ДИСКРЕТНО-СТОХАСТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ (P-схемы)

Р-схемы

Определение: ***В****ероятностный автомат* [англ., probabilistic automat) (**ВА**)

- это дискретный потактный преобразователь информации с памятью, функционирование которого в каждом такте зависит только от состояния памяти нем и может быть описано статистически.

Р-схемы

Схемы вероятностных автоматов применяются:

- в проектировании дискретных систем, проявляющих статистически закономерное случайное поведение;
- в определении алгоритмических возможностей систем;
- в обосновании границ целесообразности их использования;
- в решении задач синтеза по выбранному критерию дискретных стохастических систем, удовлетворяющих заданным ограничениям.

Математическое понятие *Р-автомата* формируется на понятиях, введенных для *F-автомата.*

Р-схемы

Пусть множество G, элементами которого являются всевозможные пары (x_i, z_s) где x_i и z_s — элементы входного подмножества X и подмножества состояний Z соответственно $(x_i \in X, z_s \in Z)$. Если существуют две такие функции ψ и φ, то с их помощью осуществляются отображения $G \longrightarrow Z$ и $G \longrightarrow Y$, то говорят, что $F = < Z, X, Y, \varphi, \psi >$ (1) определяет конечный автомат детерминированного типа.

Р-схемы

Введем более общую математическую схему. Пусть Ф — множество всевозможных пар вида (*z_k*, *y_j*), где *y_j* — элемент выходного подмножества *Y*, т.е. $y_j \in Y$

Пусть в любой элемент множества *G* индуцирует на множестве Ф некоторый закон распределения следующего вида:

Р-схемы

Таблица 1. Закон распределения

Элементы из Ф	••	(z_1, y_1)	••	(z_1, y_2)	••	(z_K, y_{J-1})	(z_K, y_J)
(z_k, y_j)	••	b_{11}		b_{12}		$b_{k(j-1)}$	B_{kj}

Р-схемы

При этом $\sum_{k=1}^{K}\sum_{j=1}^{J} b_{kj} = 1$, (2) где b_{kj} — вероятности перехода автомат в состояние z_k и выдаче на выходе сигнала y_j, если автомат был в состоянии z_s, и на его вход в момент времени поступил сигнал x_i.

*Число таких распределений, представленных в виде таблиц, равно числу элементов множества **G**.*

Обозначим множество этих таблиц через B. Тогда четверка элементов $P = \langle Z, X, Y, B \rangle$ (3) называется вероятностным автоматом (Р-автоматом).

Р-схемы

Вероятностный автомат Мили

Пусть элементы множества *G* индуцируют некоторые законы распределения на подмножествах *Y* и Z, которые можно представить соответственно в виде:

P-схемы. Вероятностный автомат Мили

Таблица 2. Законы распределения

Элементы из Y	•••	y_1	y_2	•••	Y_{J-1}	y_J
$(x_i z_s)$	•••	q_1	q_2	•••	q_{J-1}	q_J
Элементы из Z	•••	z_1	z_2	•••	z_{K-1}	z_K
$(x_i z_s)$	•••	ν_1	ν_2	•••	ν_{K-1}	ν_K

Р-схемы. Вероятностный автомат Мили

При этом $\sum_{k=1}^{K} z_k = 1$ и $\sum_{k=1}^{K} v_k = 1$ (4)— вероятности перехода *Р-автомата* в состояние z_k и выдачи выходного сигнала y_k при условии, что *Р-автомат* находился в состоянии z_s и на его вход поступил входной сигнал x_t.

Р-схемы. Вероятностный автомат Мили

Если для всех *k* и *j* имеет место соотношение $v_k z_i = b_{kj}$ (5), то такой автомат называется ***вероятностным автоматом Мили.*** Представленное требование означает выполнение условия **независимости** распределений для нового состояния ***Р-автомата*** и его выходного сигнала.

Вероятностный автомат <u>Мура</u>

Пусть выходной сигнал Р-автомата зависит лишь от того состояния, в котором <u>находится</u> автомат в <u>данном</u> <u>такте</u> работы, каждый элемент выходного подмножества Y индуцирует распределение вероятностей выходов, имеющее следующий вид:

Р-схемы. Вероятностный автомат Мура

Таблица 3. Распределение вероятностей

Элементы из Ф	•••	y_l	y_2	•••	y_{k-1}	y_k
(z_k, y_j)	•••	s_1	S_2	•••	S_{I-1}	S_I

Р-схемы. Вероятностный автомат Мура

Здесь $\sum_{i=1}^{I} S_i = 1$, (6) где S_i, — вероятность появления сигнала на выходе y_i при условии, что *Р-автомат* находился в состоянии z_k.

Р-схемы. Вероятностный автомат Мура

Частным случаем Р-автомата являются автоматы, у которых либо переход в новое состояние, либо выходной сигнал определяются детерминировано. Такой автомат называется Y-детерминированным вероятностным автоматом.

Р-схемы. Вероятностный автомат Мура

Если состояние Р-автомата определяется детерминировано, то такой автомат называется *Z-детерминированным вероятностным автоматом.*

Аналогично, Z-детерминированным вероятностным автоматом называется Р-автомат, у которого выбор нового состояния является детерминированным.

Рассмотрим пример

У-детерминированного Р-автомата

Пусть У-детерминированный Р-автомат, задан таблицей переходов : где p_{ij} – вероятность перехода автомата из состояния z_i в состояние z_j $\sum_{j=1}^{K} p_{ij} = 1$ Можем записать (7)

Пример. У-детерминированного Р-автомата

Таблица 4. Таблица переходов

z_k	z_k				
	z_1	z_2		z_{K-1}	z_k
z_1	p_{11}	p_{12}		$p_{1(K-1)}$	p_{1K}
z_2	p_{21}	P_{22}		$p_{2(K-1)}$	p_{2K}
				$p_{3(K-1)}$	p_{3K}
z_k	p_{K1}	p_{K1}		$p_{K(K-1)}$	p_K

Пример. У-детерминированного Р-автомата

Таблица выходов представлена следующим образом:

Таблица 5. Таблица выходов

$Z \ldots\ldots z_1$	$z_2 \ldots\ldots z_{k-}$	z_k
$Y \ldots\ldots y_{i1}$	$y_{i2} \ldots y_{ik-1}$	y_{ik}

Пример. У-детерминированного Р-автомата

Первую из этих таблиц можно представить в виде квадратной матрицы размерности *К х К,* которая называется ***матрицей переходных вероятностей*** или просто ***матрицей переходов Р-автомата.*** В общем случае матрица переходов имеет вид

$$P_p = \begin{Vmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1K} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2K} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ p_{K1} & p_{K2} & ,,, & p_{KK} \end{Vmatrix} \qquad (8)$$

Пример. У-детерминированного Р-автомата

Для полного описания У-детерминированного
Р-автомата необходимо задать начальное распределение вероятностей вида

где d_K — вероятность того, что в начале работы *автомат* находится в состоянии z_k

При этом $\sum_{k=1}^{K} d_k = 1$. (9)

Таблица 6. Распределение вероятностей

$Z \ldots . z_1$	$z_2 \ldots . z_{k-}$	z_k
$D \ldots . d_1$	$d_2 \ldots . d_{K-1}$	d_K

Пример. У-детерминированного Р-автомата

Будем предполагать, что до начала работы (до нулевого такта времени) *Р-автомат* всегда находится в состоянии z_0, в нулевом такте времени меняет свое состояние в соответствии с распределением *D*. Дальнейшая смена состояний *Р-автомата* определяется матрицей переходов P_P.

Пример. У-детерминированного Р-автомата

Информацию о начальном состоянии *Р-автомата* удобно внести в матрицу $P_P^{/}$, увеличив ее размерность до $(K+1)\times(K+1)$ (10). При этом первая строка такой матрицы, сопоставляемая состоянию z_0, будет иметь вид $(0,\ d_1,\ d_2,\ \dots\ \dots,\ d_K)$, а первый столбец будет нулевым.

$$P_p{}' = \begin{Vmatrix} 0 & d_1 & d_2 & \dots & d_k \\ 0 & p_{11} & p_{12} & \dots & p_{1K} \\ 0 & p_{21} & p_{22} & \dots & p_{2K} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & p_{K1} & p_{K2} & \dots & p_{KK} \end{Vmatrix}$$

- сопоставляется со состоянием z_0 (11)

<u>Пример. У-детерминированного Р-автомата</u>

- **Описанный У-детерминированный *Р-автомат* можно задать в виде ориентированного графа, вершины которого сопоставляются состояниям автомата, а дуги — возможным переходам из одного состояния в другое.**

  Дуги имеют <u>веса</u>, соответствующие вероятностям перехода p_{ij}, а около вершин графа пишутся значения *выходных* сигналов, индуцируемых этими состояниями.

Пример 2. У-детерминированного Р-автомата

Рассмотрим следующий пример.
У-детерминированный *Р-автомат*
задан матрицей

$$P_p{}' = \left\| \begin{matrix} 0 & 0.5 & 0 & 0 & 0.5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0.75 & 0 & 0.25 \\ 0 & 0 & 0.4 & 0 & 0.6 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{matrix} \right\|$$

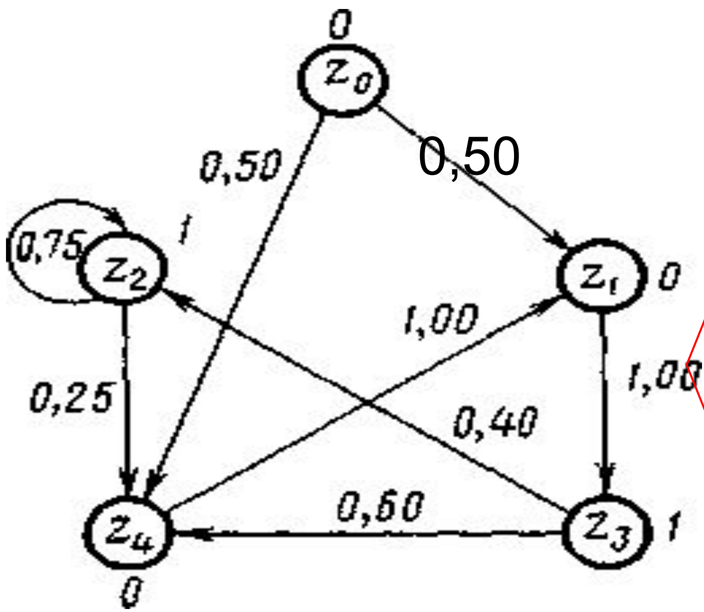
Начально
е
состояние

Матрица
переходо
в

Пример 2. У-детерминированного Р-автомата

Таблица 6. Начальное состояние

Z	z_0	z_1	z_2	z_3	z_4
Y	0	0	1	1	0



Граф переходов имеет вид.

Пример 2. У-детерминированного Р-автомата

Требуется оценить суммарные финальные вероятности пребывания этого *Р-автомата* в состояниях z_2 и z_3.

При использовании аналитического подхода можно записать известные соотношения из теории Марковских цепей и получить систему уравнений для определения финальных вероятностей.

Пример 2. У-детерминированного Р-автомата

$$C = \vec{C}\begin{Vmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0.75 & 0 & 0.25 \\ 0 & 0.4 & 0 & 0.6 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix}$$

- матрица финальных состояний (13)

$\overrightarrow{\overrightarrow{C}} = (c_k) = (c_1, c_2, c_3, c_4)$ **(14), где c_k – финальная вероятность пребывания *Р-автомата* в состоянии z_k.**

Начальное состояние z_a можно не учитывать, так как начальное распределение не оказывает влияния на значения финальных вероятностей.

Пример 2. У-детерминированного Р-автомата

$$\begin{cases} c_1 = c_4 \\ c_2 = 0.75c_2 + 0.4c_3 \\ c_3 = c_1 \\ c_4 = 0.25c_2 + 0.6c_3 \end{cases}$$

Получаем систему уравнений (15)

Добавим к этим уравнениям условие нормировки $c_1 + c_2 + c_3 + c_4 = 1$ (16). Тогда, решая систему уравнений, получим $c_1 = 5/23$, $c_2 = 8/23$, $c_3 = 5/23$, $c_4 = 5/23$ (17). Таким образом, $c_2 + c_3 = 13/23 = 0{,}5652$ (18).

Пример 2. У-детерминированного Р-автомата

Другими словами, при бесконечной работе заданного в этом примере У-детерминированного *Р-автомата* на его выходе формируется двоичная последовательность с вероятностью появления единицы, равной 0,5652.

Пример 2. У-детерминированного Р-автомата

Подобные *Р-автоматы* могут использоваться как генераторы *Марковских* последовательностей, которые необходимы при построении и реализации процессов функционирования систем *S* или воздей[illegible] внешней среды *E.*

Пример 2. У-детерминированного Р-автомата

Для оценки различных характеристик исследуемых систем, представляемых в виде *Р-схем,* кроме рассмотренного случая аналитических моделей можно применять и имитационные модели, реализуемые, например, ***методом статистического моделирования.***