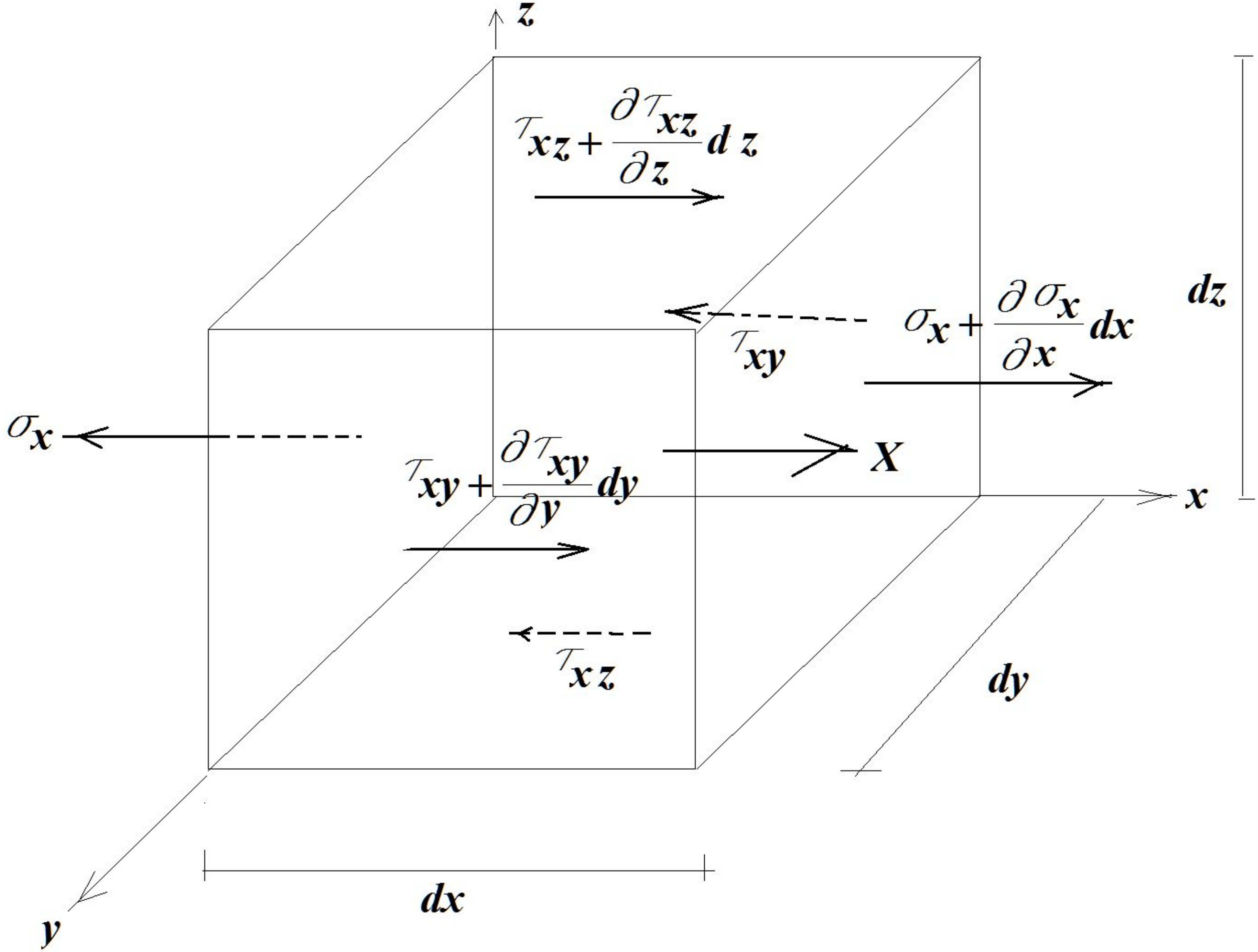
Лекция 2-3

Уравнения равновесия Навье

Теория напряжений является общей для всех разделов механики сплошной среды: теории упругости, теории пластичности и теории ползучести.

Сформулируем *правила знаков* для **напряжений**.

1. Нормальные напряжения положительны, если их направление совпадает с направлением внешней нормали;
2. Касательные напряжения будем считать положительными, когда они направлены по осям координат на площадках с внешней нормалью, направленной по оси координат, и когда они направлены против направления осей координат на площадках с внешней нормалью, направленной против направления оси координат.



z
$\tau_{xz} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} d z$
dz
$\sigma_x + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} dx$
τ_{xy}
σ_x
X
$\tau_{xy} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} dy$
x
τ_{xz}
dy
dx
y

1. Статические уравнения:

Выделим из тела, находящегося под действием внешних сил, бесконечно малый параллелепипед с гранями, параллельными координатным плоскостям и ребрам длиной dx, dy и dz (рис. 7). Установим зависимость между составляющими напряжений, действующих на гранях этого параллелепипеда. На каждой грани имеем три составляющие, параллельные координатным осям. Всего на шести гранях получаем 18 составляющих напряжений.

Составляющие напряжений являются функциями трех координат. Поэтому, например, нормальное напряжение σ_X в точке с координатами x, y, z можно обозначать $\sigma_X = \sigma_X(x, y, z)$. В точке, отстоящей от рассматриваемой на бесконечно малом расстоянии, напряжение σ_X с точностью до бесконечно малых первого порядка может быть разложено в ряд Тейлора:

$$\sigma_X(x+dx, y+dy, z+dz) = \sigma_X(x,y,z) + \frac{\partial \sigma_X(x,y,z)}{\partial x}dx +$$
$$+ \frac{\partial \sigma_X(x,y,z)}{\partial y}dy + \frac{\partial \sigma_X(x,y,z)}{\partial z}dz.$$

Для площадок, параллельных плоскости yOz, изменяется только координата x, а приращение $dy = dz = 0$. Поэтому на грани параллелепипеда, совпадающей с координатной плоскостью yOz, нормальное напряжение обозначено σ_X, а на параллельной грани, отстоящей от первой на бесконечно малом расстоянии dx, нормальное напряжение обозначено $\sigma_X + \frac{\partial \sigma_X}{\partial x} dx$. Аналогично связаны напряжения и на остальных парах параллельных граней параллелепипеда. Таким образом, из 18 составляющих напряжения неизвестными являются только девять: σ_X, σ_Y, σ_Z, τ_{XY}, τ_{YX}, τ_{YZ}, τ_{ZY}, τ_{ZX}, τ_{XZ}.

Кроме напряжений на параллелепипед будут действовать объемные силы. Обозначим проекции на координатные оси объемных сил, отнесенных к единице объема тела, X, Y и Z.

Тогда составляющие объемных сил, действующие в объеме рассматриваемого параллелепипеда будут равны $Xdxdydz$, $Ydxdydz$, $Zdxdydz$. Для тела, находящегося в равновесии, должны удовлетворяться шесть уравнений статики: три уравнения проекций на координатные оси и три уравнения моментов относительно этих осей. Рассмотрим уравнение проекций на ось x. На нее проецируются только силы, параллельные этой оси. Умножая каждое напряжение на площадь грани, по которой оно действует, и переходя таким образом от напряжения к силам, в результате проецирования получаем

$$\left(\sigma_x + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} dx\right) dydz - \sigma_x dydz + \left(\tau_{xy} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} dy\right) dzdx -$$

$$- \tau_{xy} dzdx + \left(\tau_{xz} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} dz\right) dxdy - \tau_{xz} dxdy + Xdxdydz = 0$$

После раскрытия скобок, приведения подобных членов и деления на объем $dV = dxdydz$ окончательно находим

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + X = 0 \cdot$$

Аналогично можно составить уравнения проекций на оси y и z. Таким образом, получим три дифференциальных уравнения равновесия:

$$
\left.
\begin{aligned}
\frac{\partial \sigma_X}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{XY}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{XZ}}{\partial z} + X = 0 \\
\frac{\partial \tau_{YX}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_Y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{YZ}}{\partial z} + Y = 0 \\
\frac{\partial \tau_{ZX}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{ZY}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_Z}{\partial z} + Z = 0
\end{aligned}
\right\} \qquad (1.1)
$$

Переходим к составлению уравнений моментов относительно координатных осей. Возьмем, например, уравнение моментов относительно оси y. Суммируя моменты всех сил относительно этой оси, получаем:

$$
\begin{aligned}
&\left(\sigma_X + \frac{\partial \sigma_X}{\partial x} dx\right) dydz \frac{dz}{2} - \sigma_X dydz \frac{dz}{2} + \sigma_Z dxdy \frac{dx}{2} - \\
&- \left(\sigma z + \frac{\partial \sigma_Z}{\partial z} dz\right) dxdy \frac{dx}{2} + \left(\tau_{XZ} + \frac{\partial \tau_{XZ}}{\partial z} dz\right) dxdydz - \\
&- \left(\tau_{ZX} + \frac{\partial \tau_{ZX}}{\partial x} dx\right) dydzdx - \tau_{XY} dzdx \frac{dz}{2} + \left(\tau_{XY} + \frac{\partial \tau_{XY}}{\partial y} dy\right) dzdx \frac{dx}{2} + \\
&+ \tau_{ZY} dzdx \frac{dx}{2} + Xdxdydz \frac{dz}{2} - Zdxdydz \frac{dx}{2} = 0. \qquad (a)
\end{aligned}
$$

Приведя в выражении (а) подобные члены и отбросив величины четвертого порядка малости, после деления на объем рассматриваемого параллелепипеда получим

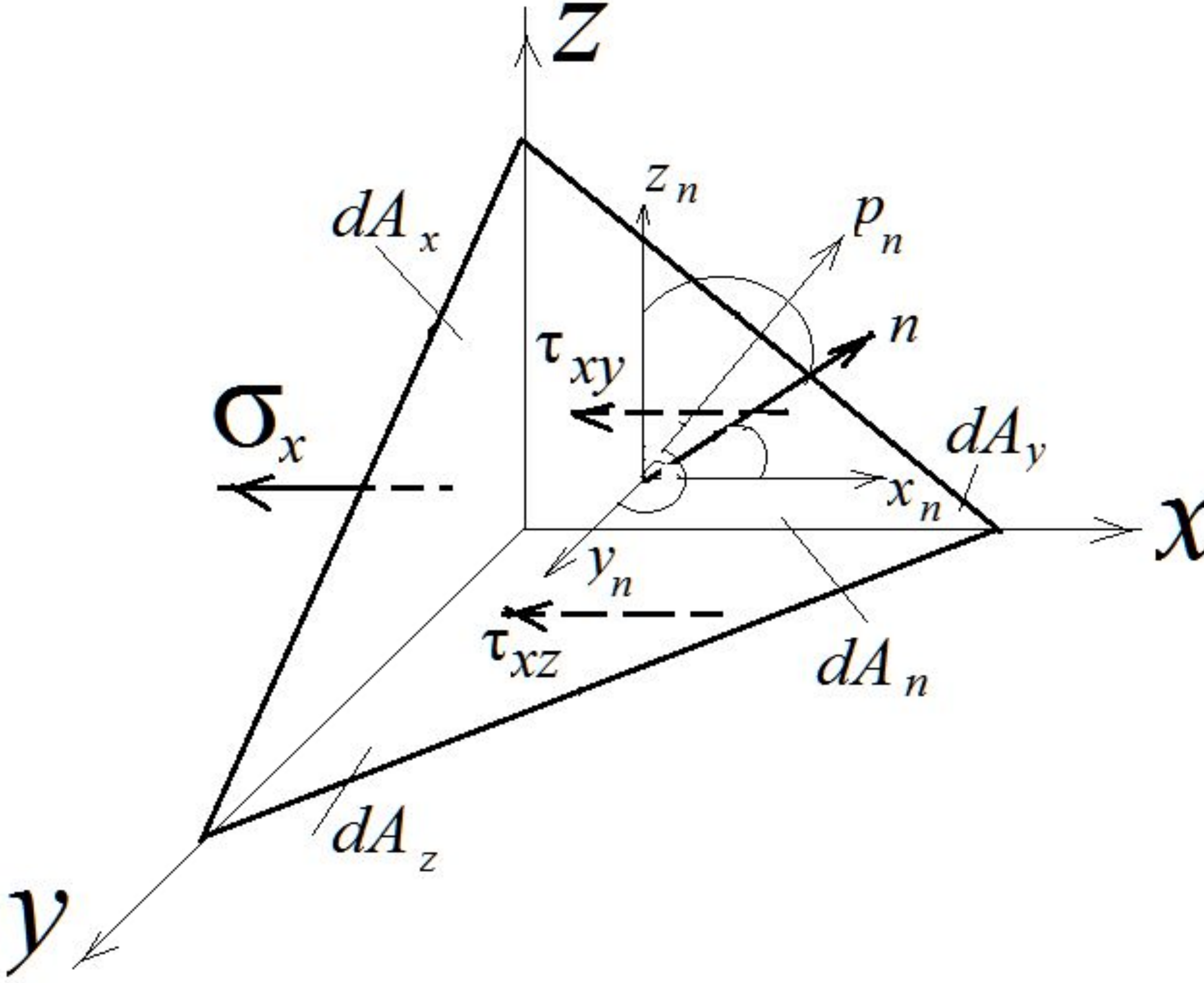
$$\tau_{XZ} = \tau_{ZX} \; .$$

Составляя уравнения моментов относительно осей z и x, получаем еще два аналогичных соотношения. Таким образом, из уравнений моментов вытекают три равенства:

$$\tau_{YX} = \tau_{XY}, \; \tau_{ZY} = \tau_{YZ}, \; \tau_{XZ} = \tau_{ZX} \; . \qquad (1.2)$$

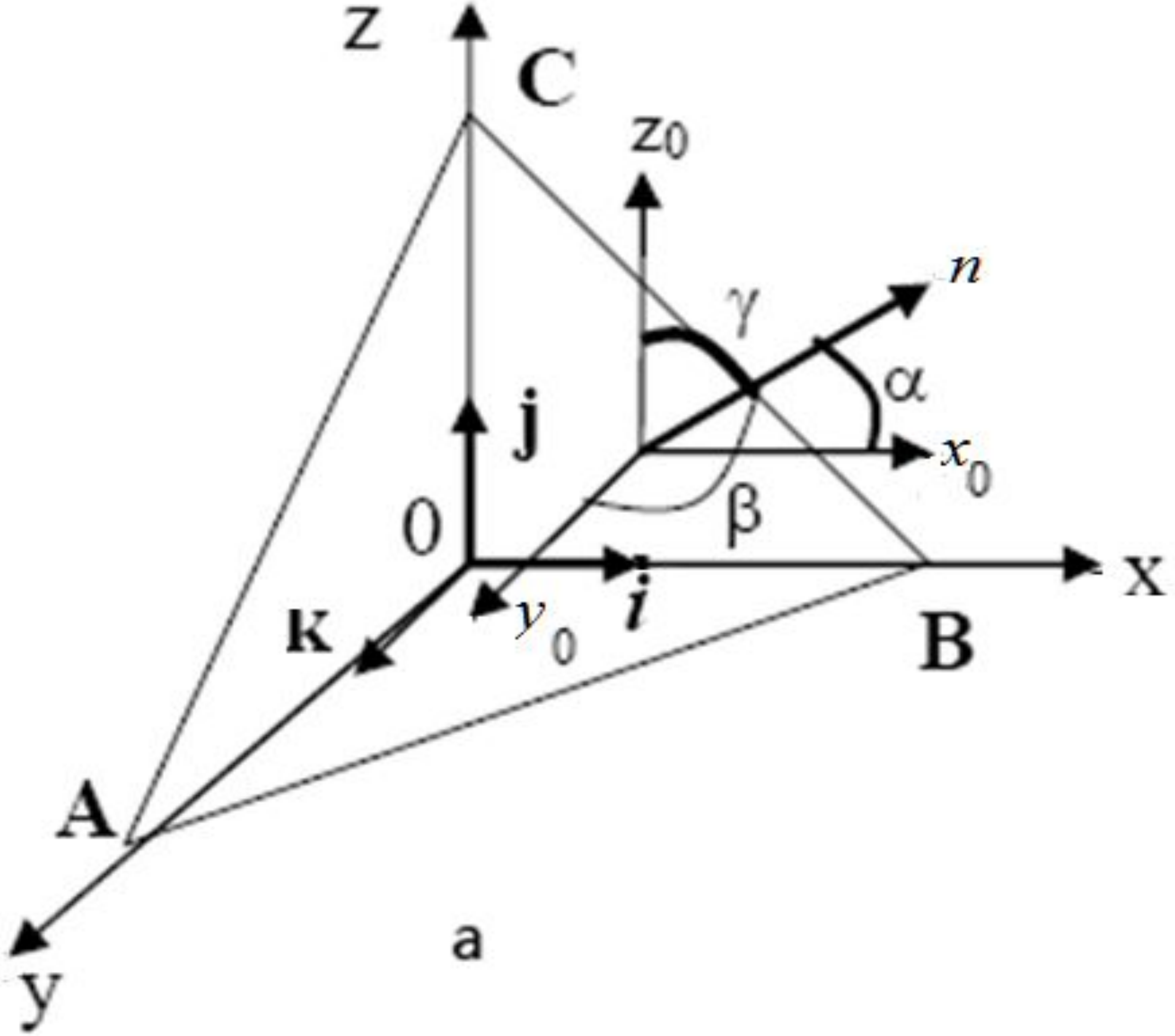
представляющие собой закон парности касательных напряжений. Он гласит: по двум взаимно перпендикулярным площадкам составляющие касательных напряжений, перпендикулярные линии пересечения этих площадок, равны между собой.

Напряжения на наклонных площадках. Условия на поверхности



Z
z_n
p_n
dA_x
n
τ_{xy}
σ_x
dA_y
x_n
x
y_n
τ_{xz}
dA_n
dA_z
y

$$\cos\alpha = l,\ \cos\beta = m,\ \cos\gamma = n.$$



a

$$\sum F_x = 0.$$

$$x_n dA_n - \sigma_x dA_n l - \tau_{xy} dA_n m - \tau_{xz} dA_n n = 0$$

$$\begin{cases} x_n = \sigma_x l + \tau_{xy} m + \tau_{xz} n \\ y_n = \sigma_y m + \tau_{xy} l + \tau_{yz} n \\ z_n = \sigma_z n + \tau_{xz} l + \tau_{zy} m \end{cases}$$

Эти уравнения используются в двух целях:
1.для определения напряжений на наклонных площадках, т.е. для установления напряженного состояния в окрестностях точки.
2.для постановки статических граничных условий.

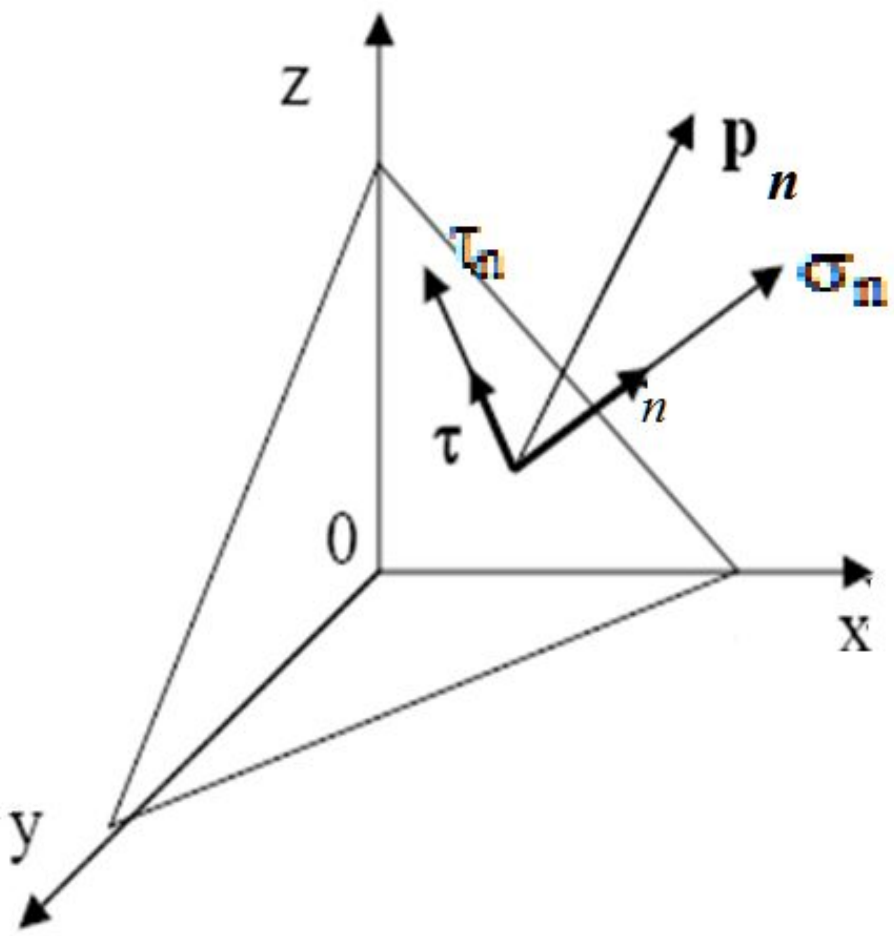
В этом случае Xn, Yn, Zn будут представлять собой компоненты внешних нагрузок, которые должны быть связаны с напряженным состоянием внутри тела.

Полное напряжение на площадке:

$$p_n = \sqrt{x_n^2 + y_n^2 + z_n^2}$$

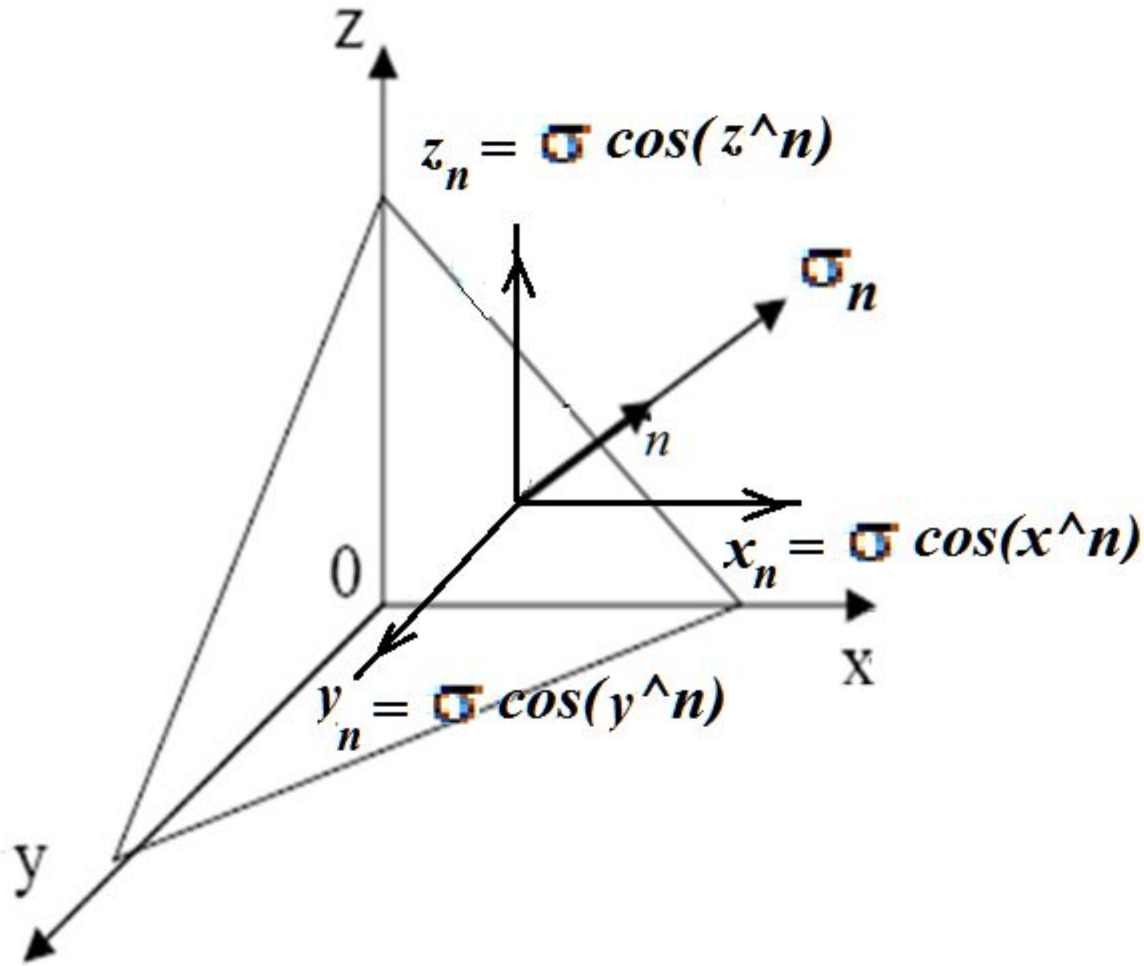
Можно найти нормальное напряжение σ_n:

$$\sigma_n = x_n l + y_n m + z_n =$$
$$= \sigma_x l^2 + \sigma_y m^2 + \sigma_z n^2 + 2\tau_{xy} lm + 2\tau_{yz} mn + 2\tau_{zx} nl$$



$$\tau_n = \sqrt{p_n^2 - \sigma_n^2}$$

Главные напряжения



Свойство главной площадки: на главной площадке касательные напряжения

Предположим, что наклонная площадка является главной. Тогда вектор полного напряжения p_n будет совпадать с нормалью к площадке и, следовательно, касательные напряжения равны нулю. Тогда:

$$X_n = \sigma \cos(n^x)$$
$$Y_n = \sigma \cos(n^y)$$
$$Z_n = \sigma \cos(n^z)$$

Подставим эти значения в формулы для определения напряжений на наклонных площадках:

$X_n = \sigma_x \cos(n\hat{\ }x) + \tau_{xy} \cos(n\hat{\ }y) + \tau_{xz} \cos(n\hat{\ }z)$

Так как $X_n = \sigma \cos(n\hat{\ }x)$, получим:

$$(\sigma_x - \sigma)\cos(n\hat{\ }x) + \tau_{xy}\cos(n\hat{\ }y) + \tau_{xz}\cos(n\hat{\ }z) = 0.$$

Рассуждая аналогично можно получить следующую систему уравнений:

$$(\sigma_x - \sigma)\cos(n\hat{\ }x) + \tau_{xy}\cos(n\hat{\ }y) + \tau_{xz}\cos(n\hat{\ }z) = 0$$
$$\tau_{yx}\cos(n\hat{\ }x) + (\sigma_y - \sigma)\cos(n\hat{\ }y) + \tau_{yz}\cos(n\hat{\ }z) = 0$$
$$\tau_{zx}\cos(n\hat{\ }x) + \tau_{zy}\cos(n\hat{\ }y) + (\sigma_z - \sigma)\cos(n\hat{\ }z) + = 0$$

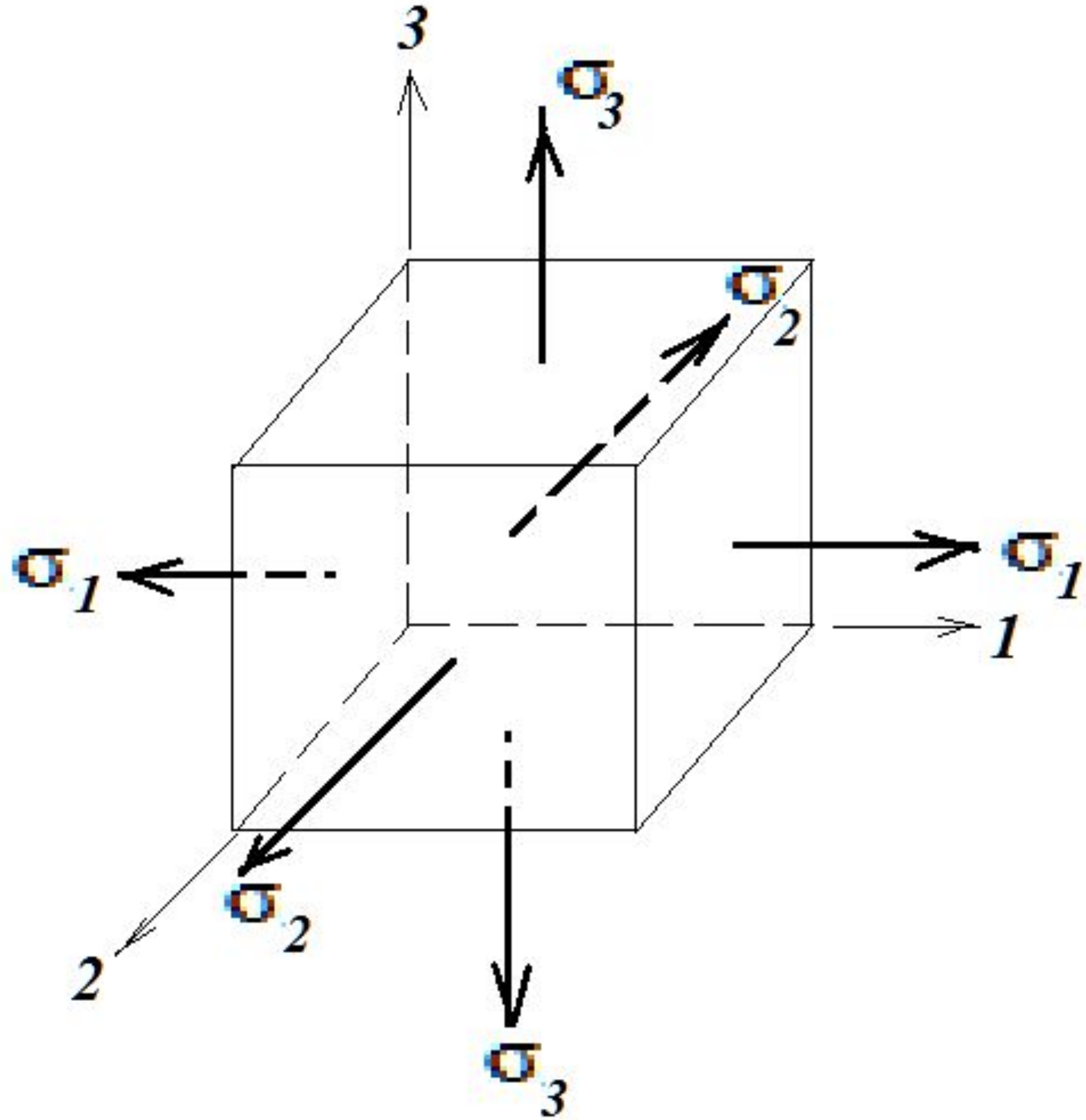
Полученная система трех линейных однородных уравнений относительно косинусов углов между осями. Тривиального решения для данной системы не может быть, т.к. одновременно все косинусы не могут быть равны нулю. Для определения ненулевых решений необходимо составить определитель из коэффициентов при неизвестных и приравнять его к нулю.

$$\begin{vmatrix} \sigma_{\mathrm{x}} - \sigma & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_{\mathrm{x}} - \sigma & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_{\mathrm{x}} - \sigma \end{vmatrix} = 0$$

Раскрывая этот определитель, получаем кубическое уравнение:

$$\sigma^3 - I_1\sigma^2 + I_2\sigma - I_3 = 0$$

В результате получим три значения нормального напряжения: $\sigma_1 = \sigma_{max}$, $\sigma_2 = \sigma_{minmax}$, $\sigma_3 = \sigma_{min}$.


3
σ3
σ2
σ1
σ1
1
σ2
2
σ3

I_1, I_2, I_3 - инварианты тензора напряжений, т.е. постоянные, определяющие напряженное состояние в окрестностях точки:

$$I_1 = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z$$

$$I_2 = \sigma_x\sigma_y + \sigma_y\sigma_z + \sigma_z\sigma_x - \tau_{xy}^2 - \tau_{yz}^2 - \tau_{xzx}^2$$

$$I_3 = \begin{vmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_x & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_x \end{vmatrix}$$

Тензор напряжений

Высшая математика представлена тремя направлениями:
Обычная (x, y, z)
Векторная
Тензорная.

Напряженное состояние в точке может быть представлено тензором напряжений:

$$T_{н} = \begin{pmatrix} \sigma_{x} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_{x} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_{x} \end{pmatrix}$$

Обычно при решении задач теории упругости тензор напряжений раскладывают на шаровой тензор и девиатор напряжений. Таким образом, любой тензор можно представить как сумму:

$T_н = T_н^0 + D_н$

Введем обозначение:

$$\sigma_{ср} = \frac{1}{3}(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)$$

Тогда:

$$T_н^0 = \begin{pmatrix} \sigma_{ср} & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{ср} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{ср} \end{pmatrix}, \qquad D_н = \begin{pmatrix} \sigma_x - \sigma_{ср} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_x - \sigma_{ср} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_x - \sigma_{ср} \end{pmatrix}$$

Шаровой тензор показывает изменение объема кубика, а девиатор – изменение формы кубика.