
*ДИСКРЕТНО-СТОХАСТИЧЕСКИЕ
МОДЕЛИ
(P-схемы)*

Р-схемы

Определение: *Вероятностный автомат*
[англ., probabilistic automat) (**ВА**)

- это дискретный потактный преобразователь информации с памятью, функционирование которого в каждом такте зависит **ТОЛЬКО** от состояния памяти нем и **МОЖЕТ** быть описано статистически.

Р-схемы

Схемы вероятностных автоматов применяются:

- в проектировании дискретных систем, проявляющих статистически закономерное случайное поведение;
- в определении алгоритмических возможностей систем;
- в обосновании границ целесообразности их использования;
- в решении задач синтеза по выбранному критерию дискретных стохастических систем, удовлетворяющих заданным ограничениям.

Математическое понятие P -автомата формируется на понятиях, введенных для F -автомата.

P -схемы

Пусть множество G , элементами которого являются всевозможные пары (x_i, z_s) где x_i и z_s — элементы входного подмножества X и подмножества состояний Z соответственно. Если существуют две такие функции φ и ψ , $\frac{(x_i \in X, z_s \in Z)}{\varphi}$, то с их помощью осуществляются отображения $G \rightarrow Z$ и $G \rightarrow Y$, то говорят, что

(1) $F = \langle Z, X, Y, \varphi, \psi \rangle$ определяет конечный автомат детерминированного типа.

Р-введем более общую математическую схему. Пусть Φ — множество всевозможных пар вида (z_k, y_j) , где y_j — элемент выходного подмножества Y , т.е.

Пусть в любой элемент множества G индуцирует на множестве Φ некоторый закон распределения следующего вида:

P-схемы

Таблица 1. Закон

распределения

Элементы из Φ	••	(z_1, y_1)	••	(z_1, y_2)	••	(z_K, y_{J-1})	(z_K, y_J)
(z_k, y_j)	••	b_{11}		b_{12}		$b_{k(j-1)}$	B_{kj}



P-схемы

При этом $\sum_{k=1}^K \sum_{j=1}^J b_{kj} = 1$, (2) где b_{kj} — вероятности перехода автомат в состояние z_k и выдаче на выходе сигнала y_j , если автомат был в состоянии z_s , и на его вход в момент времени поступил сигнал x_i .

*Число таких распределений, представленных в виде таблиц, равно числу элементов множества **G**.*

Обозначим множество этих таблиц через **B**.

Тогда четверка элементов $X, Y, B >$ (3)

называется

вероятностным автоматом (P-автоматом).

Р-схемы

Вероятностный автомат Мили




Пусть элементы множества G индуцируют некоторые законы распределения на подмножествах Y и Z , которые можно представить соответственно в виде:

Р-схемы. Вероятностный автомат Мили

Таблица 2. Законы

распределения						
Элементы из Y	...	y_1	y_2	...	y_{J-1}	y_J
$(x_i z_s)$...	q_1	q_2	...	q_{J-1}	q_J
Элементы из Z	...	z_1	z_2	...	z_{K-1}	z_K
$(x_i z_s)$...	v_1	v_2	...	v_{K-1}	v_K

P-схемы. Вероятностный автомат Мили



При этом $\sum_{k=1}^K z_k = 1$ и $\sum_{k=1}^K v_k = 1$ (4)— вероятности перехода *P-автомата* в состояние z_k и выдачи выходного сигнала y_k при условии, что *P-автомат* находился в состоянии z_S и на его вход поступил входной сигнал x_t .

P-схемы. Вероятностный автомат Мили

Если для всех k и j имеет место соотношение $e_k z_i = b_{kj}$ (5), то такой автомат называется *вероятностным автоматом Мили*. Представленное требование означает выполнение условия **независимости** распределений для нового состояния *P-автомата* и его выходного сигнала.

Вероятностный автомат Мура




Пусть выходной сигнал Р-автомата зависит лишь от того состояния, в котором находится автомат в данном такте работы, каждый элемент выходного подмножества Y индуцирует распределение вероятностей выходов, имеющее следующий вид:

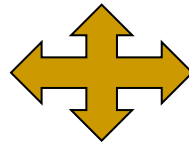
P-схемы. Вероятностный автомат Мура

Таблица 3. Распределение вероятностей

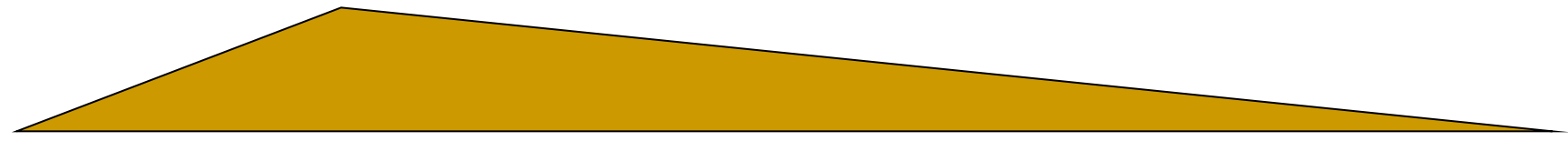
Элементы из Φ	...	y_1	y_2	...	y_{k-1}	y_k
(z_k, y_j)	...	s_1	s_2	...	s_{I-1}	s_I



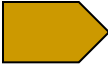
P-схемы. Вероятностный автомат Мура



Здесь $\sum_{i=1}^I S_i$ где S_i — вероятность появления сигнала на выходе y_i при условии, что *P-автомат* находился в состоянии z_k .



P-схемы. Вероятностный автомат Мура

 Частным случаем P-автомата являются автоматы, у которых либо переход в новое состояние, либо выходной сигнал определяются детерминировано. Такой автомат называется Y-детерминированным вероятностным автоматом.

P-схемы. Вероятностный автомат Мура

Если состояние P-автомата определяется детерминировано, то такой автомат называется *Z-детерминированным вероятностным автоматом.*

Аналогично, Z-детерминированным вероятностным автоматом называется P-автомат, у которого выбор нового состояния является детерминированным.

Рассмотрим пример



У-детерминированного Р-автомата

Пусть У-детерминированный Р-автомат, задан таблицей переходов : где p_{ij} – вероятность перехода автомата из состояния z_i в состояние z_j $\sum_{j=1}^K p_{ij} = 1$. Можем записать (7)

Пример. У-детерминированного Р-автомата

Таблица 4. Таблица

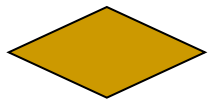
переходов

z_k	z_k				
	z_1	z_2		z_{K-1}	z_k
z_1	P_{11}	P_{12}		$P_{1(K-1)}$	P_{1K}
z_2	P_{21}	P_{22}		$P_{2(K-1)}$	P_{2K}
				$P_{3(K-1)}$	P_{3K}
z_k	P_{K1}	P_{K1}		$P_{K(K-1)}$	P_K

Пример. У-детерминированного Р-автомата

Таблица выходов представлена следующим образом:

Таблица 5. Таблица



ВЫХОДОВ $Z \dots z_1$	$z_2 \dots z_{k-1}$	z_k
$Y \dots y_{i1}$	$y_{i2} \dots y_{ik-1}$	y_{ik}

Пример. У-детерминированного P-автомата

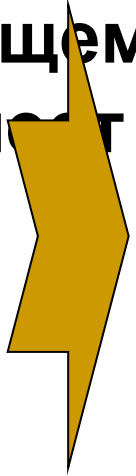
Первую из этих таблиц можно представить в виде квадратной матрицы размерности

$K \times K$, которая называется *матрицей*

▶ переходных вероятностей или просто *матрицей переходов P-автомата*. В

общем случае матрица переходов

имеет вид


$$P_p = \begin{pmatrix} P_{11} & P_{12} & \dots & P_{1K} \\ P_{21} & P_{22} & \dots & P_{2K} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ P_{K1} & P_{K2} & \dots & P_{KK} \end{pmatrix} \quad (8)$$

Пример. У-детерминированного Р-автомата

Для полного описания У-детерминированного Р-автомата необходимо задать начальное распределение вероятностей вида

где d_k — вероятность того, что в начале работы автомат находится в состоянии z_k

При этом $\sum_{k=1}^K d_k = 1$ (9)

Таблица 6. Распределение

$z_1 \dots z_1$	$z_2 \dots z_{k-1}$	z_k
$d \dots d_1$	$d_2 \dots d_{K-1}$	d_K

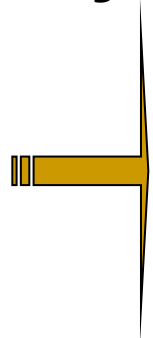
Пример. У-детерминированного P-автомата



Будем **предполагать**, что до начала работы (до нулевого такта времени) *P-автомат* всегда находится в состоянии z_0 , в нулевом такте времени меняет свое состояние в соответствии с распределением \underline{D} . Дальнейшая смена состояний *P-автомата* определяется матрицей переходов P_P .

Пример. У-детерминированного Р-автомата

Информацию о начальном состоянии *Р-автомата* удобно внести в матрицу P'_P , увеличив ее размерность до $(K + 1) \times (K + 1)$ (10). При этом первая строка такой матрицы, сопоставляемая состоянию z_0 , будет иметь вид $(0, d_1, d_2, \dots, d_K)$, а первый столбец будет нулевым.


$$P'_P = \begin{pmatrix} 0 & d_1 & d_2 & \dots & d_K \\ 0 & p_{11} & p_{12} & \dots & p_{1K} \\ 0 & p_{21} & p_{22} & \dots & p_{2K} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & p_{K1} & p_{K2} & \dots & p_{KK} \end{pmatrix}$$

- сопоставляется
со
состоянием z_0 (11)

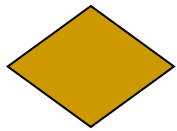
Пример. У-детерминированного Р-автомата

◆ Описанный У-детерминированный Р-автомат можно задать в виде ориентированного графа, вершины которого сопоставляются состояниям автомата, а дуги — возможным переходам из одного состояния в другое.

Дуги имеют веса, соответствующие вероятностям перехода p_{ij} , а около вершин графа пишутся значения *выходных* сигналов, индуцируемых этими состояниями.

Пример 2. У-детерминированного P-автомата

Рассмотрим следующий пример.
У-детерминированный *P*-автомат
задан матрицей



$$P'_p = \begin{pmatrix} 0 & 0.5 & 0 & 0 & 0.5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0.75 & 0 & 0.25 \\ 0 & 0 & 0.4 & 0 & 0.6 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Начально
е
состояние

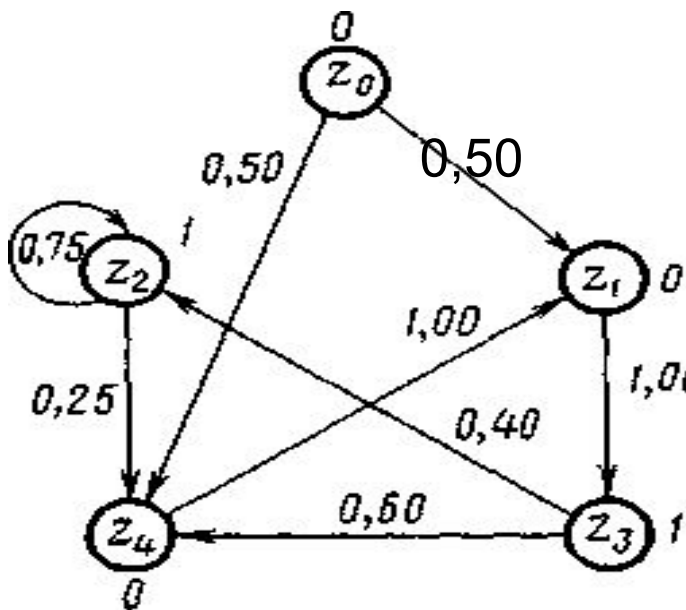
Матрица
переходо

В

Пример 2. У-детерминированного Р-автомата

Таблица 6. Начальное

состояние Z	z_0	z_1	z_2	z_3	z_4
Y	0	0	1	1	0



Граф переходов имеет вид.

Пример 2. У-детерминированного P-автомата

Требуется оценить суммарные финальные вероятности пребывания этого *P-автомата* в состояниях z_2 и z_3 .

При использовании аналитического подхода можно записать известные соотношения из теории Марковских цепей и получить систему уравнений для определения финальных вероятностей.

Пример 2. У-детерминированного P-автомата

$$C = \vec{C} \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0.75 & 0 & 0.25 \\ 0 & 0.4 & 0 & 0.6 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \text{ - матрица финальных состояний (13)}$$

$$\vec{C} = (c_k) = (c_1, c_2, c_3, c_4) \text{ (14), где } c_k \text{ -}$$

финальная вероятность пребывания *P-автомата* в

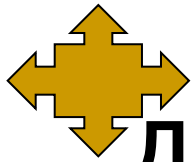
состоянии z_k . Начальное состояние z_a можно не учитывать, так как начальное распределение **не** оказывает влияния на значения финальных вероятностей.

Пример 2. У-детерминированного Р-автомата

$$\begin{cases} c_1 = c_4 \\ c_2 = 0.75c_2 + 0.4c_3 \\ c_3 = c_1 \\ c_4 = 0.25c_2 + 0.6c_3 \end{cases} \quad \text{Получаем систему уравнений} \\ \text{(15)}$$

Добавим к этим уравнениям условие нормировки $c_1 + c_2 + c_3 + c_4 = 1$ (16). Тогда, решая систему уравнений, получим $c_1 = 5/23$, $c_2 = 8/23$, $c_3 = 5/23$, $c_4 = 5/23$ (17). Таким образом, $c_2 + c_3 = 13/23 = \underline{0,5652}$ (18).


Пример 2. У-детерминированного Р-автомата



Другими словами, при бесконечной работе заданного в этом примере У-детерминированного *Р-автомата* на его выходе формируется двоичная последовательность с вероятностью появления единицы, равной 0,5652.

Пример 2. У-детерминированного Р-автомата

Подобные *Р-автоматы* могут использоваться как генераторы *Марковских* последовательностей, которые необходимы при построении и реализации процессов функционирования систем *S* или воздействии внешней среды *E*.



Пример 2. У-детерминированного Р-автомата

Для оценки различных характеристик исследуемых систем, представляемых в виде *Р-схем*, кроме рассмотренного случая аналитических моделей можно применять и имитационные модели, реализуемые, например, методом статистического моделирования.

