Теоретическая механика

Часть 1

Кинематика

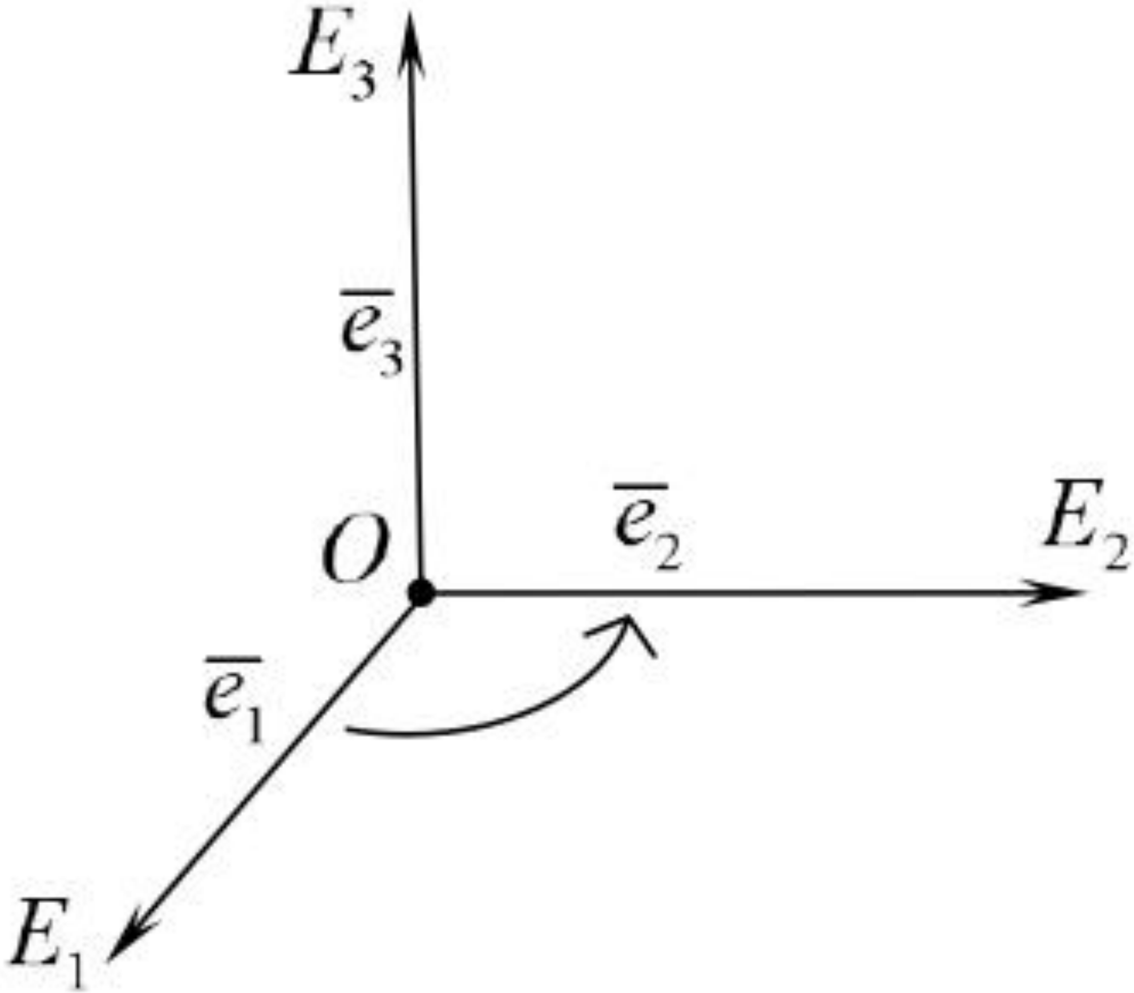
Глава 1. Основные понятия и задачи кинематики

(продолжение)

§ 3. Закон движения, скорость, ускорение, траектория

Рассмотрим ДСО $S = (O, E_1, E_2, E_3)$ и отмеченную точку A, движущуюся относительно S.

$$r_{OA} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$ – арифметический радиус-вектор точки A в ДСО S.


E_3
$\overline{e}_3$
O
$\overline{e}_2$
E_2
$\overline{e}_1$
E_1

Пусть известны функции $f_x(t),\ f_y(t),\ f_z(t),$ выражающие зависимость координат точки A от времени t:

$$x = f_x(t),\quad y = f_y(t),\quad z = f_z(t). \qquad (3.1)$$

Рассмотрим вектор-функцию $r(t) = \begin{pmatrix} f_x(t) \\ f_y(t) \\ f_z(t) \end{pmatrix}.$

Система уравнений (3.1) равносильна уравнению

$$r_{OA} = r(t), \qquad (3.2)$$

которое называется ***законом движения*** *точки* A *относительно ДСО* S.

Скорость v и ***ускорение*** w точки A в момент t относительно ДСО S определяются равенствами:

$$v := \dot{r}(t) \left(= \frac{dr(t)}{dt} \right), \; w := \ddot{r}(t) \left(= \frac{d^2 r(t)}{dt^2} \right).$$

Множество

$$\mathcal{T} = \{ r(t) : t \in (\alpha, \beta) \}$$

называется ***арифметической траекторией*** данной точки (относительно ДСО S)

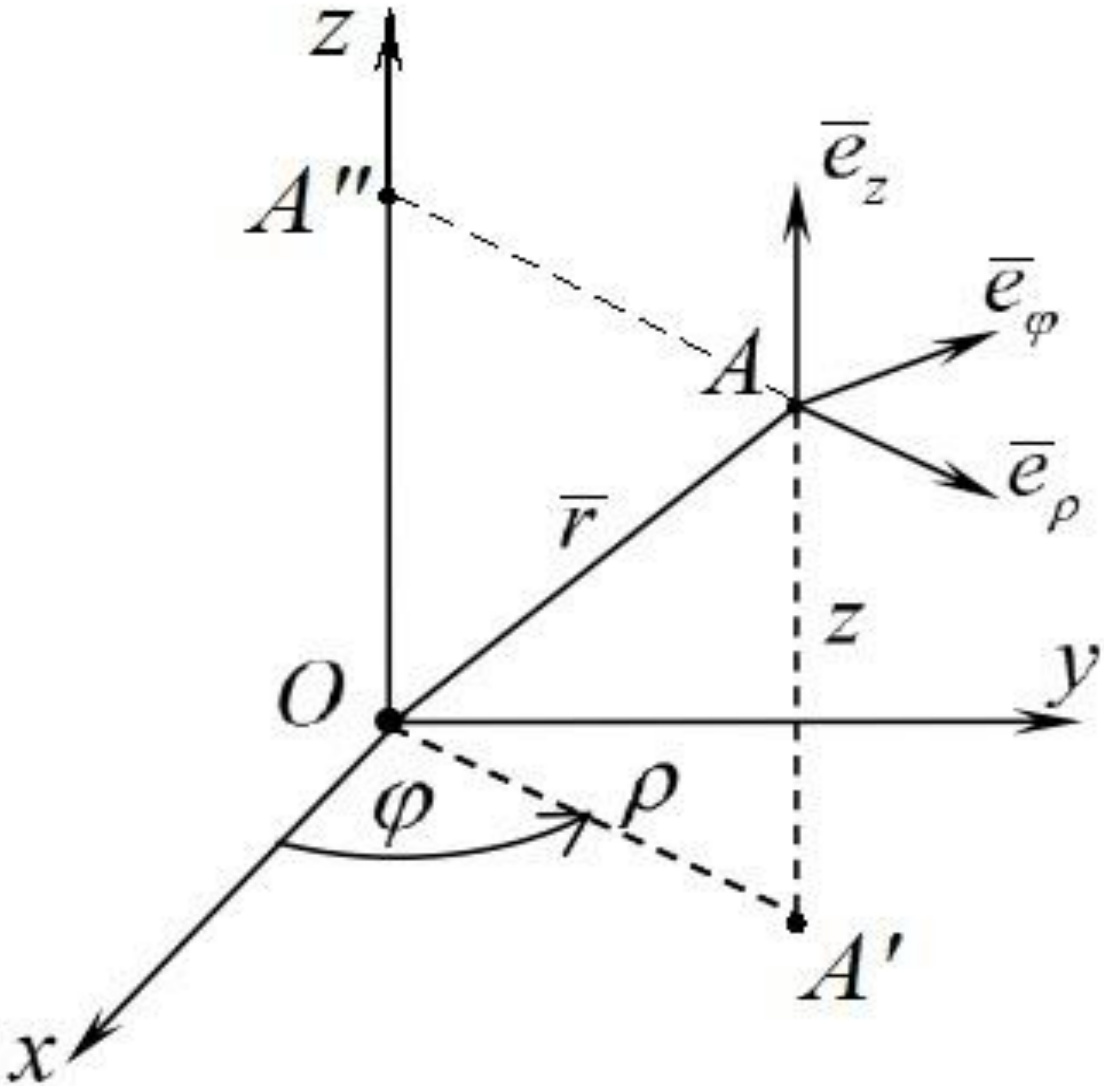
((α, β) – некоторый промежуток времени).

Геометрическое место последовательных положений движущейся точки называется ее ***геометрической траекторией***.

Замечание о направлении вектора скорости. Геометрический вектор скорости, координатное представление которого равно $\dot{r}(t) = \begin{pmatrix} \dot{f}_x(t) \\ \dot{f}_y(t) \\ \dot{f}_z(t) \end{pmatrix}$, является *касательным вектором* к геометрической траектории точки.

§ 4. Цилиндрическая система координат.

Рассмотрим декартову систему отсчета $S=(O,E_1,E_2,E_3)$ и связанную с ней ПДСК $Oxyz$. Пусть A – произвольная точка в абсолютном пространстве E^3, A' – проекция точки A на плоскость Oxy, A'' – проекция точки A на ось Oz, φ – направленный угол между осью Oz и вектором $\overline{OA'}$ (см. рис.).


z
A''
$\bar{e}_z$
$\bar{e}_\varphi$
A
$\bar{e}_\rho$
$\bar{r}$
z
y
O
φ
ρ
A'
x

Тогда верно равенство $\overline{OA} = \overline{OA'} + \overline{OA''}$, которое, при переходе к соответствующим арифметическим векторам, приобретает вид

$$r = r_{OA} = r_{OA'} + r_{OA''} . \tag{4.1}$$

Введем следующие обозначения : $\rho := |\, OA' \,|$,

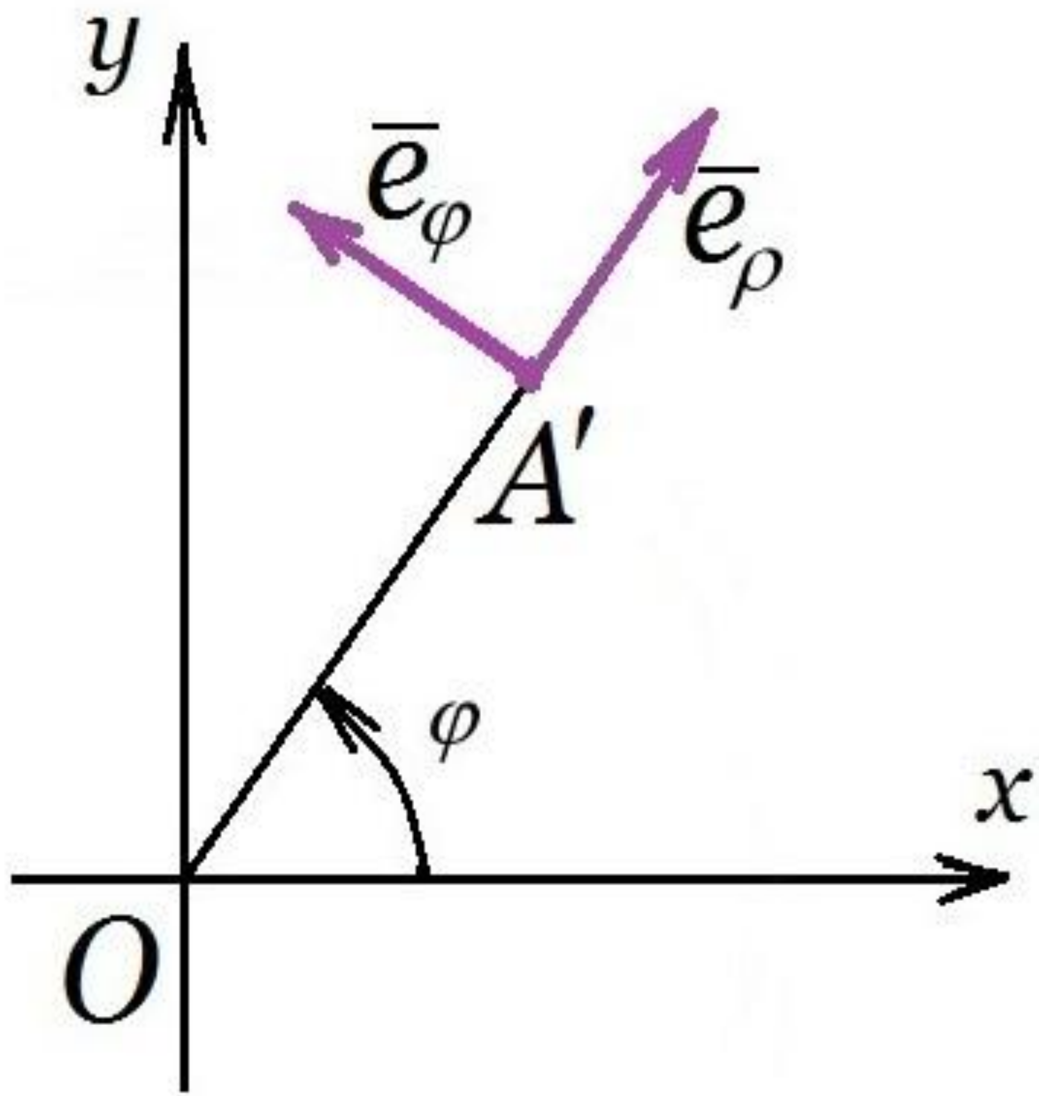
$$e_\rho := \rho^{-1} r_{OA'} = \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \\ 0 \end{pmatrix}, \quad e_z := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Тогда $r_{OA'} = \rho e_\rho$, $r_{OA''} = z e_z$. Следовательно, в силу (4.1),

$$r = r_{OA} = \rho e_\rho + z e_z. \tag{4.2}$$

Цилиндрическими координатами точки A по отношению к декартовой системе отсчета S называется упорядоченная тройка (ρ, φ, z).

Рассмотрим еще один вектор: $e_\varphi := \begin{pmatrix} \cos\left(\varphi + \frac{\pi}{2}\right) \\ \sin\left(\varphi + \frac{\pi}{2}\right) \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin\varphi \\ \cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix}$. Соответствующий геометрический вектор $\bar{e}_\varphi$ получается из $\bar{e}_\rho$ поворотом на прямой угол против часовой стрелки.


y
$\bar{e}_\varphi$
$\bar{e}_\rho$
A'
φ
x
O

Заметим, что построенные выше *векторы* $\overline{e}_{\rho}$, $\overline{e}_{\varphi}$, $\overline{e}_{z}$ *образуют правый ортонормированный базис* (в пространстве геометрических (свободных) векторов V^3). В силу зависимости векторов $\overline{e}_{\rho}$ и $\overline{e}_{\varphi}$ от угла φ, этот базис является *подвижным*.

Арифметические векторы e_{ρ}, e_{φ}, e_{z} образуют правый ортонормированный базис в арифметическом пространстве $\mathbb{R}^3$.

Пусть движение точки A задано в цилиндрической системе координат:

$$\rho = \rho(t), \quad \varphi = \varphi(t), \quad z = z(t). \tag{4.3}$$

Заметим, что при дифференцировании по переменной t имеют место следующие соотношения:

$$\dot{e}_\rho = \dot{\varphi} e_\varphi, \quad \dot{e}_\varphi = -\dot{\varphi} e_\rho. \tag{4.4}$$

Выразим скорость и ускорение точки через цилиндрические координаты ρ, φ, z и векторы $e_\rho,\ e_\varphi,\ e_z$:

$$v = \dot{r} = \frac{d}{dt}(\rho e_\rho + z e_z) = \dot{\rho} e_\rho + \rho\dot{\varphi} e_\varphi + \dot{z} e_z, \qquad (4.5)$$

$$w = \dot{v} = (\ddot{\rho} - \rho\dot{\varphi}^2) e_\rho + (2\dot{\rho}\dot{\varphi} + \rho\ddot{\varphi}) e_\varphi + \ddot{z} e_z. \qquad (4.6)$$

Поскольку векторы $e_\rho,\ e_\varphi,\ e_z$ образуют правый ортонормированный базис, квадраты длин векторов v и w можно вычислить как суммы квадратов коэффициентов в разложениях (4.5), (4.6).

§ 5. Три частных случая.

1. Движение по поверхности цилиндра постоянного радиуса : $\rho = const = \rho_0 \;\Rightarrow$

$$\Rightarrow\; v = \rho_0 \dot{\varphi} e_\varphi + \dot{z} e_z\,, \quad w = -\rho_0 \dot{\varphi}^2 e_\rho + \rho_0 \ddot{\varphi} e_\varphi + \ddot{z} e_z$$

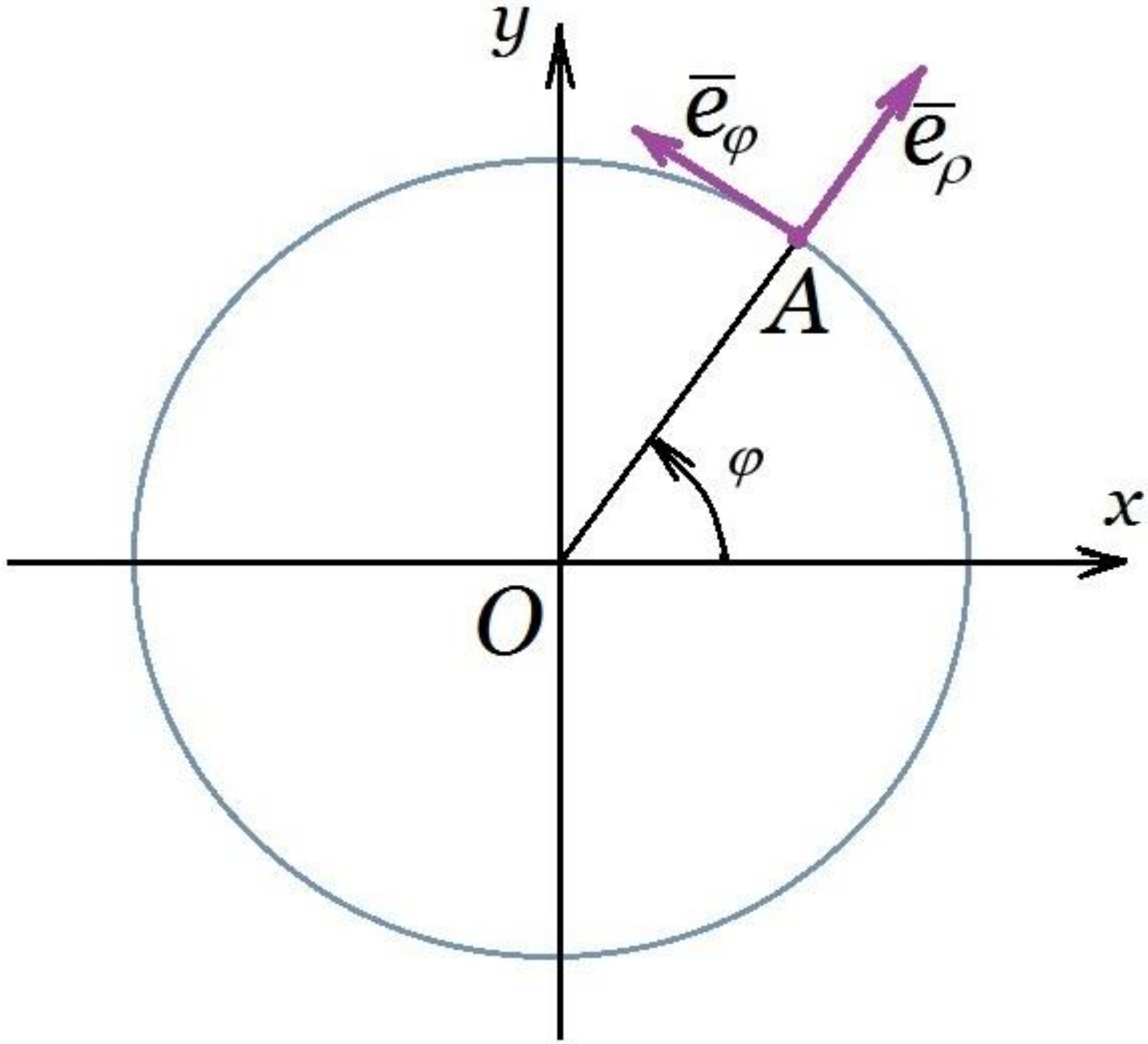
(см. (4.5), (4.6)).

2. **Движение по окружности** : $\rho = \rho_0, z = 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow v = \rho_0 \dot{\varphi} e_\varphi, \qquad w = -\rho_0 \dot{\varphi}^2 e_\rho + \rho_0 \ddot{\varphi} e_\varphi$$

Величина $w_\rho = -\rho_0 \dot{\varphi}^2$ (проекция вектора ускорения на направление e_ρ) называется *радиальным ускорением*.

Величина $w_\varphi = \rho_0 \ddot{\varphi}$ (проекция вектора ускорения на направление e_φ) называется *тангенциальным* (или *касательным*) *ускорением*.



y
$\bar{e}_\varphi$
$\bar{e}_\rho$
A
φ
x
O

Вектор $-\rho_0\dot{\varphi}^2 e_\rho$ называется *центростремительным* (или *нормальным*) *ускорением*.

Величины $\omega = \dot{\varphi}$ и $\varepsilon = \ddot{\varphi}$ называются, соответственно, *угловой скоростью* и *угловым ускорением* данной точки (единицы измерения – $(1/c)$ и $(1/c^2)$).

3. Движение по окружности с постоянной угловой скоростью: $\rho = \rho_0,\ z = 0,$

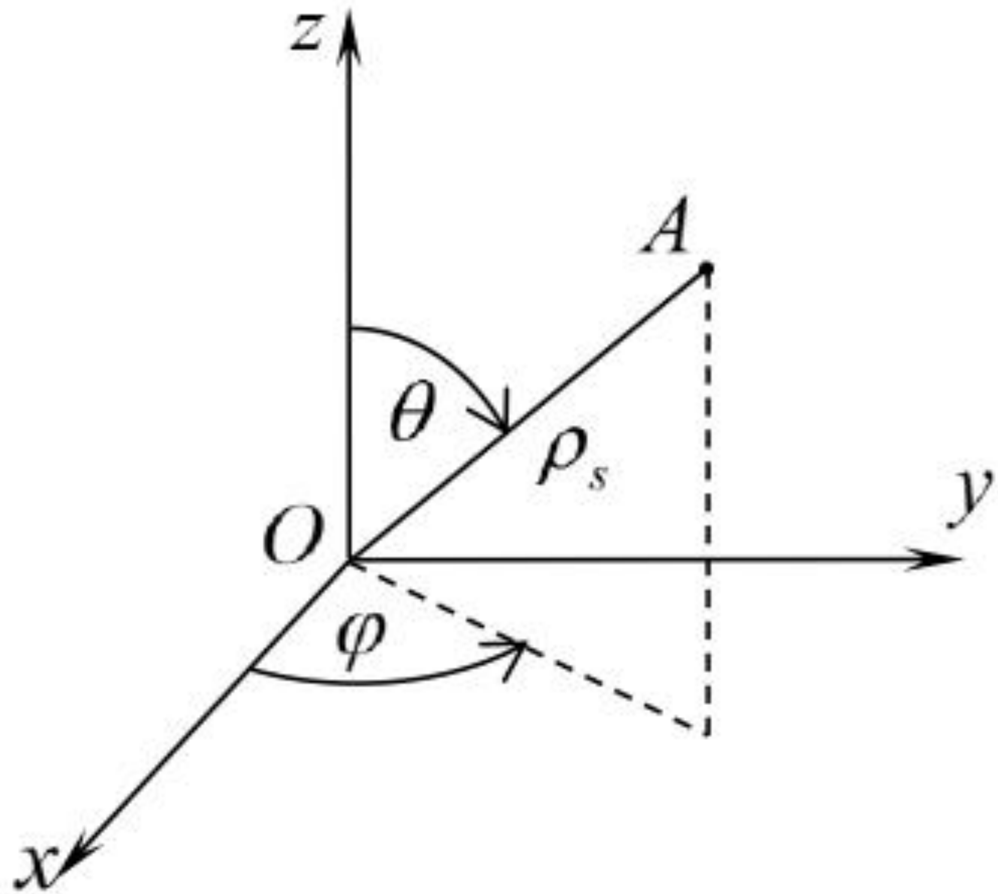
$$\dot{\varphi} = const = \omega_0$$

$$\Rightarrow\ v = \rho_0 \omega_0 e_\varphi, \quad w = -\rho_0 \omega_0^2 e_\rho\,.$$

§ 6. Сферическая система координат.

Сферическими координатами точки A по отношению к декартовой системе отсчета S называется тройка $(\rho_s, \theta, \varphi)$. Чтобы вычислить скорость и ускорение точки, движение которой задано в сферических координатах, можно перейти к декартовым координатам:

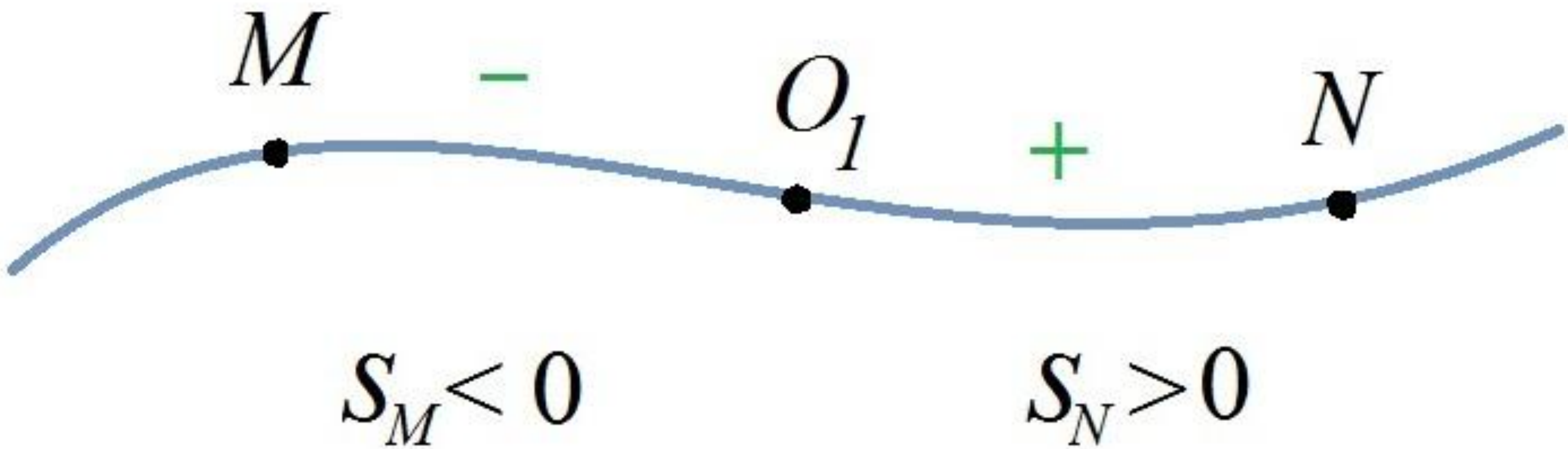
$$r = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho_s \cos\varphi \sin\theta \\ \rho_s \sin\varphi \sin\theta \\ \rho_s \cos\theta \end{pmatrix}.$$



z
A
θ
ρ_s
y
O
φ
x

§ 7. Естественный способ задания движения точки.

Пусть точка A движется в пространстве E^3 относительно ДСО $S = (O, E_1, E_2, E_3)$. И пусть задана кривая (геометрическая траектория), по которой движется точка A (относительно S). Для определения положения точки A на ее траектории возьмем произвольную точку O_1 за начало отсчета дуг и зададим положительное направление отсчета.


M
−
O_1
+
N
$S_M < 0$
$S_N > 0$

Каждому положению точки A поставим в соответствие свою *дуговую координату* s, аналогично тому, как на прямолинейной оси каждой точке отвечает своя абсцисса. Величина s будет положительной или отрицательной в зависимости от направления отсчета дуг; при этом длина дуги O_1A равна $|s|$. Если $s(t)$ — известная функция времени, то движение точки A задано.

Уравнение

$$s = s(t)$$

называется *законом движения точки* A *по данной траектории.*

Такой способ задания движения точки называется *естественным*.

Пример. Рассмотрим движение точки A по винтовой линии.

Уравнения движения точки A:

$x = a\cos kt,\;\; y = a\sin kt,\; z = bt$ (t – время).

Начало отсчета – точка $O_1(a,\ 0,\ 0)$

($A = O_1$ в начальный момент $t = 0$).

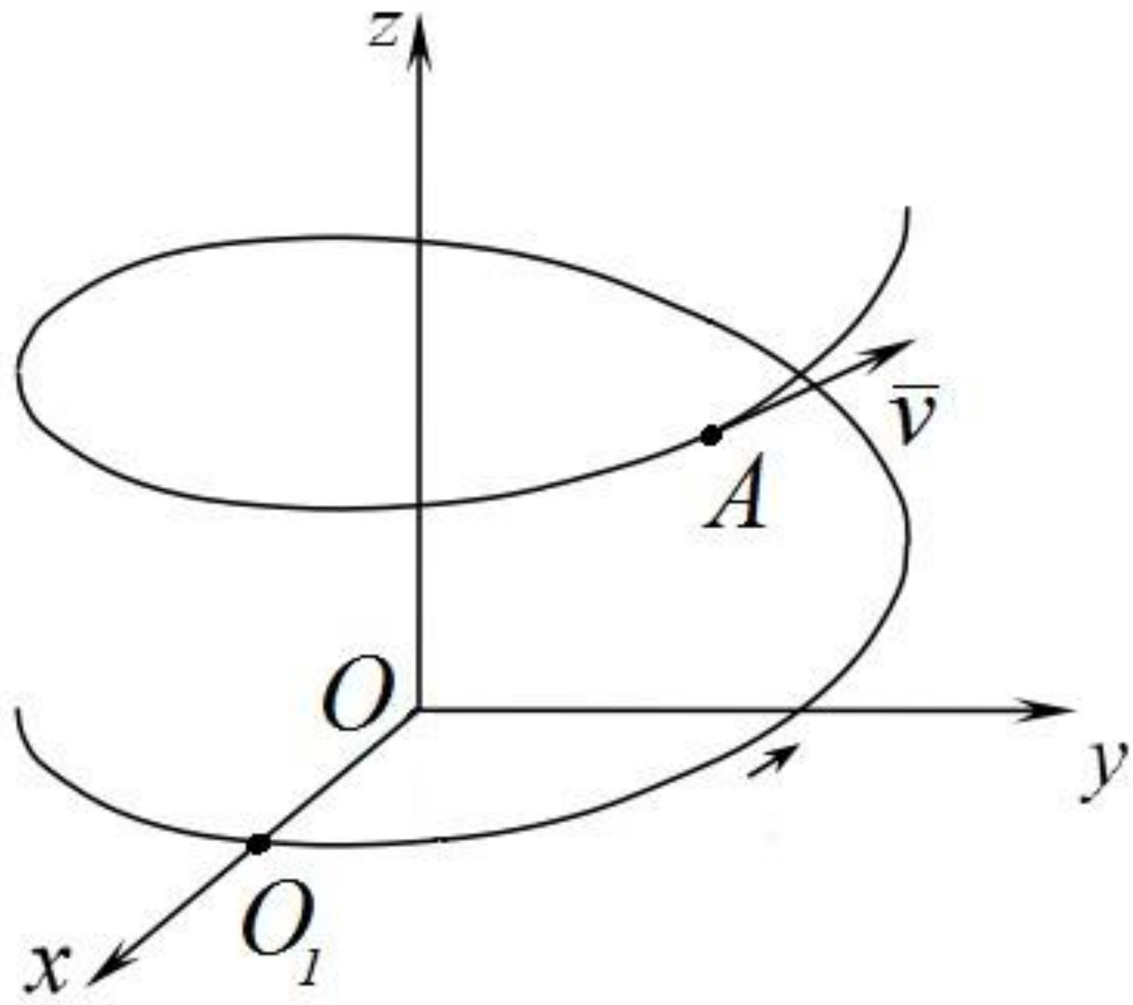
Тогда $s(t) = \int\limits_0^t \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}\, d\tau =$

$$= \int\limits_0^t \sqrt{a^2k^2 \sin^2 k\tau + a^2k^2 \cos^2 k\tau + b^2}\, d\tau =$$

$= \int\limits_0^t \sqrt{a^2k^2 + b^2}\, d\tau = \sqrt{a^2k^2 + b^2} \cdot t$, то есть закон

движения точки A по винтовой линии имеет

вид $s = \sqrt{a^2k^2 + b^2} \cdot t$.


z
y
x
O
O_1
A
$\bar{v}$