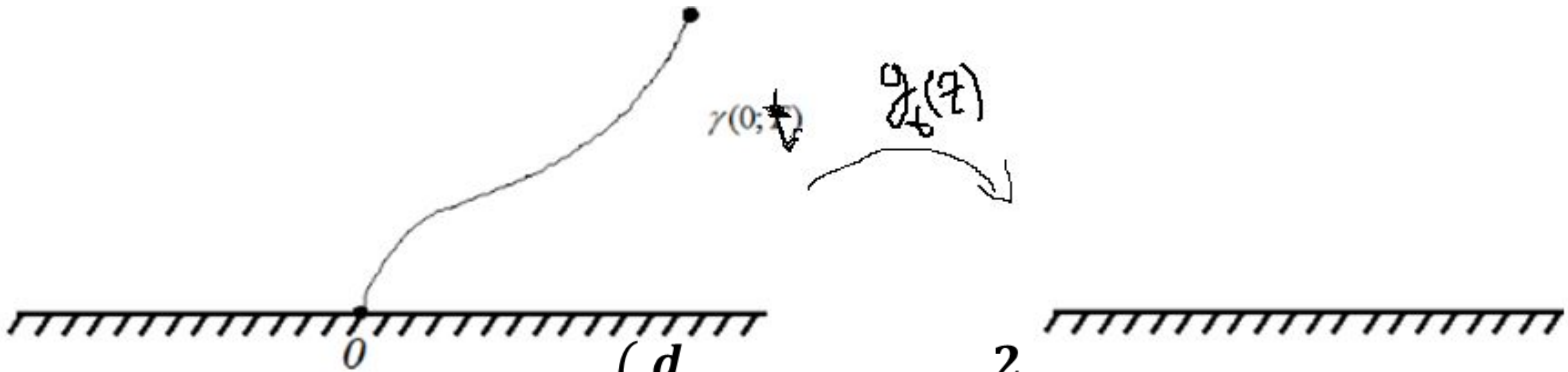
Рассмотрим отображение верхней полуплоскости с разрезом по простой кривой γ(0;t] на верхнюю полуплоскость, порождаемое хордовым уравнением Левнера с начальным условием



- $$\begin{cases} \dfrac{d}{dt} g_t(z) = \dfrac{2}{g_t(z) - \lambda(t)} \\ g_0(z) = z\,, \end{cases}$$

где $\lambda(t)$ - управляющая функция.

(Пока знаменатель не равен нулю, уравнение хорошее и $\lambda(t)$ определяет единственное решение g_t(z) (с точностью до нормировки), а все точки, где знаменатель равен нулю, составляет множество

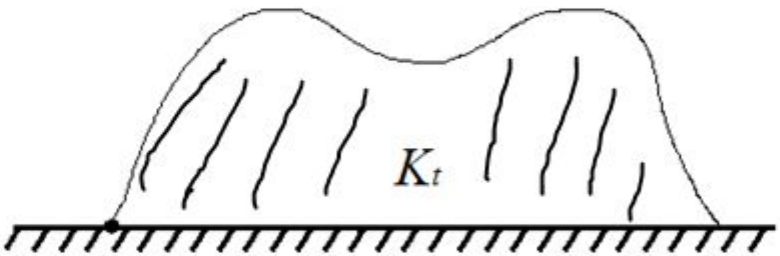
$$K_t := z \in H : g_s(z) = \lambda(s),\ s \in (0;t].$$

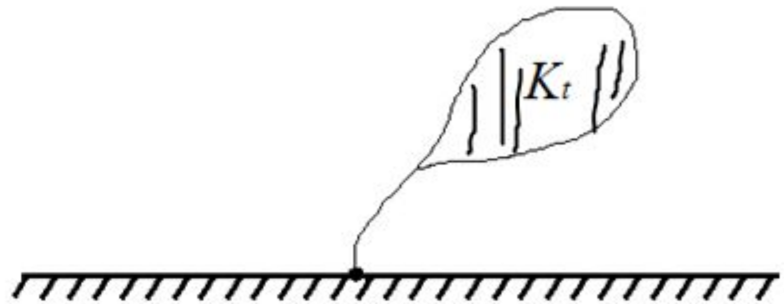
(Если $z \notin K_t$, то существует единственное отображение $g_t(z)$, отображающее $H \setminus K_t$ на Н ($H \setminus K_t$ -->H с нормировкой

$$g_t(z) = z + \frac{c(t)}{z} + O\left(\frac{1}{z^2}\right)$$

(Так же определим $C(t) = 2t$ полуплоскостной емкостью множества Kt.

В простейшем случае множество K_t - это множество точек простой кривой *γ(0;t]*, но могут быть и случаи. когда K_t - область.





Уравнение Левнера задает соответствие между непрерывной управляющей функцией *λ(t)* и множеством K_t.

Свойства решений уравнения Левнера:

1)Масштабирование: для $r>0$, множеству rK_{t/r^2} соответствует управление $r\lambda(t/r^2)$.

2)Трансляция(перенос): $\forall x \in R$, множеству $K_t + x$ соответствует управление $\lambda(t)+x$.

3)Рефлексия(отражение): отражению K_t относительно мнимой оси соответствует управление $-\lambda(t)$.

4)Сцепление: для фиксированного τ, $\lambda(\tau+t)$ является управляющая функция для множества $g_\tau(K_{t+\tau})$.

(Известна теорема трех авторов: **Earle, Epstein,Marshall**

Теорема

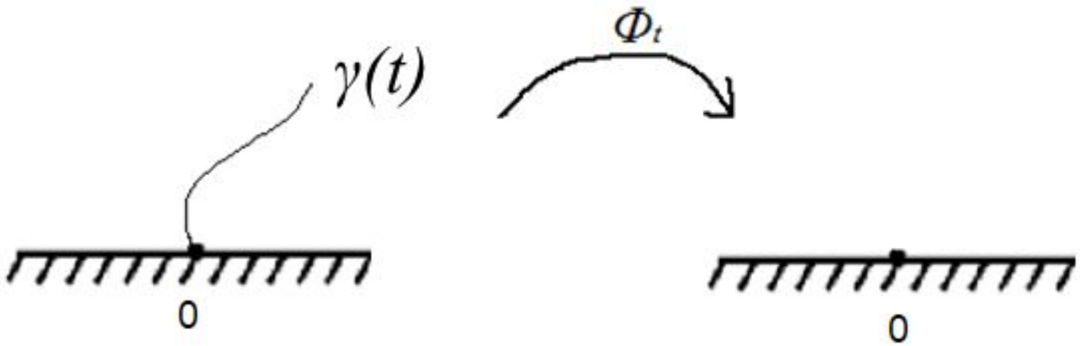
Допустим кривая $\boldsymbol{\gamma: (0;T) \to (H,0,\infty)}$ порождается управляющей функцией λ_t .Если любые параметризации γ имеют порядок C^n $(\gamma' \neq 0)$, то емкость параметризации γ есть функция класса C^{n-1} $(0;\tau)$ и

$\lambda \in C^{n-1}$ $(0;\tau)$, где τ- полуплоскостная емкость γ (Она в этом случае может быть равной ∞)

(Пусть $G(t)$ - множество всех конформныхотображений)

$$\Phi_t : H \setminus \gamma\ (0;t) \dashrightarrow H$$

(верняя полуплоскость с разрезом по криавой на верхнюю полуплоскость)



$$\Phi_t(\gamma(t)) = 0$$

$$\Phi_t(b) = \infty$$

(Основой для данной работы является статья) **Joan Lind** и **Steffen Rohde - Loewner Curvature**

(В статье приводятся следующие определения)

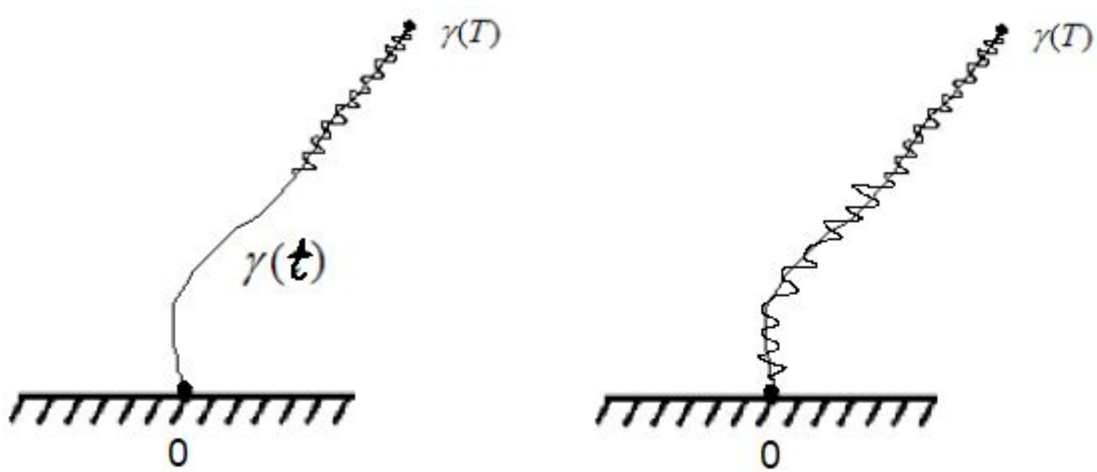
Определение

Кривая $\gamma\ (0,t) : \gamma \in C^3\ (0,t)$ и $\gamma' \neq 0$ называется самоподобной, если для любого t $\in(0;T)$ существует конформное отображение

$$\Phi_t \in G_t : \Phi_t(\gamma(t, T)) = \gamma$$

(Которое отображает часть γ *при* t $\in(0;T)$ на всю γ)

Семейство самоподобных кривых назовем S (H, 0, ∞).



(Приведу основной результаты статьи:)

Теорема

Пусть γ - генерируется в уравнении Левнера управляющей функцией $\lambda(t)$.

Если $\gamma \in S(H, 0, \infty)$ - семейству кривых, то $\lambda(t)$ задается двумя параметрами $\lambda'(0)$ и $\lambda''(0)$.

Фактически, $\gamma \in S(H, 0, \infty)$ означает, что $\lambda(t)$ является одной из следующих управляющих функций:

$$\boldsymbol{0;\ ct,\ c\sqrt{\tau}-c\sqrt{\tau+t};\ c\sqrt{\tau+t}-c\sqrt{\tau},}$$

где t - переменная, параметры $c \in \mathbb{R} : c \neq 0,\ \tau \in \mathbb{R} : \tau > 0.$

Опишем кривые, порождаемые управляющими функциями теоремы:

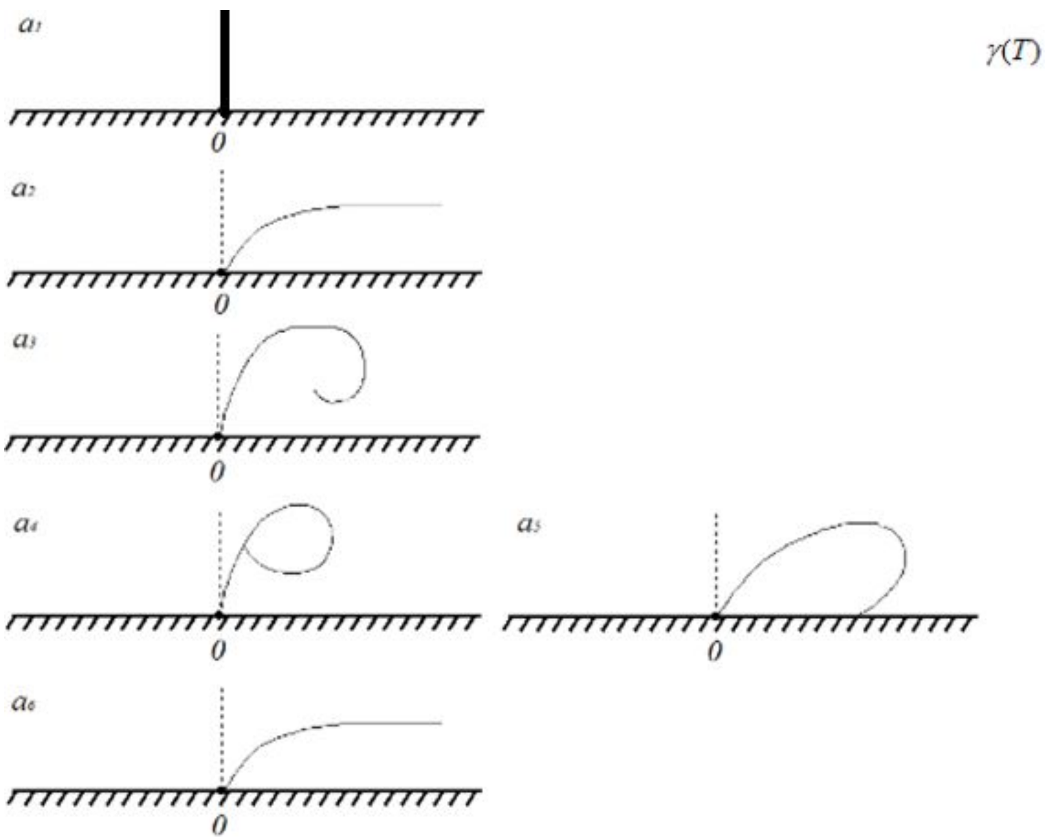
1) Значение $\lambda(t) = 0$ соответствует случаю a_1.

2) Значение $\lambda(t) = ct$ соответствует случаю a_2.

3) Значение $\lambda(t) = c\sqrt{\tau} - c\sqrt{\tau - t}, |c| < 4$ соответствует a_3,

а если $|c| \geqslant 4$ - a_4 или a_5.

4) Значение $\lambda(t) = c\sqrt{\tau + t} - c\sqrt{\tau}$ соответствует случаю a_6.



•

Предложение

Пусть $\lambda \in C^2\ [0, T)$ является управляющей функцией, порождающей кривую γ. Далее, мы предполагаем, что $\lambda(0) = 0$ и либо $\lambda'(0) \neq 0$, либо обе $\lambda'(0)$ и $\lambda''(0)$ равны 0. Тогда в параметризации полуплоскости γ удовлетворяет

$$\gamma(t) = 2i\sqrt{t} + at - i\frac{a^2}{8}t^{3\backslash 2} + bt^2 + o(t^2)$$

где t близка к 0, $a = \frac{2}{3}\lambda'(0)$ и $b = \frac{4}{15}\lambda''(0) + \frac{1}{135}\lambda'(0)^3$.

(Далее авторы вводят такое понятие как кривизна Левнера)

Определение

Пусть $\gamma \epsilon S(H, 0, \infty)$. Тогда LC_γ - кривизна Лёвнера кривой γ, определяется как следующая постоянная:

1. Если γ порождается $\lambda = 0$, то $LC_\gamma \equiv 0$.

2. Если γ порождается с помощью $\lambda = c_t$, то $LC_\gamma \equiv \infty$.

3. Если γ порождается $\lambda = c\sqrt{\tau} - c\sqrt{\tau - t}$, то $LC_\gamma \equiv \infty$.

4. Если γ порождается $\lambda = c\sqrt{\tau + t} - c\sqrt{\tau}$, то $LC_\gamma \equiv -\frac{c^2}{2}$.

Теорема

Пусть γ: $(0, T) \dashrightarrow (H, 0, \infty)$ из класса C^3. Кривизна Лёвнера γ в точке $\gamma(t)$, обозначенная $LC_\gamma(t)$, определяется как LC_{γ^*}, где $\gamma^* \epsilon S(H \setminus \gamma(0, t], \gamma(t), \infty)$ – это единственная кривая, наилучшим образом подходящая для $\gamma(t, T)$ в

Предложение

Пусть γ: $(0, T) \rightarrow (H, 0, \infty)$ - кривая C^3, параметризованная емкостью полуплоскости, а λ - соответствующая управляющая функция. Тогда для любых $t \in (0, T)$:

$$LC_\gamma(t) = \frac{\lambda'(t)^3}{\lambda''(t)}.$$

Поскольку $LC_\gamma(t) = 0$ именно тогда, когда $\lambda'(t) = 0$, если правая часть имеет неопределенность $\frac{0}{0}$, мы объявляем ее равным 0.

Теорема

Пусть $\gamma : (0, T) \rightarrow (H, 0, \infty) \in C^3$.

Если $LC_\gamma(t) < 8$ для всех $t \in (0, T)$, то $\gamma\, (0, T]$ - простая кривая в $H \cup \{\infty\}$.

Константа 8 является наилучшей из возможных, как показывает кривая в случае 3 из определения кривизны Левнера с $|c| = 4$. (кривая на картинке а4).

(Первая часть работы определена как восстановление и расшифровка доказательств утверждений, которые даны в статье кратко.

Этой частью я уже занимаюсь и к январю планирую довести до конца.

Вторая часть будет состоять из поиска другого преобразования Фt, которое даст другой класс самоподобных кривых. И тогда к этим новым решениям уже можно будет применить используемые теоремы.