

# Обратное Z - преобразование.

**Цель:** научиться восстанавливать оригинал по известному Z-изображению

Задача восстановления оригинала по известному изображению решается при помощи обратного Z-преобразования:

$$x(nT) = \frac{1}{2\pi j} \oint X(z) z^{n-1} dz$$

способы нахождения обратного z-изображения:

- с использованием таблицы соответствий
- разложение на простые дроби
- на основании теоремы Коши о вычетах

**Пример 1:** дано Z-изображение

$$X(z) = 0,5z^{-1} + 0,2z^{-2} - 0,8z^{-4} + 0,1z^{-5}$$

**Найти:** дискретный сигнал.

т.к. Z – изображение представлено  
в виде суммы, то дискретный сигнал :

$$x(nT) = \{0 ; 0,5 ; 0,2 ; 0 ; -0,8 ; 0,1\}$$

Если Z-изображение дискретного сигнала представлено в виде дроби, то необходимо привести его к виду:

$$X(z) = \sum_{m=0}^{\infty} X_m \cdot z^{-m}$$

- численный метод (деление полинома числителя  $X(z)$  на знаменатель)

**Пример 2:** дано Z-изображение

$$X(z) = \frac{5z^3 + 2z + 1}{z^3 + 1}$$

**Найти:** дискретный сигнал.

**Решение:** разделим полином  
числителя на полином знаменателя

$$\begin{array}{r}
 \underline{-5z^3 + 2z + 1} \quad \Big| \quad z^3 + 1 \\
 \underline{5z^3 + 5} \qquad \qquad \qquad \quad 5 + 2z^{-2} - 4z^{-3} - 2z^{-5} \dots \\
 \qquad \qquad \qquad \quad 2z - 4 \\
 \qquad \qquad \qquad \underline{-2z + 2z^{-2}} \\
 \qquad \qquad \qquad \quad -4 - 2z^{-2} \\
 \qquad \qquad \qquad \underline{-4 - 4z^{-3}} \\
 \qquad \qquad \qquad \quad -2z^{-2} + 4z^{-3} \\
 \qquad \qquad \qquad \underline{-2z^{-2} - 2z^{-5}} \\
 \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \dots
 \end{array}$$

**тогда**

$$\begin{aligned} X(z) &= \frac{5z^3 + 2z + 1}{z^3 + 1} = \\ &= 5 + 2z^{-2} - 4z^{-3} - 2z^{-5} + \dots \end{aligned}$$

$$x(nT) = \{5; 0; 2; -4; 0; -2\dots\}$$



# использование теоремы о вычетах

если 
$$X(z) = z \cdot \frac{W(z)}{V(z)} = z \cdot \sum_{k=0}^Q \frac{A_k}{z - z_k}$$

где  $z_k$  – полюс  $X(z)$

$$A_k = \lim_{z \rightarrow z_k} (z - z_k) \frac{W(z)}{V(z)}$$

тогда 
$$x(nT) = \sum_{k=0}^Q A_k (z_k)^n$$

**Пример 3:** дано Z-изображение

$$X(z) = \frac{z^2 - 0,6z + 0,08}{z^2 - 0,8z + 0,15}$$

**Найти:** дискретный сигнал.

**Решение:** приведем  $X(z)$  к виду

$$X(z) = z \cdot \frac{W(z)}{V(z)} = z \cdot \frac{z^2 - 0,6z + 0,08}{z \cdot (z^2 - 0,8z + 0,15)}$$

Найдем полюса  $X(z)$ :

$$z \cdot (z^2 - 0,8z + 0,15) = 0$$

$$z_1 = 0; \quad z_2 = 0,5; \quad z_3 = 0,3$$

тогда:

$$X(z) = z \cdot \frac{z^2 - 0,6z + 0,08}{z \cdot (z - 0,5)(z - 0,3)}$$

Найдем коэффициенты  $A_k$ :

$$A_1 = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{\cancel{(z - 0)} \cdot (z^2 - 0,6z + 0,08)}{\cancel{z} \cdot (z - 0,5)(z - 0,3)} =$$
$$= \frac{0,08}{0,15} = 0,533$$

$$A_2 = \lim_{z \rightarrow 0,5} \frac{\cancel{(z - 0,5)} \cdot (z^2 - 0,6z + 0,08)}{\cancel{z} \cdot \cancel{(z - 0,5)}(z - 0,3)} =$$
$$= \frac{0,03}{0,1} = 0,3$$

$$A_2 = \lim_{z \rightarrow 0,3} \cancel{(z - 0,3)} \frac{z^2 - 0,6z + 0,08}{z \cdot (z - 0,5) \cancel{(z - 0,3)}} =$$

$$= \frac{-0,01}{-0,06} = 0,167$$

тогда

$$X(z) = z \cdot \left( \frac{0,533}{z} + \frac{0,3}{z - 0,5} + \frac{0,16}{z - 0,3} \right) =$$

$$= 0,533 + \frac{0,3}{1 - 0,5 \cdot z^{-1}} + \frac{0,16}{1 - 0,3 \cdot z^{-1}}$$

$$X(z) = 0,533 + \frac{0,3}{1 - 0,5 \cdot z^{-1}} + \frac{0,16}{1 - 0,3 \cdot z^{-1}}$$

тогда дискретный сигнал

$$x(nT) = 0,533 \cdot 0^n + 0,3 \cdot (0,5)^n + 0,16 \cdot (0,3)^n$$

найдем первые три отчета ДС:

$$x(0T) = 0,533 \cdot 0^0 + 0,3 \cdot (0,5)^0 + 0,16 \cdot (0,3)^0 = 0,993$$

$$x(1T) = 0,3 \cdot (0,5)^1 + 0,16 \cdot (0,3)^1 = 0,198$$

$$x(2T) = 0,3 \cdot (0,5)^2 + 0,16 \cdot (0,3)^2 = 0,089$$

# Практическое занятие

## Задача 1

Дано Z-изображение, найти дискретный сигнал

Вариант	$X(z)$
1	$3 + 1z^{-1} + 2z^{-2} + 3z^{-3}$
2	$2 + 3z^{-1} + 1z^{-2} + 2z^{-3}$
3	$4 + 3z^{-1} + 3z^{-2} + 2z^{-3}$
4	$3 + 1z^{-1} + 3z^{-2} + 2z^{-3}$
5	$2 + 1z^{-1} + 1z^{-2} + 0z^{-3}$
6	$1 + 2z^{-1} + 2z^{-2} + 4z^{-3}$

Вариант	$X(z)$
7	$2 + 1z^{-1} + 1z^{-2} + 4z^{-3}$
8	$1 + 1z^{-1} + 2z^{-2} + 4z^{-3}$
9	$0 + 1z^{-1} + 2z^{-2} + 5z^{-3}$
10	$2 + 0z^{-1} + 1z^{-2} + 2z^{-3}$
11	$3 + 1z^{-1} + 4z^{-2} + 2z^{-3}$
12	$8 + 4z^{-1} + 3z^{-2} + 3z^{-3}$
13	$7 + 2z^{-1} + 3z^{-2} + 5z^{-3}$
14	$6 + 1z^{-1} + 8z^{-2} + 4z^{-3}$
15	$9 + 3z^{-1} + 2z^{-2} + 7z^{-3}$



## Задача 2

Дано Z-изображение, найти дискретный сигнал двумя способами

Вариант	$X(z)$	Вариант	$X(z)$
1	$\frac{\mathbf{1 + 7z^{-1} + 1z^{-2}}}{\mathbf{1 + 4z^{-1} + 3z^{-2}}}$	4	$\frac{\mathbf{4 + 0z + 1z^{-2}}}{\mathbf{1 + 3z + 2z^{-2}}}$
2	$\frac{\mathbf{1 + 0z^{-1} + 2z^{-2}}}{\mathbf{1 + 4z^{-1} + 3z^{-2}}}$	5	$\frac{\mathbf{1 + 0z^{-1} + 4z^{-2}}}{\mathbf{1 + 4z^{-1} + 3z^{-2}}}$
3	$\frac{\mathbf{1 + 1z^{-1} + 1z^{-2}}}{\mathbf{1 + 4z^{-1} + 3z^{-2}}}$	6	$\frac{\mathbf{1 + 2z + 0z^{-2}}}{\mathbf{1 + 3z^{-1} + 2z^{-2}}}$

Вариант	$X(z)$	Вариант	$X(z)$
7	$\frac{0 + 1z^{-1} + 0z^{-2}}{1 + 6z^{-1} + 8z^{-2}}$	12	$\frac{4 + 0z^{-1} + 2z^{-2}}{1 + 3z^{-1} + 9z^{-2}}$
8	$\frac{0 + 2z^{-1} + 1z^{-2}}{1 + 6z^{-1} + 8z^{-2}}$	13	$\frac{7 + 2z^{-1} + 5z^{-2}}{1 + 3z^{-1} + 2z^{-2}}$
9	$\frac{2 + 1z^{-1} + 0z^{-2}}{1 + 3z^{-1} + 2z^{-2}}$	14	$\frac{1 + 8z^{-1} + 3z^{-2}}{1 + 1z^{-1} + 2z^{-2}}$
10	$\frac{0 + 4z^{-1} + 5z^{-2}}{1 + 7z^{-1} + 10z^{-2}}$	15	$\frac{3 + 0z^{-1} + 7z^{-2}}{1 + 2z^{-1} + 1z^{-2}}$
11	$\frac{2 + 5z^{-1} + 3z^{-2}}{1 + 4z^{-1} + 4z^{-2}}$		