуля, и **некоррелированными**, если их корреляционный момент равен нулю.

Если случайные величины независимы, то они и некоррелированы, но из некоррелированности нельзя сделать вывод о их независимости.

Если две величины зависимы, то они могут быть как коррелированными, так и некоррелированными.

Часто по заданной плотности распределения системы случайных величин можно определить зависимость или независимость этих величин.

Линейная регрессия.

Рассмотрим двумерную случайную величину (X, Y), где X и Y – зависимые случайные величины.

Представим приближенно одну случайную величину как функцию другой. Точное соответствие невозможно. Будем считать, что эта функция линейная.

$$Y \cong g(X) = \alpha X + \beta$$

Для определения этой функции остается только найти постоянные величины α и β.

Определение. Функция *g(X)* называется **наилучшим приближением** случайной величины Y в смысле метода наименьших квадратов, если математическое ожидание $M[Y - g(X)]^2$ принимает наименьшее возможное значение. Также функция *g(x)* называется **среднеквадратической регрессией** Y на X.

Линейная средняя квадратическая регрессия Y на X вычисляется по формуле:

$$g(X) = m_y + r\frac{\sigma_y}{\sigma_x}(X - m_x)$$

$r = \mu_{xy} / (\sigma_x \sigma_y)$ – коэффициент корреляции величин X и Y.

$m_x = M(X)$, $m_y = M(Y)$, $\sigma_x = \sqrt{D(X)}$, $\sigma_y = \sqrt{D(Y)}$, Величина $\boxed{\beta = r\frac{\sigma_y}{\sigma_x}}$ называется **коэффициентом регрессии** *Y* на *X*.

Прямая, уравнение которой

$$\boxed{y - m_y = r\frac{\sigma_y}{\sigma_x}(x - m_x),}$$

называется **прямой сренеквадратической регрессии** *Y* на *X*.

Величина $\sigma_y^2(1-r^2)$ называется **остаточной дисперсией** случайной величины *Y* относительно случайной величины *X*. Эта величина характеризует величину ошибки, образующейся при замене случайной величины *Y* линейной функцией $g(X)=\alpha X+\beta$.

Видно, что если $r=\pm1$, то остаточная дисперсия равна нулю, и, следовательно, ошибка равна нулю и случайная величина *Y* точно представляется линейной функцией от случайной величины *X*.

Прямая среднеквадратичной регрессии X на Y определяется аналогично по формуле:

$$\boxed{x - m_x = r\frac{\sigma_x}{\sigma_y}(y - m_y)}$$

Прямые среднеквадратичной регрессии пересекаются в точке (m_x, m_y), которую называют **центром совместного распределения** случайных величин X и Y.

Линейная корреляция.

Если две случайные величины X и Y имеют в отношении друг друга линейные функции регрессии, то говорят, что величины X и Y связаны **линейной корреляционной зависимостью**.

Теорема. *Если двумерная случайная величина (X, Y) распределена нормально, то X и Y связаны линейной корреляционной зависимостью.*

Закон больших чисел.

Неравенство Чебышева.

Рассмотрим дискретную случайную величину X (хотя все сказанное ниже будет справедливо и для непрерывных случайных величин), заданную таблицей распределения:

X	x_1	x_2	…	x_n
p	p_1	p_2	…	p_n

Требуется определить вероятность того, что отклонение значения случайной величины от ее математического ожидания будет не больше, чем заданное число ε.

Теорема. (Неравенство Чебышева) *Вероятность того, что отклонение случайной величины X от ее математического ожидания по абсолютной величине меньше положительного числа ε, не меньше чем* $1 - D(X)/\varepsilon^2$.

$$\boxed{P(|X - M(X)| < \varepsilon) \geq 1 - D(X)/\varepsilon^2}$$

Вероятность появления события A в каждом испытании равна 1/2. Используя неравенство Чебышева, оценить вероятность того, что число X появлений события A заключено в пределах от 40 до 60, если будет произведено 100 независимых испытаний.

Решение. Найдем математическое ожидание и дисперсию дискретной случайной величины X — числа появлений события A в 100 независимых испытаниях:

$$M(X) = np = 100 \cdot 1/2 = 50; \quad D(X) = npq = 100 \cdot 1/2 \cdot 1/2 = 25.$$

Найдем максимальную разность между заданным числом появлений события и математическим ожиданием $M(X) = 50$:

$$\varepsilon = 60 - 50 = 10.$$

Воспользуемся неравенством Чебышева в форме

$$P(|X - M(X)| < \varepsilon) \geq 1 - D(X)/\varepsilon^2.$$

Подставляя $M(X) = 50$, $D(X) = 25$, $\varepsilon = 10$, получим

$$P(|X - 50| < 10) \geq 1 - 25/10^2 = 0{,}75.$$

Теорема Чебышева.

Теорема. *Если $X_1, X_2, \ldots, X_n$- попарно независимые случайные величины, причем дисперсии их равномерно ограничены (не превышаю постоянного числа С), то, как бы мало не было положительное число ε, вероятность неравенства*

$$\left[\frac{X_1+X_2+\ldots+X_n}{n}-\frac{M(X_1)+M(X_2)+\ldots+M(X_n)}{n}\right]<\varepsilon$$

будет сколь угодно близка к единице, если число случайных величин достаточно велико.

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{X_1+X_2+\ldots+X_n}{n}-\frac{M(X_1)+M(X_2)+\ldots+M(X_n)}{n}\right|<\varepsilon\right)=1$$

Часто бывает, что случайные величины имеют одно и то же математическое ожидание. В этом случае теорема Чебышева несколько упрощается:

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n}{n} - m\right| < \varepsilon\right) = 1$$

Теорема утверждает, что хотя каждое отдельное значение случайной величины может достаточно сильно отличаться от своего математического ожидания, но среднее арифметическое этих значений будет неограниченно приближаться к среднему арифметическому математических ожиданий.

Отклоняясь от математического ожидания как в положительную так и в отрицательную сторону, от своего математического ожидания, в среднем арифметическом отклонения взаимно сокращаются.

Таким образом, величина среднего арифметического значений случайной величины уже теряет характер случайности.

<u>Теорема Бернулли.</u>

Пусть производится n независимых испытаний, в каждом из которых вероятность появления события А равно p.

Возможно определить примерно относительную частоту появления события А.

<u>Теорема.</u> *Если в каждом из n независимых испытаний вероятность p появления события А постоянно, то сколь угодно близка к единице вероятность того, что отклонение относительной частоты от вероятности p по абсолютной величине будет сколь угодно малым, если число испытаний n достаточно велико.*

$$\lim_{n\to\infty} P(|m/n - p| < \varepsilon) = 1$$

Здесь m – число появлений события А. Из всего сказанного выше не следует, что с увеличением число испытаний относительная частота неуклонно стремится к вероятности p, т.е. $\lim_{n\to\infty}\frac{m}{n} = p$. В теореме имеется в виду только вероятность приближения относительной частоты к вероятности появления события А в каждом испытании.

Предельные теоремы.

Как уже говорилось, при достаточно большом количестве испытаний, поставленных в одинаковых условиях, характеристики случайных событий и случайных величин становятся почти неслучайными. Это позволяет использовать результаты наблюдений случайных событий для предсказания исхода того или иного опыта.

Предельные теоремы теории вероятностей устанавливают соответствие между теоретическими и экспериментальными характеристиками случайных величин при большом количестве испытаний.

В рассмотренном выше законе больших чисел нечего не говорилось о законе распределения случайных величин.

Поставим задачу нахождения предельного закона распределения суммы $Y_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$ когда число слагаемых n неограниченно возрастает. Эту задачу решает

Центральная предельная теорема Ляпунова.

Теорема. *Если случайная величина X представляет собой сумму очень большого числа взаимно независимых случайных величин, влияние каждой из которых на всю сумму ничтожно мало, то X имеет распределение, близкое к нормальному.*

На практике для большинства случайных величин выполняются условия теоремы Ляпунова.

Допустим, что случайные величины X_i взаимно независимы и одинаково распределены.

Теорема. *Если случайные величины X_i взаимно независимы и имеют один и тот же закон распределения с математическим ожиданием m и дисперсией σ^2, причем существует третий абсолютный момент ν_3, то при неограниченном увеличении числа испытаний n закон распределения суммы $Y_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$ неограниченно приближается к нормальному.*

Абсолютным центральным моментом случайной величины X порядка n называют математическое ожидание $|X - a|^n$

$$M(|X - a|^n)$$

Случайные величины X_i, рассмотренные в центральной предельной теореме, могут обладать произвольными распределениями вероятностей.

Если все эти случайные величины одинаково распределены, дискретны и принимают только два возможных значения 0 или 1, то получается простейший случай центральной предельной теоремы, известный как **теорема Муавра – Лапласа**.

Теорема. (Теорема Муавра – Лапласа) *Если производится n независимых опытов, в каждом из которых событие A появляется с вероятностью p, то для любого интервала (α, β) справедливо соотношение:*

$$P\left(\alpha < \frac{Y - np}{\sqrt{npq}} < \beta\right) = \Phi(\beta) - \Phi(\alpha)$$

где Y – число появлений события A в n опытах, q = 1 – p, Φ(x) – функция Лапласа,

Теорема Муавра – Лапласа описывает поведение биноминального распределения при больших значениях n.