

Обратное Z - преобразование.

Цель: научиться восстанавливать оригинал по известному Z-изображению

Задача восстановления оригинала по известному изображению решается при помощи обратного Z-преобразования:

$$x(nT) = \frac{1}{2\pi j} \oint X(z) z^{n-1} dz$$

способы нахождения обратного z-изображения:

- с использованием таблицы соответствий
- разложение на простые дроби
- на основании теоремы Коши о вычетах

Пример 1: дано Z-изображение

$$X(z) = 0,5z^{-1} + 0,2z^{-2} - 0,8z^{-4} + 0,1z^{-5}$$

Найти: дискретный сигнал.

т.к. Z – изображение представлено
в виде суммы, то дискретный сигнал :

$$x(nT) = \{0 ; 0,5 ; 0,2 ; 0 ; -0,8 ; 0,1\}$$

Если Z-изображение дискретного сигнала представлено в виде дроби, то необходимо привести его к виду:

$$X(z) = \sum_{m=0}^{\infty} X_m \cdot z^{-m}$$

- численный метод (деление полинома числителя $X(z)$ на знаменатель)

Пример 2: дано Z-изображение

$$X(z) = \frac{5z^3 + 2z + 1}{z^3 + 1}$$

Найти: дискретный сигнал.

Решение: разделим полином
числителя на полином знаменателя

$$\begin{array}{r}
 \underline{-5z^3 + 2z + 1} \quad \Big| \quad z^3 + 1 \\
 \underline{5z^3 + 5} \qquad \qquad \qquad \quad 5 + 2z^{-2} - 4z^{-3} - 2z^{-5} \dots \\
 \qquad \qquad \qquad \quad 2z - 4 \\
 \qquad \qquad \qquad \underline{-2z + 2z^{-2}} \\
 \qquad \qquad \qquad \quad -4 - 2z^{-2} \\
 \qquad \qquad \qquad \quad \underline{-4 - 4z^{-3}} \\
 \qquad \qquad \qquad \quad -2z^{-2} + 4z^{-3} \\
 \qquad \qquad \qquad \quad \underline{-2z^{-2} - 2z^{-5}} \\
 \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \dots
 \end{array}$$

тогда

$$\begin{aligned} X(z) &= \frac{5z^3 + 2z + 1}{z^3 + 1} = \\ &= 5 + 2z^{-2} - 4z^{-3} - 2z^{-5} + \dots \end{aligned}$$

$$x(nT) = \{5; 0; 2; -4; 0; -2\dots\}$$

использование теоремы о вычетах

если
$$X(z) = z \cdot \frac{W(z)}{V(z)} = z \cdot \sum_{k=0}^Q \frac{A_k}{z - z_k}$$

где z_k – полюс $X(z)$

$$A_k = \lim_{z \rightarrow z_k} (z - z_k) \frac{W(z)}{V(z)}$$

тогда
$$x(nT) = \sum_{k=0}^Q A_k (z_k)^n$$

Пример 3: дано Z-изображение

$$X(z) = \frac{z^2 - 0,6z + 0,08}{z^2 - 0,8z + 0,15}$$

Найти: дискретный сигнал.

Решение: приведем $X(z)$ к виду

$$X(z) = z \cdot \frac{W(z)}{V(z)} = z \cdot \frac{z^2 - 0,6z + 0,08}{z \cdot (z^2 - 0,8z + 0,15)}$$

Найдем полюса $X(z)$:

$$z \cdot (z^2 - 0,8z + 0,15) = 0$$

$$z_1 = 0; \quad z_2 = 0,5; \quad z_3 = 0,3$$

тогда:

$$X(z) = z \cdot \frac{z^2 - 0,6z + 0,08}{z \cdot (z - 0,5)(z - 0,3)}$$

Найдем коэффициенты A_k :

$$A_1 = \lim_{z \rightarrow 0} \cancel{(z - 0)} \frac{z^2 - 0,6z + 0,08}{z \cdot \cancel{(z - 0,5)}(z - 0,3)} =$$
$$= \frac{0,08}{0,15} = 0,533$$

$$A_2 = \lim_{z \rightarrow 0,5} \cancel{(z - 0,5)} \frac{z^2 - 0,6z + 0,08}{z \cdot \cancel{(z - 0,5)}(z - 0,3)} =$$
$$= \frac{0,03}{0,1} = 0,3$$

$$A_2 = \lim_{z \rightarrow 0,3} \cancel{(z - 0,3)} \frac{z^2 - 0,6z + 0,08}{z \cdot (z - 0,5) \cancel{(z - 0,3)}} =$$

$$= \frac{-0,01}{-0,06} = 0,167$$

тогда

$$X(z) = z \cdot \left(\frac{0,533}{z} + \frac{0,3}{z - 0,5} + \frac{0,16}{z - 0,3} \right) =$$

$$= 0,533 + \frac{0,3}{1 - 0,5 \cdot z^{-1}} + \frac{0,16}{1 - 0,3 \cdot z^{-1}}$$

$$X(z) = 0,533 + \frac{0,3}{1 - 0,5 \cdot z^{-1}} + \frac{0,16}{1 - 0,3 \cdot z^{-1}}$$

тогда дискретный сигнал

$$x(nT) = 0,533 \cdot 0^n + 0,3 \cdot (0,5)^n + 0,16 \cdot (0,3)^n$$

найдем первые три отчета ДС:

$$x(0T) = 0,533 \cdot 0^0 + 0,3 \cdot (0,5)^0 + 0,16 \cdot (0,3)^0 = 0,993$$

$$x(1T) = 0,3 \cdot (0,5)^1 + 0,16 \cdot (0,3)^1 = 0,198$$

$$x(2T) = 0,3 \cdot (0,5)^2 + 0,16 \cdot (0,3)^2 = 0,089$$

Практическое занятие

Задача 1

Дано Z-изображение, найти дискретный сигнал

| Вариант | $X(z)$ |
|---------|-----------------------------------|
| 1 | $3 + 1z^{-1} + 2z^{-2} + 3z^{-3}$ |
| 2 | $2 + 3z^{-1} + 1z^{-2} + 2z^{-3}$ |
| 3 | $4 + 3z^{-1} + 3z^{-2} + 2z^{-3}$ |
| 4 | $3 + 1z^{-1} + 3z^{-2} + 2z^{-3}$ |
| 5 | $2 + 1z^{-1} + 1z^{-2} + 0z^{-3}$ |
| 6 | $1 + 2z^{-1} + 2z^{-2} + 4z^{-3}$ |

| Вариант | $X(z)$ |
|---------|-----------------------------------|
| 7 | $2 + 1z^{-1} + 1z^{-2} + 4z^{-3}$ |
| 8 | $1 + 1z^{-1} + 2z^{-2} + 4z^{-3}$ |
| 9 | $0 + 1z^{-1} + 2z^{-2} + 5z^{-3}$ |
| 10 | $2 + 0z^{-1} + 1z^{-2} + 2z^{-3}$ |
| 11 | $3 + 1z^{-1} + 4z^{-2} + 2z^{-3}$ |
| 12 | $8 + 4z^{-1} + 3z^{-2} + 3z^{-3}$ |
| 13 | $7 + 2z^{-1} + 3z^{-2} + 5z^{-3}$ |
| 14 | $6 + 1z^{-1} + 8z^{-2} + 4z^{-3}$ |
| 15 | $9 + 3z^{-1} + 2z^{-2} + 7z^{-3}$ |

Задача 2

Дано Z-изображение, найти дискретный сигнал двумя способами

| Вариант | $X(z)$ | Вариант | $X(z)$ |
|---------|---|---------|---|
| 1 | $\frac{\mathbf{1 + 7z^{-1} + 1z^{-2}}}{\mathbf{1 + 4z^{-1} + 3z^{-2}}}$ | 4 | $\frac{\mathbf{4 + 0z + 1z^{-2}}}{\mathbf{1 + 3z + 2z^{-2}}}$ |
| 2 | $\frac{\mathbf{1 + 0z^{-1} + 2z^{-2}}}{\mathbf{1 + 4z^{-1} + 3z^{-2}}}$ | 5 | $\frac{\mathbf{1 + 0z^{-1} + 4z^{-2}}}{\mathbf{1 + 4z^{-1} + 3z^{-2}}}$ |
| 3 | $\frac{\mathbf{1 + 1z^{-1} + 1z^{-2}}}{\mathbf{1 + 4z^{-1} + 3z^{-2}}}$ | 6 | $\frac{\mathbf{1 + 2z + 0z^{-2}}}{\mathbf{1 + 3z^{-1} + 2z^{-2}}}$ |

| Вариант | $X(z)$ | Вариант | $X(z)$ |
|---------|--|---------|---|
| 7 | $\frac{0 + 1z^{-1} + 0z^{-2}}{1 + 6z^{-1} + 8z^{-2}}$ | 12 | $\frac{4 + 0z^{-1} + 2z^{-2}}{1 + 3z^{-1} + 9z^{-2}}$ |
| 8 | $\frac{0 + 2z^{-1} + 1z^{-2}}{1 + 6z^{-1} + 8z^{-2}}$ | 13 | $\frac{7 + 2z^{-1} + 5z^{-2}}{1 + 3z^{-1} + 2z^{-2}}$ |
| 9 | $\frac{2 + 1z^{-1} + 0z^{-2}}{1 + 3z^{-1} + 2z^{-2}}$ | 14 | $\frac{1 + 8z^{-1} + 3z^{-2}}{1 + 1z^{-1} + 2z^{-2}}$ |
| 10 | $\frac{0 + 4z^{-1} + 5z^{-2}}{1 + 7z^{-1} + 10z^{-2}}$ | 15 | $\frac{3 + 0z^{-1} + 7z^{-2}}{1 + 2z^{-1} + 1z^{-2}}$ |
| 11 | $\frac{2 + 5z^{-1} + 3z^{-2}}{1 + 4z^{-1} + 4z^{-2}}$ | | |