Упрощение логических выражений

10 класс

Для упрощения логических выражений используют законы алгебры логики. Они формулируются для базовых логических операций — «НЕ», «И» и «ИЛИ».

название	для И	для ИЛИ
двойного отрицания	$\overline{\overline{A}} = A$	
исключения третьего	$A \cdot \overline{A} = 0$	$A + \overline{A} = 1$
операции с константами	$A \cdot 0 = 0,\ A \cdot 1 = A$	$A + 0 = A,\ A + 1 = 1$
повторения	$A \cdot A = A$	$A + A = A$
поглощения	$A \cdot (A + B) = A$	$A + A \cdot B = A$
переместительный	$A \cdot B = B \cdot A$	$A + B = B + A$
сочетательный	$A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C$	$A + (B + C) = (A + B) + C$
распределительный	$A + B \cdot C = (A + B) \cdot (A + C)$	$A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$
законы де Моргана	$\overline{A \cdot B} = \overline{A} + \overline{B}$	$\overline{A + B} = \overline{A} \cdot \overline{B}$

название	для И	для ИЛИ
двойного отрицания	$\overline{\overline{A}} = A$	
исключения третьего	$A \cdot \overline{A} = 0$	$A + \overline{A} = 1$

- Закон двойного отрицания означает, что операция «НЕ» обратима: если применить ее два раза, логическое значение не изменится.
- Закон исключённого третьего основан на том, что в классической (двузначной) логике любое логическое выражение либо истинно, либо ложно («третьего не дано»). Поэтому если $A = 1$, то $A = 0$ (и наоборот), так что произведение этих величин всегда равно нулю, а сумма — единице.

название	для И	для ИЛИ
двойного отрицания	$\overline{\overline{A}} = A$	
исключения третьего	$A \cdot \overline{A} = 0$	$A + \overline{A} = 1$
операции с константами	$A \cdot 0 = 0,\ A \cdot 1 = A$	$A + 0 = A,\ A + 1 = 1$
повторения	$A \cdot A = A$	$A + A = A$
поглощения	$A \cdot (A + B) = A$	$A + A \cdot B = A$
переместительный	$A \cdot B = B \cdot A$	$A + B = B + A$
сочетательный	$A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C$	$A + (B + C) = (A + B) + C$

- Операции с константами и закон повторения легко проверяются по таблицам истинности операций «И» и «ИЛИ».
- Переместительный и сочетательный законы выглядят вполне привычно, так же, как и в арифметике. Почти везде «работает» аналогия с алгеброй чисел, нужно только помнить, что в логике 1 + 1 = 1, а не 2.

название	для И	для ИЛИ
двойного отрицания	$\overline{\overline{A}} = A$	
исключения третьего	$A \cdot \overline{A} = 0$	$A + \overline{A} = 1$
операции с константами	$A \cdot 0 = 0,\ \ A \cdot 1 = A$	$A + 0 = A,\ \ A + 1 = 1$
повторения	$A \cdot A = A$	$A + A = A$
поглощения	$A \cdot (A + B) = A$	$A + A \cdot B = A$
переместительный	$A \cdot B = B \cdot A$	$A + B = B + A$
сочетательный	$A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C$	$A + (B + C) = (A + B) + C$
распределительный	$A + B \cdot C = (A + B) \cdot (A + C)$	$A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$
законы де Моргана	$\overline{A \cdot B} = \overline{A} + \overline{B}$	$\overline{A + B} = \overline{A} \cdot \overline{B}$

- Распределительный закон для операции «ИЛИ» — это обычное раскрытие скобок. А вот для операции «И» мы видим незнакомое выражение, в алгебре чисел это равенство неверно.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО РАСПРЕДЕЛИТЕЛЬНОГО ЗАКОНА

- Доказательство можно начать с правой части, раскрыв скобки:

$$\mathbf{(A + B) \cdot (A + C) = A \cdot A + A \cdot C + B \cdot A + B \cdot C}$$

- Дальше используем закон повторения ($A \cdot A = A$) и заметим, что

$$\mathbf{A + A \cdot C = A \cdot (1 + C) = A \cdot 1 = A}$$

- Аналогично доказываем, что $A + B \cdot A = A \cdot (1 + B) = A$, таким образом:

$$\mathbf{(A + B) \cdot (A + C) = A + B \cdot C}$$

- Равенство доказано. Мы доказали также и закон поглощения для операции «И» (для операции «ИЛИ» вы можете сделать это самостоятельно). Отметим, что из распределительного закона следует полезное тождество:

$$\mathbf{A + \overline{A} \bullet B = (A + \overline{A}) \bullet (A + B) = A + B}$$

Правила, позволяющие раскрывать отрицание сложных выражений, названы в честь шотландского математика и логика Огастеса (Августа) де Моргана. Обратите внимание, что при этом не просто «общее» отрицание переходит на отдельные выражения, но и операция «И» заменяется на «ИЛИ» (и наоборот). Доказать законы де Моргана можно с помощью таблиц истинности.

Теперь с помощью приведённых законов алгебры логики упростим логическое выражение:

$$(A \bullet B \bullet \overline{C}) + \overline{A} \bullet B \bullet \overline{C} = \underbrace{(A + \overline{A})} \bullet B \bullet \overline{C} = B \bullet \overline{C}$$

1. Вынесли общий множитель двух слагаемых за скобки
2. Применили закон исключённого третьего.

Алгоритм упрощения логических выражений:

- 1. Заменить все «небазовые» операции (исключающее ИЛИ, импликацию, эквивалентность и др.) на их выражения через базовые операции «НЕ», «И» и «ИЛИ».
- 2. Раскрыть отрицания сложных выражений по законам де Моргана так, чтобы операции отрицания остались только у отдельных переменных.
- 3. Используя вынесение общих множителей за скобки, раскрытие скобок и другие законы алгебры логики, упростить выражение.

Задачи.
Упростите логические выражения:

а) $A \cdot B \cdot \overline{A} \cdot B + B$;

б) $(A + B) \cdot (\overline{A} + \overline{B})$;

в) $A + A \cdot B + A \cdot C$;

г) $A + \overline{A} \cdot B + \overline{A} \cdot C$;

д) $A \cdot (A + B + C)$;

е) $A \cdot B + \overline{B} + \overline{A} \cdot B$;

ж) $(\overline{A} + B) \cdot \overline{C} \cdot (C + A \cdot \overline{B})$;

з) $\overline{A} \cdot \overline{C} + A \cdot B + \overline{A} \cdot C + A \cdot \overline{B}$;

и) $A \cdot (\overline{B} \cdot \overline{C} + B \cdot C) + A \cdot (B \cdot \overline{C} + \overline{B} \cdot C)$.

Домашнее задание.

- Упростите логические выражения:

а) $A \cdot \overline{(\overline{B} + C)}$;

б) $\overline{(A + \overline{B})} + \overline{(A + B)} + A \cdot B$;

в) $A + \overline{(A + B)} + \overline{A} \cdot B$;

г) $\overline{(A + \overline{B} + \overline{C})}$;

д) $\overline{(A + B)} \cdot A \cdot \overline{B}$;