

Упрощение логических выражений

10 класс

Для упрощения логических выражений используют законы алгебры логики. Они формулируются для базовых логических операций — «НЕ», «И» и «ИЛИ».

| название | для И | для ИЛИ |
|------------------------|--|--|
| двойного отрицания | $\overline{\overline{A}} = A$ | |
| исключения третьего | $A \cdot \overline{A} = 0$ | $A + \overline{A} = 1$ |
| операции с константами | $A \cdot 0 = 0, A \cdot 1 = A$ | $A + 0 = A, A + 1 = 1$ |
| повторения | $A \cdot A = A$ | $A + A = A$ |
| поглощения | $A \cdot (A + B) = A$ | $A + A \cdot B = A$ |
| переместительный | $A \cdot B = B \cdot A$ | $A + B = B + A$ |
| сочетательный | $A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C$ | $A + (B + C) = (A + B) + C$ |
| распределительный | $A + B \cdot C = (A + B) \cdot (A + C)$ | $A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$ |
| законы де Моргана | $\overline{A \cdot B} = \overline{A} + \overline{B}$ | $\overline{A + B} = \overline{A} \cdot \overline{B}$ |

| название | для И | для ИЛИ |
|---------------------|-------------------------------|------------------------|
| двойного отрицания | $\overline{\overline{A}} = A$ | |
| исключения третьего | $A \cdot \overline{A} = 0$ | $A + \overline{A} = 1$ |

- Закон двойного отрицания означает, что операция «НЕ» обратима: если применить ее два раза, логическое значение не изменится.
- Закон исключённого третьего основан на том, что в классической (двузначной) логике любое логическое выражение либо истинно, либо ложно («третьего не дано»). Поэтому если $A = 1$, то $\overline{A} = 0$ (и наоборот), так что произведение этих величин всегда равно нулю, а сумма — единице.

| название | для И | для ИЛИ |
|------------------------|---|-----------------------------|
| двойного отрицания | $\overline{\overline{A}} = A$ | |
| исключения третьего | $A \cdot \overline{A} = 0$ | $A + \overline{A} = 1$ |
| операции с константами | $A \cdot 0 = 0, A \cdot 1 = A$ | $A + 0 = A, A + 1 = 1$ |
| повторения | $A \cdot A = A$ | $A + A = A$ |
| поглощения | $A \cdot (A + B) = A$ | $A + A \cdot B = A$ |
| переместительный | $A \cdot B = B \cdot A$ | $A + B = B + A$ |
| сочетательный | $A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C$ | $A + (B + C) = (A + B) + C$ |

- Операции с константами и закон повторения легко проверяются по таблицам истинности операций «И» и «ИЛИ».
- Переместительный и сочетательный законы выглядят вполне привычно, так же, как и в арифметике. Почти везде «работает» аналогия с алгеброй чисел, нужно только помнить, что в логике $1 + 1 = 1$, а не 2.

| название | для И | для ИЛИ |
|------------------------|--|--|
| двойного отрицания | $\overline{\overline{A}} = A$ | |
| исключения третьего | $A \cdot \overline{A} = 0$ | $A + \overline{A} = 1$ |
| операции с константами | $A \cdot 0 = 0, A \cdot 1 = A$ | $A + 0 = A, A + 1 = 1$ |
| повторения | $A \cdot A = A$ | $A + A = A$ |
| поглощения | $A \cdot (A + B) = A$ | $A + A \cdot B = A$ |
| переместительный | $A \cdot B = B \cdot A$ | $A + B = B + A$ |
| сочетательный | $A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C$ | $A + (B + C) = (A + B) + C$ |
| распределительный | $A + B \cdot C = (A + B) \cdot (A + C)$ | $A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$ |
| законы де Моргана | $\overline{A \cdot B} = \overline{A} + \overline{B}$ | $\overline{A + B} = \overline{A} \cdot \overline{B}$ |

- Распределительный закон для операции «ИЛИ» — это обычное раскрытие скобок. А вот для операции «И» мы видим незнакомое выражение, в алгебре чисел это равенство неверно.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО РАСПРЕДЕЛИТЕЛЬНОГО ЗАКОНА

- Доказательство можно начать с правой части, раскрыв скобки:

$$(A + B) \cdot (A + C) = A \cdot A + A \cdot C + B \cdot A + B \cdot C$$

- Дальше используем закон повторения ($A \cdot A = A$) и заметим, что

$$A + A \cdot C = A \cdot (1 + C) = A \cdot 1 = A$$

- Аналогично доказываем, что $A + B \cdot A = A \cdot (1 + B) = A$, таким образом:

$$(A + B) \cdot (A + C) = A + B \cdot C$$

- Равенство доказано. Мы доказали также и закон поглощения для операции «И» (для операции «ИЛИ» вы можете сделать это самостоятельно). Отметим, что из распределительного закона следует полезное тождество:

$$A + \bar{A} \cdot B = (A + \bar{A}) \cdot (A + B) = A + B$$

Правила, позволяющие раскрывать отрицание сложных выражений, названы в честь шотландского математика и логика Огастеса (Августа) де Моргана. Обратите внимание, что при этом не просто «общее» отрицание переходит на отдельные выражения, но и операция «И» заменяется на «ИЛИ» (и наоборот). Доказать законы де Моргана можно с помощью таблиц истинности.

Теперь с помощью приведённых законов алгебры логики упростим логическое выражение:

$$(A \cdot B \cdot \bar{C}) + \bar{A} \cdot B \cdot \bar{C} = \underbrace{(A + \bar{A})}_{1} \cdot B \cdot \bar{C} = B \cdot \bar{C}$$

1. Вынесли общий множитель двух слагаемых за скобки
2. Применили закон исключённого третьего.

Алгоритм упрощения логических выражений:

- 1. Заменить все «небазовые» операции (исключающее ИЛИ, импликацию, эквивалентность и др.) на их выражения через базовые операции «НЕ», «И» и «ИЛИ».
- 2. Раскрыть отрицания сложных выражений по законам де Моргана так, чтобы операции отрицания остались только у отдельных переменных.
- 3. Используя вынесение общих множителей за скобки, раскрытие скобок и другие законы алгебры логики, упростить выражение.

Задачи.

Упростите логические выражения:

а) $A \cdot B \cdot \bar{A} \cdot B + B$;

б) $(A + B) \cdot (\bar{A} + \bar{B})$;

в) $A + A \cdot B + A \cdot C$;

г) $A + \bar{A} \cdot B + \bar{A} \cdot C$;

д) $A \cdot (A + B + C)$;

е) $A \cdot B + \bar{B} + \bar{A} \cdot B$;

ж) $(\bar{A} + B) \cdot \bar{C} \cdot (C + A \cdot \bar{B})$;

з) $\bar{A} \cdot \bar{C} + A \cdot B + \bar{A} \cdot C + A \cdot \bar{B}$;

и) $A \cdot (\bar{B} \cdot \bar{C} + B \cdot C) + A \cdot (B \cdot \bar{C} + \bar{B} \cdot C)$.

Домашнее задание.

- Упростите логические выражения:

а) $\overline{A \cdot (B + C)}$;

б) $\overline{(A + B)} + \overline{(A + B)} + A \cdot B$;

в) $A + \overline{(A + B)} + \overline{A} \cdot B$;

г) $\overline{(A + B + C)}$;

д) $\overline{(A + B)} \cdot A \cdot \overline{B}$;