

Теория вероятностей

Лекция 6: Системы случайных величин

- Двумерные случайные величины
- Зависимые и независимые случайные величины
- Линейная регрессия
- Закон больших чисел

Двумерные случайные величины

Двумерной называют случайную величину (X, Y) , возможные значения которой есть пары чисел (x, y) . Составляющие X и Y , рассматриваемые одновременно, образуют *систему* двух случайных величин.

Двумерную величину геометрически можно истолковать как случайную точку $M(X; Y)$ на плоскости xOy либо как случайный вектор OM .

Дискретной называют двумерную величину, составляющие которой дискретны.

Непрерывной называют двумерную величину, составляющие которой непрерывны.

Законом распределения вероятностей двумерной случайной величины называют соответствие между возможными значениями и их вероятностями.

Определение. Функцией распределения системы двух случайных величин называется функция двух аргументов $F(x, y)$, равная вероятности совместного выполнения двух неравенств $X < x, Y < y$.

$$F(x, y) = P(X < x, Y < y)$$

Геометрически это равенство можно истолковать так: $F(x, y)$ есть вероятность того, что случайная точка (X, Y) попадет в бесконечный квадрант с вершиной (x, y) , расположенный левее и ниже этой вершины.

Отметим следующие свойства функции распределения системы двух случайных величин:

1) Если один из аргументов стремится к плюс бесконечности, то функция распределения системы стремится к функции распределения одной случайной величины, соответствующей другому аргументу.

$$\lim_{y \rightarrow \infty} F(x, y) = F_1(x);$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} F(x, y) = F_2(y);$$

2) Если оба аргумента стремятся к бесконечности, то функция распределения системы стремится к единице.

$$F(\infty, \infty) = 1;$$

3) При стремлении одного или обоих аргументов к минус бесконечности функция распределения стремится к нулю.

$$F(-\infty, y) = F(x, -\infty) = F(-\infty, -\infty) = 0;$$

4) Функция распределения является неубывающей функцией по каждому аргументу.

5) Вероятность попадания случайной точки (X, Y) в произвольный прямоугольник со сторонами, параллельными координатным осям, вычисляется по формуле:

$$P(a \leq X \leq b, c \leq Y \leq d) = F(b, d) - F(a, d) - F(b, c) + F(a, c)$$

Задано распределение вероятностей дискретной двумерной случайной величины:

Y	X		
	3	10	12
4	0,17	0,13	0,25
5	0,10	0,30	0,05

Найти законы распределения составляющих X и Y .

Решение. Сложив вероятности «по столбцам», получим вероятности возможных значений X : $p(3) = 0,27$, $p(10) = 0,43$, $p(12) = 0,30$.

Напишем закон распределения составляющей X :

X	3	10	12
p	0,27	0,43	0,30

Сложив вероятности «по строкам», аналогично найдем распределение составляющей Y :

Y	4	5
p	0,55	0,45

Определение. Плотностью совместного распределения вероятностей двумерной случайной величины (X, Y) называется вторая смешанная частная производная от функции распределения.

$$f(x, y) = \frac{\partial^2 F(x, y)}{\partial x \partial y}$$

Если известна плотность распределения, то функция распределения может быть легко найдена по формуле:

$$F(x, y) = \int_{-\infty}^y \int_{-\infty}^x f(x, y) dx dy$$

Двумерная плотность распределения неотрицательна и двойной интеграл с бесконечными пределами от двумерной плотности равен единице.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dx dy = 1$$

Задана функция распределения двумерной случайной величины

$$F(x, y) = \begin{cases} 1 - 3^{-x} - 3^{-y} + 3^{-x-y} & \text{при } x \geq 0, y \geq 0, \\ 0 & \text{при } x < 0 \text{ или } y < 0. \end{cases}$$

Найти двумерную плотность вероятности системы.

Решение. Используем формулу $f(x, y) = \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}$. Найдем частные производные:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \ln 3 \cdot (3^{-x} - 3^{-x-y}), \quad \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = \ln^2 3 \cdot 3^{-x-y}.$$

Итак, искомая двумерная плотность вероятности

$$f(x, y) = \begin{cases} \ln^2 3 \cdot 3^{-x-y} & \text{при } x \geq 0, y \geq 0, \\ 0 & \text{при } x < 0 \text{ или } y < 0. \end{cases}$$

По известной плотности совместного распределения можно найти плотности распределения каждой из составляющих двумерной случайной величины.

$$f_1(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dy; \quad f_2(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dx$$

$$F_1(x) = F(x, \infty) = \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dx dy; \quad F_2(y) = F(\infty, y) = \int_{-\infty}^y \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dx dy;$$

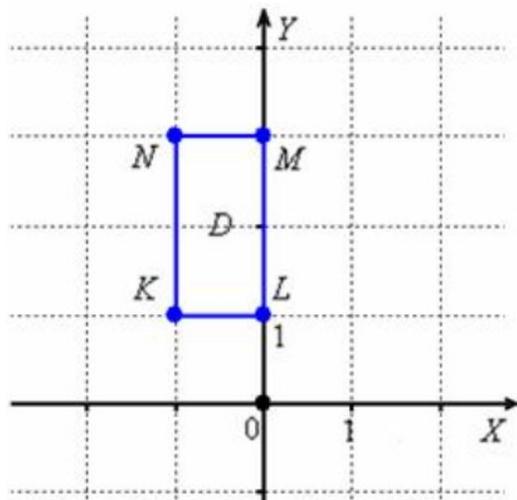
Плотность совместного распределения можно рассматривать как предел отношения вероятности попадания случайной точки в прямоугольник со сторонами Δx и Δy к площади этого прямоугольника, когда обе его стороны стремятся к нулю; геометрически ее можно истолковать как поверхность, которую называют *поверхностью распределения*.

Пример

Непрерывная двумерная случайная величина (X, Y) распределена равномерно в прямоугольнике с вершинами $K(-1; 1)$, $L(0; 1)$, $M(0; 3)$, $N(-1; 3)$. Требуется:

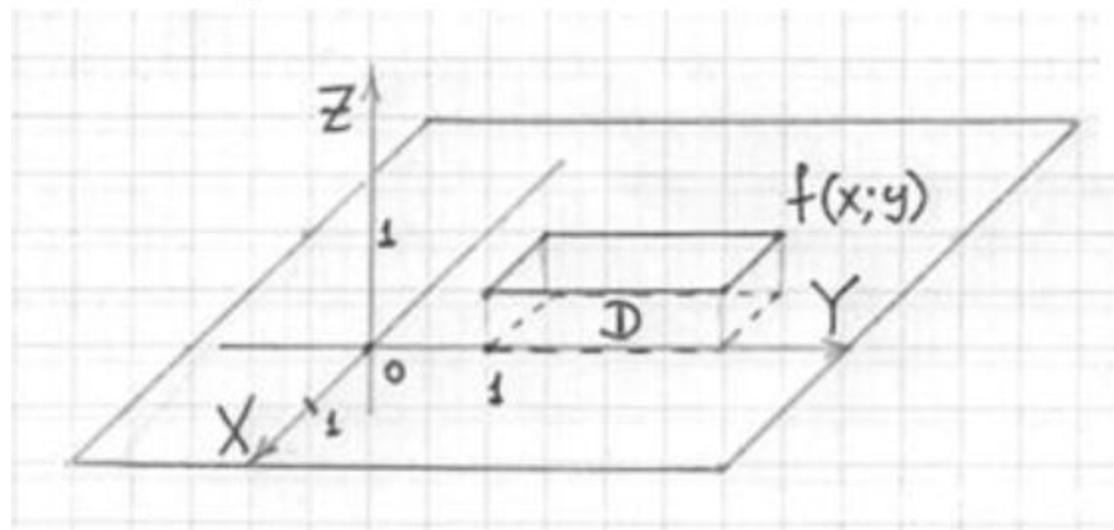
- 1) Составить функцию плотности распределения $f(x, y)$ случайной величины (X, Y) и плотности распределений $f(x)$, $f(y)$ составляющих X и Y .
- 2) Найти функцию распределения вероятностей $F(x, y)$.
- 3) Построить графики $f(x, y)$, $F(x, y)$.

Решение: из условия следует, что случайная величина (X, Y) с равной вероятностью может принять любое значение из области D , которая ограничена прямоугольником $KLMN$:



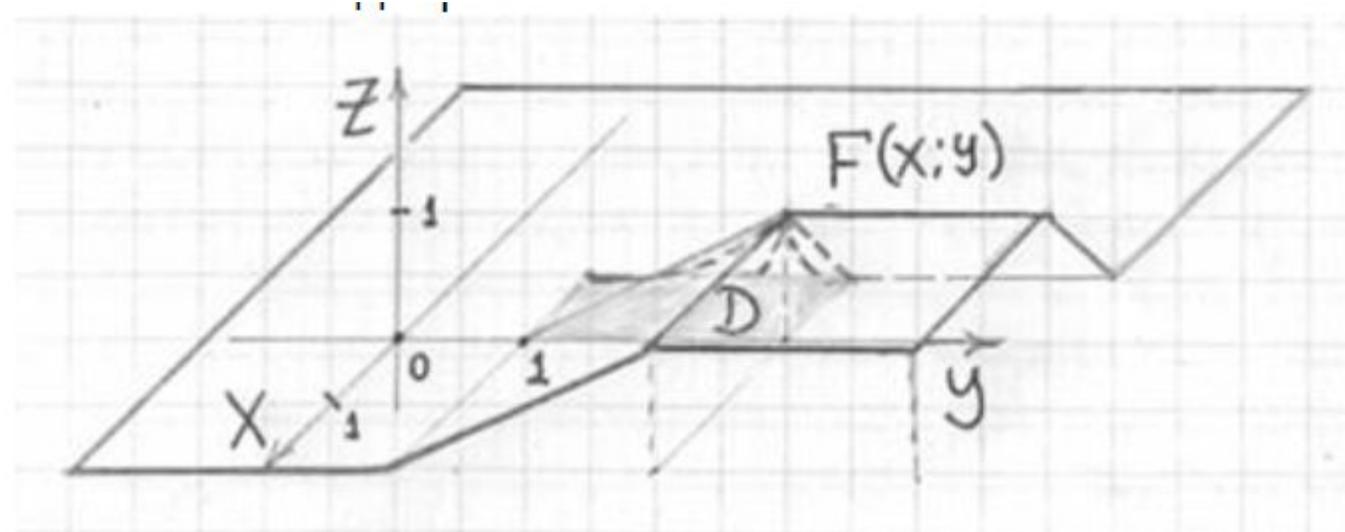
По сути, перед нами двумерная версия **равномерного распределения вероятностей**, и для нахождения её плотности проще всего разделить единицу на площадь области D . Очевидно, что эта площадь равна $|KL| \cdot |LM| = 1 \cdot 2 = 2 \text{ ед.}^2$ и искомая функция плотности:

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & \text{если } -1 \leq x \leq 0, 1 \leq y \leq 3 \\ 0, & \text{если } (x,y) \notin D \end{cases}$$



$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y) dx dy &= \iint_D f(x,y) dx dy = \iint_D \frac{1}{2} dx dy = \frac{1}{2} \int_{-1}^0 dx \int_1^3 dy = \\ &= \frac{1}{2} \int_{-1}^0 (y) \Big|_1^3 dx = \frac{1}{2} \cdot (3-1) \cdot \int_{-1}^0 dx = (x) \Big|_{-1}^0 = 0 - (-1) = 1, \text{ что и требовалось проверить.} \end{aligned}$$

$$F(x,y) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \leq -1 \text{ или } y \leq 1 \\ \frac{1}{2}(x+1)(y-1), & \text{если } -1 < x \leq 0, 1 < y \leq 3 \\ x+1, & \text{если } -1 < x \leq 0, y > 3 \\ \frac{1}{2}(y-1), & \text{если } x > 0, 1 < y \leq 3 \\ 1, & \text{если } x > 0, y > 3 \end{cases}$$



Определение. Распределение одной случайной величины, входящей в систему, найденное при условии, что другая случайная величина приняла определенное значение, называется **условным законом распределения**.

Условный закон распределения можно задавать как функцией распределения так и плотностью распределения.

Условная плотность распределения вычисляется по формулам:

$$f(x/y) = \frac{f(x, y)}{f_2(y)} = \frac{f(x, y)}{\int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dx}$$

$$f(y/x) = \frac{f(x, y)}{f_1(x)} = \frac{f(x, y)}{\int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dy}$$

Условная плотность распределения обладает всеми свойствами плотности распределения одной случайной величины.

Определение. Условным математическим ожиданием дискретной случайной величины Y при $X = x$ (x – определенное возможное значение X) называется произведение всех возможных значений Y на их условные вероятности.

$$M(Y / X = x) = \sum_{i=1}^m y_i p(y_i / x)$$

Для непрерывных случайных величин:

$$M(Y / X = x) = \int_{-\infty}^{\infty} y f(y / x) dy,$$

где $f(y/x)$ – условная плотность случайной величины Y при $X=x$.

Условное математическое ожидание $M(Y/x)=f(x)$ является функцией от x и называется **функцией регрессии X на Y .**

Пример. Найти условное математическое ожидание составляющей Y при $X = x_1 = 1$ для дискретной двумерной случайной величины, заданной таблицей:

Y	X			
	$x_1=1$	$x_2=3$	$x_3=4$	$x_4=8$
$y_1=3$	0,15	0,06	0,25	0,04
$y_2=6$	0,30	0,10	0,03	0,07

$$p(x_1) = 0,15 + 0,30 = 0,45$$

$$p(y_1 / x_1) = p(x_1, y_1) / p(x_1) = 0,15 / 0,45 = 1/3;$$

$$p(y_2 / x_1) = p(x_1, y_2) / p(x_1) = 0,30 / 0,45 = 2/3;$$

$$M(Y / X = x_1) = \sum_{j=1}^2 y_j p(y_j / x_1) = y_1 p(y_1 / x_1) + y_2 p(y_2 / x_1) = 3/3 + 12/3 = 5.$$

Аналогично определяются условная дисперсия и условные моменты системы случайных величин.

Зависимые и независимые случайные величины.

Случайные величины называются независимыми, если закон распределения одной из них не зависит от того какое значение принимает другая случайная величина.

Понятие зависимости случайных величин является очень важным в теории вероятностей.

Условные распределения независимых случайных величин равны их безусловным распределениям.

Определим необходимые и достаточные условия независимости случайных величин.

Теорема. *Для того, чтобы случайные величины X и Y были независимы, необходимо и достаточно, чтобы функция распределения системы (X, Y) была равна произведению функций распределения составляющих.*

$$F(x, y) = F_1(x)F_2(y)$$

Пример

Две независимые дискретные случайные величины X и Y заданы своими законами распределения вероятностей:

X	x_i	-2	1	4
	p_i	0,2	0,3	0,5

Y	y_j	-1	0	1	2	3
	p_j	0,3	0,1	0,2	0,3	0,1

Требуется:

1) Найти закон распределения вероятностей системы (X, Y) и вычислить $P(x < 0, y \geq 0)$, $P(x \geq 1, -1 < y < 2)$, $P(x \leq 4, y > 2)$.

2) Найти закон распределения вероятностей случайной величины $Z = X \cdot Y$, вычислить $M(Z)$, $D(Z)$ и вероятность того, что полученная СВ примет отрицательное значение.

3) Проверить справедливость равенства $M(XY) = M(X) \cdot M(Y)$

В последнем пункте сформулировано ещё одно свойство математического ожидания, которое справедливо **только для независимых** случайных величин.

1) Используя теоремы умножения вероятностей независимых и сложения несовместных событий, составим закон распределения системы (X, Y) :

X	Y				
	-1	0	1	2	3
-2	0,06	0,02	0,04	0,06	0,02
1	0,09	0,03	0,06	0,09	0,03
4	0,15	0,05	0,1	0,15	0,05

Суммируя вероятности по строкам, убеждаемся, что получается закон распределения случайной величины X , и, суммируя вероятности по столбцам, получаем в точности закон распределения Y .

Вычислим требуемые вероятности:

$$P(x < 0, y \geq 0) = 0,02 + 0,04 + 0,06 + 0,02 = 0,14$$

$$P(x \geq 1, -1 < y < 2) = 0,03 + 0,06 + 0,05 + 0,1 = 0,24$$

$$P(x \leq 4, y > 2) = 0,02 + 0,03 + 0,05 = 0,1$$

2) Найдём закон распределения случайной величины $Z = X \cdot Y$.

Начнём с наименьшего значения $z_1 = -2 \cdot 3 = -6$, которое даёт пара $(x_i; y_j) = (-2; 3)$.

Вероятности появления всех возможных комбинаций уже вычислены в предыдущем пункте:

$$p(1) = 0,02$$

Произведению $z_2 = -4$ соответствуют пары $(-2; 2), (4; -1)$. По теореме сложения несовместных событий:

$$p(2) = 0,06 + 0,15 = 0,21$$

Произведению $z_3 = -2$ соответствует пара $(-2; 1)$:

$$p(3) = 0,04$$

Произведению $z_4 = -1$ — пара $(1; -1)$:

$$p(4) = 0,09$$

Произведению $z_5 = 0$ соответствуют пары $(-2; 0), (1; 0), (4; 0)$:

$$p(5) = 0,02 + 0,03 + 0,05 = 0,1$$

Произведению $z_5 = 0$ соответствуют пары $(-2; 0)$, $(1; 0)$, $(4; 0)$:

$$p(5) = 0,02 + 0,03 + 0,05 = 0,1$$

Произведению $z_6 = 1$ – пара $(1; 1)$:

$$p(6) = 0,06$$

Произведению $z_7 = 2$ – пары $(-2; -1)$, $(1; 2)$:

$$p(7) = 0,06 + 0,09 = 0,15$$

Произведению $z_8 = 3$ – пара $(1; 3)$:

$$p(8) = 0,03$$

Произведению $z_9 = 4$ – пара $(4; 1)$:

$$p(9) = 0,1$$

Произведению $z_{10} = 8$ – пара $(4; 2)$:

$$p(10) = 0,15$$

и, наконец, произведению $z_{11} = 12$ – пара $(4; 3)$:

$$p(11) = 0,05$$

Закон распределения случайной величины $Z = XY$ сведём в 2 верхние строки расчётной таблицы, не забывая проконтролировать, что $\sum p(k) = 1$:

z_k	-6	-4	-2	-1	0	1	2	3	4	8	12	Суммы:
$p(k)$	0,02	0,21	0,04	0,09	0,1	0,06	0,15	0,03	0,1	0,15	0,05	1
$z_k \cdot p(k)$	-0,12	-0,84	-0,08	-0,09	0	0,06	0,3	0,09	0,4	1,2	0,6	1,52
$z_k^2 \cdot p(k)$	0,72	3,36	0,16	0,09	0	0,06	0,6	0,27	1,6	9,6	7,2	23,66

Математическое ожидание: $M(Z) = \sum z_k p(z_k) = 1,52$, дисперсия:

$$D(Z) = \sum z_k^2 p(k) - (M(Z))^2 = 23,66 - (1,52)^2 = 23,66 - 2,3104 = 21,3496$$

$P(z < 0) = 0,02 + 0,21 + 0,04 + 0,09 = 0,36$ – вероятность того, что случайная величина Z примет отрицательное значение.

3) Покажем справедливость равенства $M(XY) = M(X) \cdot M(Y)$.

$M(XY) = 1,52$ – вычислено в предыдущем пункте.

Вычислим матожидания исходных случайных величин:

$$M(X) = -2 \cdot 0,2 + 1 \cdot 0,3 + 4 \cdot 0,5 = -0,4 + 0,3 + 2 = 1,9$$

$$M(Y) = -1 \cdot 0,3 + 0 \cdot 0,1 + 1 \cdot 0,2 + 2 \cdot 0,3 + 3 \cdot 0,1 = -0,3 + 0 + 0,2 + 0,6 + 0,3 = 0,8$$

Таким образом:

$$1,52 = 1,9 \cdot 0,8$$

$1,52 = 1,52$ – получено верное равенство, что и требовалось проверить.

Теорема. Для того, чтобы случайные величины X и Y были независимы, необходимо и достаточно, чтобы плотность совместного распределения системы (X, Y) была равна произведению плотностей распределения составляющих.

$$f(x, y) = f_1(x)f_2(y)$$

Определение. Корреляционным моментом μ_{xy} случайных величин X и Y называется математическое ожидание произведения отклонений этих величин.

$$\text{cov}(X, Y) = \mu_{xy} = M\{[X - M(X)][Y - M(Y)]\}$$

Практически используются формулы:

Для дискретных случайных величин:

$$\mu_{xy} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m [x_i - M(X)][y_j - M(Y)]p(x_i, y_j)$$

Для непрерывных случайных величин:

$$\mu_{xy} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} [x - M(X)][y - M(Y)]f(x, y)dxdy$$

Корреляционный момент служит для того, чтобы охарактеризовать связь между случайными величинами. Если случайные величины независимы, то их корреляционный момент равен нулю.

Корреляционный момент имеет размерность, равную произведению размерностей случайных величин X и Y . Этот факт является недостатком этой числовой характеристики, т.к. при различных единицах измерения получаются различные корреляционные моменты, что затрудняет сравнение корреляционных

Для того, чтобы устранить этот недостаток применяется другая характеристика – коэффициент корреляции.

Определение. Коэффициентом корреляции r_{xy} случайных величин X и Y называется отношение корреляционного момента к произведению средних квадратических отклонений этих величин.

$$r_{xy} = \frac{\mu_{xy}}{\sigma_x \sigma_y}$$

Свойство: Абсолютная величина корреляционного момента двух случайных величин X и Y не превышает среднего геометрического их дисперсий.

$$|\mu_{xy}| \leq \sqrt{D_x D_y}$$

Свойство: Абсолютная величина коэффициента корреляции не превышает единицы.

$$|r_{xy}| \leq 1$$

Случайные величины называются **коррелированными**, если их корреляционный момент отличен от нуля, и **некоррелированными**, если их корреляционный момент равен нулю.

Если случайные величины независимы, то они и некоррелированы, но из некоррелированности нельзя сделать вывод о их независимости.

Если две величины зависимы, то они могут быть как коррелированными, так и некоррелированными.

Часто по заданной плотности распределения системы случайных величин можно определить зависимость или независимость этих величин.

Линейная регрессия.

Рассмотрим двумерную случайную величину (X, Y) , где X и Y – зависимые случайные величины.

Представим приближенно одну случайную величину как функцию другой. Точное соответствие невозможно. Будем считать, что эта функция линейная.

$$Y \cong g(X) = \alpha X + \beta$$

Для определения этой функции остается только найти постоянные величины α и β .

Определение. Функция $g(X)$ называется **наилучшим приближением** случайной величины Y в смысле метода наименьших квадратов, если математическое ожидание $M[Y - g(X)]^2$ принимает наименьшее возможное значение. Также функция $g(x)$ называется **среднеквадратической регрессией** Y на X .

Линейная средняя квадратическая регрессия Y на X вычисляется по

формуле: $g(X) = m_y + r \frac{\sigma_y}{\sigma_x} (X - m_x)$ $r = \mu_{xy} / (\sigma_x \sigma_y)$ – коэффициент корреляции
величин X и Y .

$$m_x = M(X), \quad m_y = M(Y), \quad \sigma_x = \sqrt{D(X)}, \quad \sigma_y = \sqrt{D(Y)},$$

Величина $\beta = r \frac{\sigma_y}{\sigma_x}$ называется **коэффициентом регрессии** Y на X .

Прямая, уравнение которой

$$y - m_y = r \frac{\sigma_y}{\sigma_x} (x - m_x),$$

называется **прямой сренеквадратической регрессии** Y на X .

Величина $\sigma_y^2(1 - r^2)$ называется **остаточной дисперсией** случайной величины Y относительно случайной величины X . Эта величина характеризует величину ошибки, образующейся при замене случайной величины Y линейной функцией $g(X) = \alpha X + \beta$.

Видно, что если $r = \pm 1$, то остаточная дисперсия равна нулю, и, следовательно, ошибка равна нулю и случайная величина Y точно представляется линейной функцией от случайной величины X .

Прямая среднеквадратичной регрессии X на Y определяется аналогично по формуле:

$$x - m_x = r \frac{\sigma_x}{\sigma_y} (y - m_y)$$

Прямые среднеквадратичной регрессии пересекаются в точке (m_x, m_y) , которую называют **центром совместного распределения** случайных величин X и Y .

Линейная корреляция.

Если две случайные величины X и Y имеют в отношении друг друга линейные функции регрессии, то говорят, что величины X и Y связаны **линейной корреляционной зависимостью**.

Теорема. *Если двумерная случайная величина (X, Y) распределена нормально, то X и Y связаны линейной корреляционной зависимостью.*

Закон больших чисел.

Неравенство Чебышева.

Рассмотрим дискретную случайную величину X (хотя все сказанное ниже будет справедливо и для непрерывных случайных величин), заданную таблицей распределения:

X	x_1	x_2	\dots	x_n
p	p_1	p_2	\dots	p_n

Требуется определить вероятность того, что отклонение значения случайной величины от ее математического ожидания будет не больше, чем заданное число ε .

Теорема. (Неравенство Чебышева) *Вероятность того, что отклонение случайной величины X от ее математического ожидания по абсолютной величине меньше положительного числа ε , не меньше чем $1 - D(X) / \varepsilon^2$.*

$$P(|X - M(X)| < \varepsilon) \geq 1 - D(X) / \varepsilon^2$$

Вероятность появления события A в каждом испытании равна $1/2$. Используя неравенство Чебышева, оценить вероятность того, что число X появлений события A заключено в пределах от 40 до 60, если будет произведено 100 независимых испытаний.

Решение. Найдем математическое ожидание и дисперсию дискретной случайной величины X — числа появлений события A в 100 независимых испытаниях:

$$M(X) = np = 100 \cdot 1/2 = 50; \quad D(X) = npq = 100 \cdot 1/2 \cdot 1/2 = 25.$$

Найдем максимальную разность между заданным числом появлений события и математическим ожиданием $M(X) = 50$:

$$e = 60 - 50 = 10.$$

Воспользуемся неравенством Чебышева в форме

$$P(|X - M(X)| < e) \geq 1 - D(X)/e^2.$$

Подставляя $M(X) = 50$, $D(X) = 25$, $e = 10$, получим

$$P(|X - 50| < 10) \geq 1 - 25/10^2 = 0,75.$$

Теорема Чебышева.

Теорема. Если X_1, X_2, \dots, X_n - попарно независимые случайные величины, причем дисперсии их равномерно ограничены (не превышаю постоянного числа C), то, как бы мало не было положительное число ε , вероятность неравенства

$$\left[\frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n} - \frac{M(X_1) + M(X_2) + \dots + M(X_n)}{n} \right] < \varepsilon$$

будет сколь угодно близка к единице, если число случайных величин достаточно велико.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P \left(\left| \frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n} - \frac{M(X_1) + M(X_2) + \dots + M(X_n)}{n} \right| < \varepsilon \right) = 1$$

Часто бывает, что случайные величины имеют одно и то же математическое ожидание. В этом случае теорема Чебышева несколько упрощается:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\left|\frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n} - m\right| < \varepsilon\right) = 1$$

Теорема утверждает, что хотя каждое отдельное значение случайной величины может достаточно сильно отличаться от своего математического ожидания, но среднее арифметическое этих значений будет неограниченно приближаться к среднему арифметическому математических ожиданий.

Отклоняясь от математического ожидания как в положительную так и в отрицательную сторону, от своего математического ожидания, в среднем арифметическом отклонения взаимно сокращаются.

Таким образом, величина среднего арифметического значений случайной величины уже теряет характер случайности.

Теорема Бернулли.

Пусть производится n независимых испытаний, в каждом из которых вероятность появления события A равно p .

Возможно определить примерно относительную частоту появления события A .

Теорема. *Если в каждом из n независимых испытаний вероятность p появления события A постоянно, то сколь угодно близка к единице вероятность того, что отклонение относительной частоты от вероятности p по абсолютной величине будет сколь угодно малым, если число испытаний n достаточно велико.*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(|m/n - p| < \varepsilon) = 1$$

Здесь m – число появлений события A . Из всего сказанного выше не следует, что с увеличением число испытаний относительная частота неуклонно стремится к вероятности p , т.е. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{m}{n} = p$. В теореме имеется в виду только вероятность приближения относительной частоты к вероятности появления события A в каждом испытании.

Предельные теоремы.

Как уже говорилось, при достаточно большом количестве испытаний, поставленных в одинаковых условиях, характеристики случайных событий и случайных величин становятся почти неслучайными. Это позволяет использовать результаты наблюдений случайных событий для предсказания исхода того или иного опыта.

Предельные теоремы теории вероятностей устанавливают соответствие между теоретическими и экспериментальными характеристиками случайных величин при большом количестве испытаний.

В рассмотренном выше законе больших чисел нечего не говорилось о законе распределения случайных величин.

Поставим задачу нахождения предельного закона распределения суммы $Y_n = \sum_{i=1}^n X_i$ когда число слагаемых n неограниченно возрастает. Эту задачу решает

Центральная предельная теорема Ляпунова.

Теорема. *Если случайная величина X представляет собой сумму очень большого числа взаимно независимых случайных величин, влияние каждой из которых на всю сумму ничтожно мало, то X имеет распределение, близкое к нормальному.*

На практике для большинства случайных величин выполняются условия теоремы Ляпунова.

Допустим, что случайные величины X_i взаимно независимы и одинаково распределены.

Теорема. Если случайные величины X_i взаимно независимы и имеют один и тот же закон распределения с математическим ожиданием m и дисперсией σ^2 , причем существует третий абсолютный момент ν_3 , то при неограниченном увеличении числа испытаний n закон распределения суммы $Y_n = \sum_{i=1}^n X_i$ неограниченно приближается к нормальному.

Абсолютным центральным моментом случайной величины X порядка n называют математическое ожидание $|X - a|^n$

$$M(|X - a|^n)$$

Случайные величины X_i , рассмотренные в центральной предельной теореме, могут обладать произвольными распределениями вероятностей.

Если все эти случайные величины одинаково распределены, дискретны и принимают только два возможных значения 0 или 1, то получается простейший случай центральной предельной теоремы, известный как **теорема Муавра – Лапласа**.

Теорема. (Теорема Муавра – Лапласа) *Если производится n независимых опытов, в каждом из которых событие A появляется с вероятностью p , то для любого интервала (α, β) справедливо соотношение:*

$$P\left(\alpha < \frac{Y - np}{\sqrt{npq}} < \beta\right) = \Phi(\beta) - \Phi(\alpha)$$

где Y – число появлений события A в n опытах, $q = 1 - p$, $\Phi(x)$ – [функция Лапласа](#),

Теорема Муавра – Лапласа описывает поведение биномиального распределения при больших значениях n .