Реферат

на тему

Уравнения и неравенства в целых числах

1. Соображения делимости

2. Метод разложения на множители

3. Графический метод решения

4. Метод решения уравнения относительно одного из неизвестных

5. Метод перебора

Соображения делимости

Найти целые положительные решения уравнения

$2x^2 + 2xy - x + y = 112.$

Решение. Данное уравнение линейно относительно y:

$y(2x + 1) = 112 + x - 2x^2.$ Так как $x, y \in \mathbf{N}$, то $2x + 1 \neq 0$, поэтому:

$$y = \frac{112 + x - 2x^2}{2x+1};$$

$$y = \frac{112 + x - 2x^2 + 2x - 2x}{2x+1};$$

$$y = \frac{112 + 2x - (2x^2 + x)}{2x+1};$$

$$y = \frac{112 + 2x - x(2x+1)}{2x+1};$$

$$y = -x + \frac{2x+1+111}{2x+1};$$

$$y = -x + 1 + \frac{111}{2x+1};$$

$$111 \vdots (2x+1) \Rightarrow \left[\begin{array}{l} 2x+1=1, \\ 2x+1=3, \\ 2x+1=37, \\ 2x+1=111; \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=0, \\ y=112, \end{cases} \\ \begin{cases} x=1, \\ y=37, \end{cases} \\ \begin{cases} x=18, \\ y=-14, \end{cases} \\ \begin{cases} x=55, \\ y=-53. \end{cases} \end{array}\right.$$

После проверки получаем одно целое положительное решение $x = 1$, $y = 37$.

Ответ: (1; 37).

Метод разложения на множители

Найти все целые числа m и n такие, что
$2mn + 3m = 10$ и $m + n \geq 5$.

Решение. Из первого условия следует, что $m(2n + 3) = 10$, причём m – целое, а $2n + 3$ – целое и нечётное.
Следовательно, возможны следующие варианты:

1. $\begin{cases} m = 2, \\ 2n + 3 = 5; \end{cases} \begin{cases} m = 2, \\ n = 1; \end{cases} \Rightarrow m + n = 3 < 5$ – не удовлетворяет второму условию;

2. $\begin{cases} m = -2, \\ 2n + 3 = -5; \end{cases} \begin{cases} m = -2, \\ n = -4; \end{cases} \Rightarrow m + n = -6 < 5$ – не удовлетворяет второму условию;

3. $\begin{cases} m = 10, \\ 2n + 3 = 1; \end{cases} \begin{cases} m = 10, \\ n = -1; \end{cases} \Rightarrow m + n = 9 > 5$ – верно;

4. $\begin{cases} m = -10, \\ 2n + 3 = -1; \end{cases} \begin{cases} m = -10, \\ n = -2; \end{cases} \Rightarrow m + n = -12 < 5$ – не удовлетворяет второму условию.

Ответ: $m = 10$, $n = -1$.

Графический метод решения

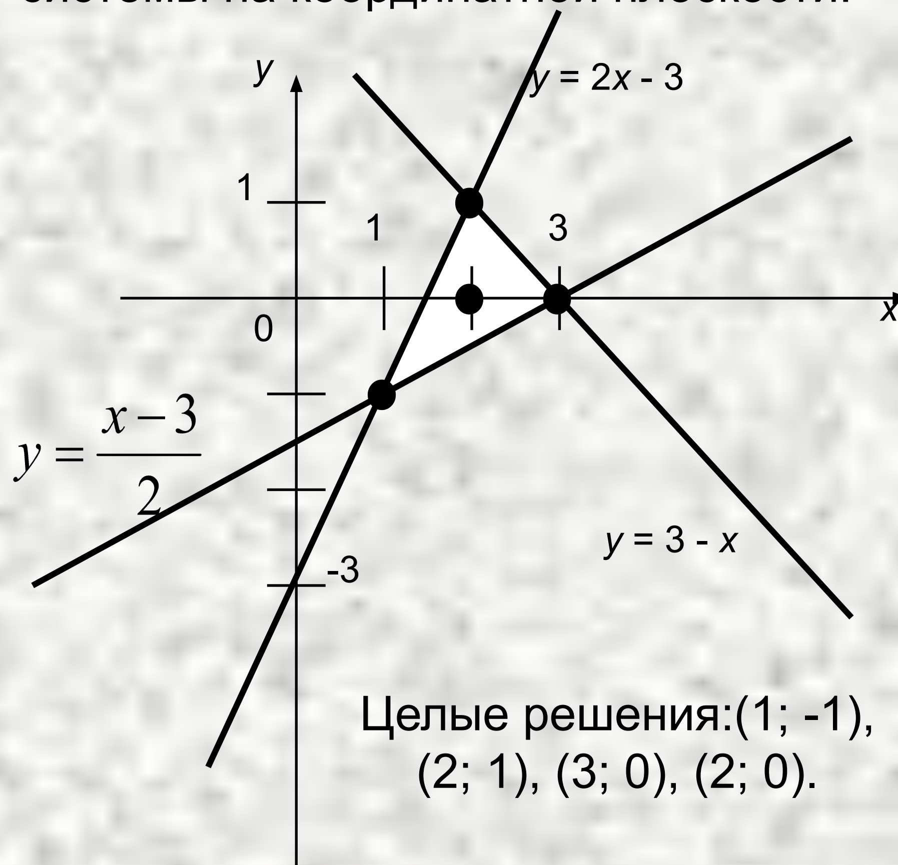
Найти все целочисленные пары (x; y), удовлетворяющие уравнению

$$\sqrt{2x-y-3}+\sqrt{2y-x+3}=2\sqrt{3-x-y}.$$

Решение. Найдём сначала все целые допустимые пары:

$$\begin{cases} 2x-y-3\geq 0, \\ 2y-x+3\geq 0, \\ 3-x-y\geq 0; \end{cases} \quad \begin{cases} y\leq 2x-3, \\ y\geq \dfrac{x-3}{2}, \\ y\leq 3-x. \end{cases}$$

Изобразим множество решений последней системы на координатной плоскости:



Целые решения:(1; -1), (2; 1), (3; 0), (2; 0).

Проверим эти решения, подставляя их в исходное уравнение:

1. $\sqrt{2\cdot 1-(-1)-3}+\sqrt{2\cdot(-1)-1+3}=2\sqrt{3-1-(-1)},$

$0=2\sqrt{3}$ - не верно;

2. $\sqrt{2\cdot 2-1-3}+\sqrt{2\cdot 1-2+3}=2\sqrt{3-2-1},$

$\sqrt{3}=0$ - не верно;

3. $\sqrt{2\cdot 3-0-3}+\sqrt{2\cdot 0-3+3}=2\sqrt{3-3-0},$

$\sqrt{3}=0$ - не верно;

4. $\sqrt{2\cdot 2-0-3}+\sqrt{2\cdot 0-2+3}=2\sqrt{3-2-0},$

$1+1=2$ - верно.

Ответ: (2; 0).

Графический метод решения

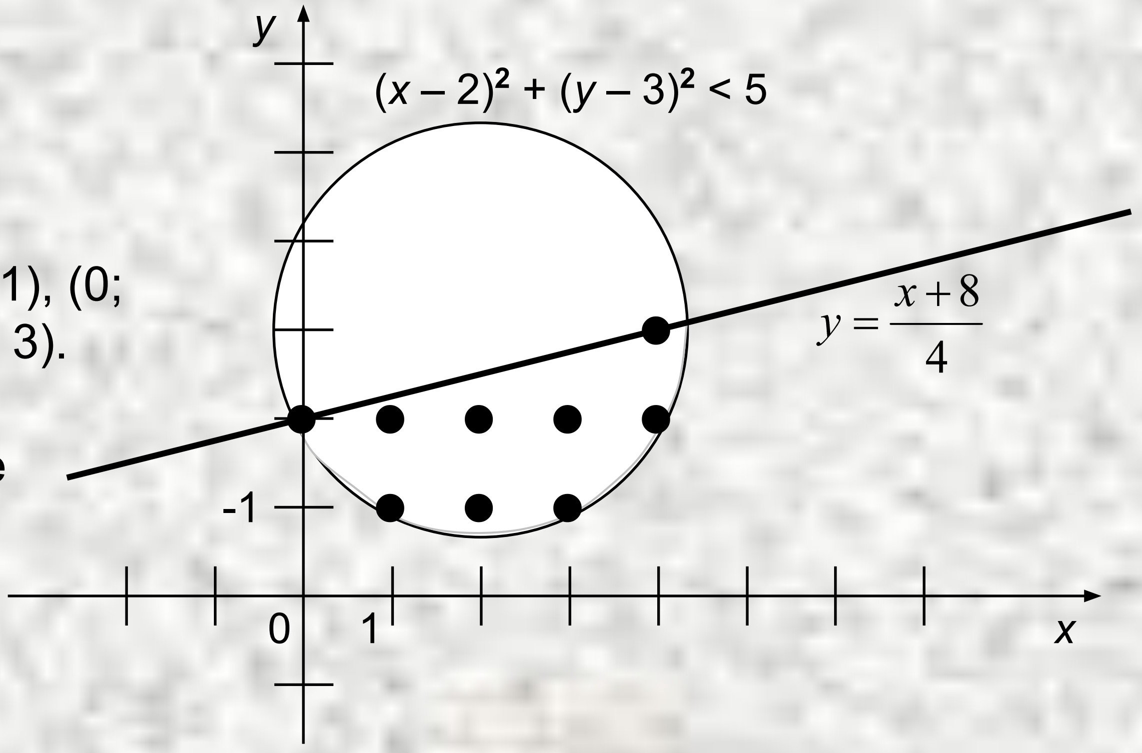
Найти все целочисленные решения системы

$$\begin{cases}(x-2)^2+(y-3)^2<5,\\ 4y\le x+8.\end{cases}$$

Решение. Найдем все целые допустимые пары:

$$\begin{cases}(x-2)^2+(y-3)^2<5,\\ y\le \dfrac{x+8}{4}.\end{cases}$$

Изобразим множество решений системы на координатной плоскости:



Целые решения: (1; 1), (2; 1), (3; 1), (0; 2), (1; 2), (2; 2), (3; 2), (4; 2), (4; 3).

Точки (0; 2), (1; 1), (3; 1), (4; 2) не удовлетворяют первому неравенству системы, так как лежат на окружности.

Ответ: (1; 2), (2; 1), (2; 2), (3; 2), (4; 3).

Метод решения уравнения относительно одного из неизвестных

Найти все целочисленные решения уравнения

$2x^2 – xy – 3y^2 = 7.$

Решение. Рассмотрим уравнение как квадратное относительно x, тогда D = $25y^2 + 56$. Так как нас интересуют целочисленные решения, то

$$25y^2 + 56 = K^2;$$

$$(K – 5y)(K + 5y) = 56.$$

Рассмотрим все варианты разложения числа 56 на целые множители:

$$56 = 2 \times 28;$$
$$56 = -2 \times (-28);$$
$$56 = 7 \times 8;$$
$$56 = -7 \times (-8);$$
$$56 = 4 \times 14;$$
$$56 = -4 \times (-14).$$

В итоге получим, что целые решения имеют две системы:

1) $\begin{cases} K - 5y = 4, \\ K + 5y = 14; \end{cases} \Rightarrow y = 1;$

2) $\begin{cases} K - 5y = -4, \\ K + 5y = -14; \end{cases} \Rightarrow y = -1.$

Подставляя эти значения в исходное уравнение, имеем:

$\begin{cases} x_1 = -2, \\ y_1 = 1; \end{cases}$ $\begin{cases} x_2 = 2, \\ y_2 = -1. \end{cases}$

Ответ: (-2; 1), (2; -1).

Метод перебора

Найти все целочисленные решения системы

$$\begin{cases} (x-3)^2 + (y-4)^2 < 5, \\ 4y \le x + 11. \end{cases} \qquad (1)$$

Решение. Первое неравенство задаёт внутренность круга радиуса $\sqrt{5}$ с центром в точке (3; 4) и

$$\begin{cases} (x-3)^2 < 5, \\ (y-4)^2 < 5; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} |x-3| < \sqrt{5}, \\ |y-4| < \sqrt{5}. \end{cases}$$

С учётом целочисленности x и y имеем:

$$1 \le x \le 5 \text{ и } 2 \le y \le 6.$$

Разрешим второе неравенство системы сначала относительно y:

$$y \le \frac{x+11}{4}; \; y \le \frac{16}{4} = 4; \qquad (2)$$

то есть $2 \le y \le 4$.

Затем относительно x:

$$x \ge 4y - 11. \qquad (3)$$

1. Пусть $y = 2$, тогда из (1) следует, что $(x-3)^2 < 1 \Leftrightarrow |x-3| < 1$;

$-1 < x - 3 < 1; \quad 2 < x < 4.$

Целочисленное решение есть: $x = 3$. Оно удовлетворяет и (3).

2. Если $y = 3$, тогда из (1) следует, что $(x-3)^2 < 4 \Leftrightarrow |x-3| < 2$;

$-2 < x - 3 < 2; \quad 1 < x < 5.$

Таким образом, получаем решения $x \in \{2;3;4\}$, и все они удовлетворяют (3).

3. При $y = 4$ из (1) следует, что $|x-3| < \sqrt{5}$, то есть $1 \le x \le 5$.

Неравенство (3) приводит при этом к ограничению $x \ge 5$. Таким образом, имеем одно решение $x = 5$.

Ответ: (3; 2), (2; 3), (3; 3), (4; 3), (5; 4).

Универсальных методов для решения уравнений и неравенств в целых числах не существует.

Чтобы решить в целых числах неравенство или уравнение, необходимо применить метод, подходящий для данного конкретного случая.