Интегральное исчисление

Первообразная функция

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Пусть $f(x)$ и $F(x)$ определены на $X \subseteq \mathbb{R}$.*

Функция $F(x)$ называется ***первообразной*** *для функции $f(x)$ на промежутке $X \subseteq \mathbb{R}$, если $F(x)$ дифференцируема на X и $\forall x \in X$ выполняется равенство*

$$F'(x) = f(x) .$$

ПРИМЕРЫ.

1) $F(x) = \sin x$ – первообразная для $f(x) = \cos x$ на $\mathbb{R}$, т.к.

$$(\sin x)' = \cos x , \quad \forall x \in \mathbb{R};$$

2) $F(x) = \ln|\, x\,|$ – первообразная для $f(x) = \dfrac{1}{x}$ на любом промежутке, не содержащем точки $x = 0$, т.к.

$$\left(\ln|x|\right)' = \frac{1}{x}$$

Основная задача дифференциального исчисления:

для функции $f(x)$ найти $f'(x)$.

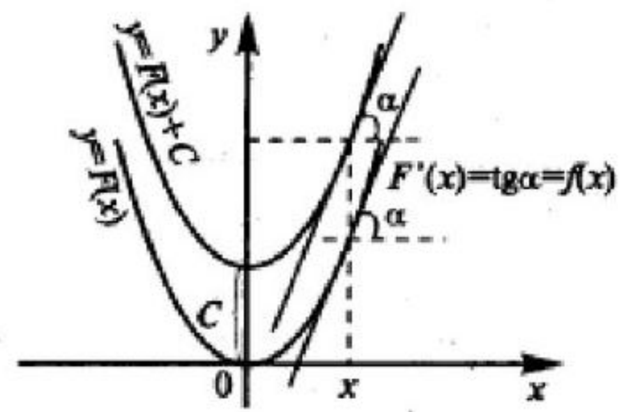
Обратная задача: известна $f'(x)$, требуется найти $f(x)$.

Геометрический смысл первообразной

Геометрический смысл производной: ***F'(x)*** **–** угловой коэффициент касательной к кривой ***y=F(x)*** в точке x.

Геометрически найти первообразную для ***f(x)***, значит, найти такую кривую ***F(x)***, что угловой коэффициент касательной к ней в произвольной точке ***x*** равен значению ***f(x)*** заданной функции в этой точке

Если найдена одна кривая ***y=F(x)***, удовлетворяющая условию ***F'(x)=tgα***, то сдвигая ее вдоль оси ординат, мы получим кривые, отвечающие указанному условию



Теорема.

Если $y = F(x)$ – первообразная для функции $y = f(x)$ на промежутке X,
то у функции $y = f(x)$ бесконечно много первообразных и все они имеют вид
$y = F(x) + C$.

Доказательство.

1. Пусть $y = F(x)$ – первообразная для $y = f(x)$, на промежутке X $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \forall x \in X: \quad F'(x) = f(x);$$

$$(F(x) + C)' = F'(x) + C' = f(x) + 0 = f(x);$$

$(F(x) + C)' = f(x) \Rightarrow y = F(x) + C$ – первообразная для $y = f(x)$;

2. Пусть $y = F_1(x)$ и $y = F\ (x)$ – две первообразные для $y = f(x)$, на промежутке X $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \forall x \in X: \quad F'(x) = f(x), \ \ F_1{}'(x) = f(x);$$

$$(F_1(x) - F(x))' = F_1(x)' - F(x)' = f(x) - f(x) = 0;$$

$$F_1(x) - F(x) = C \quad \Rightarrow \quad F_1(x) = F(x) + C;$$

или

Теорема: Две различные первообразные одной и той же функции, определенной на некотором промежутке, отличаются друг от друга на этом промежутке на постоянное слагаемое.

Доказательство:

$f(x)$ - некоторая функция

$F_1(x)$ и $F_2(x)$ - первообразные

т.е. $F_1' = f; F_2' = f \Rightarrow F_1' = F_2' \Rightarrow F_1 - F_2 = C$

Неопределённый интеграл

Определение. Совокупность $F(x) + C$ всех первообразных функции $y = f(x)$ на множестве X называется *неопределенным интегралом функции* $y = f(x)$.

Обозначение. $\int f(x)dx$

- при этом $f(x)$ называют *подынтегральная функция,*
- $f(x)\,dx$ – *подынтегральное выражение,*
- а $\int$ – *знак интеграла.*

С геометрической точки зрения неопределенный интеграл представляет собой однопараметрическое семейство кривых $y = F(x) + C$ (C – параметр), обладающих следующим свойством: все касательные к кривой в точках с абсциссой $x = x_0$ параллельны между собой.

Свойства неопределённого интеграла

1. Постоянный множитель можно вынести за знак интеграла:

$$\int k f(x)dx = k\int f(x)dx,\ k \neq 0.$$

2. Неопределенный интеграл от алгебраической суммы двух функций равен сумме неопределенных интегралов от этих функций:

$$\int (f(x) \pm \varphi(x))dx = \int f(x)dx \pm \int \varphi(x)dx\ .$$

3. Производная неопределенного интеграла равна подынтегральной функции:

$$\left(\int f(x)dx\right)' = f(x).$$

4. Дифференциал неопределенного интеграла равен подынтегральному выражению:

$$d\left(\int f(x)dx\right) = f(x)dx\ .$$

5. Неопределенный интеграл от дифференциала некоторой функции равен этой функции плюс константа:

$$\int dF(x) = F(x) + C\ .$$

Замечание. Формула $\int dF(x) = F(x) + C$ остается справедливой, если вместо x подставить любую дифференцируемую функцию.

Таблица неопределённых интегралов

1. $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$, $n \neq -1$.

2. $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$, $x \neq 0$.

3. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$, $a > 0, a \neq 1$.

4. $\int e^x dx = e^x + C$.

5. $\int \sin x\, dx = -\cos x + C;$ $\int \sin ax\, dx = -\frac{1}{a}\cos ax + C, a \neq 0.$

6. $\int \cos x\, dx = \sin x + C;$ $\int \cos ax\, dx = \frac{1}{a}\sin ax + C, a \neq 0.$

7. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = tgx + C, x \neq \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in Z;$ $\int \frac{dx}{\cos^2 ax} = \frac{1}{a} tgax + C, a \neq 0,\ x \neq \frac{\pi}{2a} + \frac{\pi k}{a}, k \in Z.$

8. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -ctgx + C, x \neq \pi k, k \in Z;$ $\int \frac{dx}{\sin^2 ax} = -\frac{1}{a} ctgax + C, a \neq 0,\ x \neq \frac{\pi k}{2} + \pi k, k \in Z.$

9. $\int tgx\, dx = -\ln|\cos x| + C,\ x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in Z$.

10. $\int ctgx\, dx = \ln|\sin x| + C$, $x \neq \pi k, k \in Z$.

11. $\int \frac{dx}{1+x^2} = arctgx + C;$ $\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a} arctg\frac{x}{a} + C, a \neq 0.$

12. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C, |x| < 1;$ $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + C, |x| < a.$

13. $\int \frac{dx}{a^2-x^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{a+x}{a-x}\right| + C,$ $a \neq 0, x \neq \pm a$.

14. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm a}\right| + C$.

Методы интегрирования

1. Непосредственное интегрирование

Непосредственным интегрированием называется такой метод вычисления интегралов, при котором они сводятся к табличным путём применения к ним основных свойств неопределённого интеграла. При этом подынтегральную функцию обычно соответствующим образом преобразуют.

Примеры.

$$\int (5x^4 - 6x^2 + 2)dx = \int 5x^4 dx - \int 6x^2 dx + \int 2dx =$$
$$= x^5 - 2x^3 + 2x + C$$

$$\int (1 - \sin x)dx = \int dx - \int \sin x dx = x + \cos x + C$$

Методы интегрирования

2. Замена переменных в неопределённом интеграле

Метод основан на замене переменной в неопределенном интеграле с целью свести его нахождение к нахождению такого неопределенного интеграла, который может быть найден методом разложения.

Найти $\int f(x)\,dx$

пусть $x = \varphi(t)$, тогда $dx = \varphi'(t)dt$

$$\int f(x)\,dx = \int f[\varphi(t)]\varphi'(t)\,dt$$

2. Замена переменных в неопределённом интеграле

Первый метод подстановки. $\boxed{\int f(x)dx = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt.}$

$(x=\varphi(t)$ – монотонная и непрерывно дифференцируемая функция)

Порядок вычисления интеграла:

1) Независимую переменную x заменяют по формуле $x=\varphi(t)$.

2) Дифференциал записывают в виде: $dx = d(\varphi(t)) = \varphi'(t)dt$.

3) Вычисляют полученный интеграл.

4) В полученном значении первообразной осуществляют обратную замену: $t=\psi(x)$, где функция ψ является обратной для функции φ. $(\psi=\varphi^{-1})$

Второй метод подстановки. $\varphi(x)=z$ и $\varphi'(x)dx=dz$.

$$\boxed{\int f(\varphi(x))\varphi'(x)dx = \int f(z)dz.}$$

2. Замена переменных в неопределённом интеграле

Пример Найдем неопределенный интеграл $\int \sin^2 x \cos x\, dx$.

$$\int \sin^2 x \cos x\, dx = \left| \begin{array}{c} t = \sin x \\ dt = \cos x\, dx \end{array} \right| = \int t^2 dt = \frac{t^3}{3} + C = \frac{1}{3}\sin^3 x + C.$$

Пример Найдем неопределенный интеграл $\int \frac{dx}{x \ln x}$.

$$\int \frac{dx}{x \ln x} = \left| \begin{array}{l} t = \ln x \\ dt = \frac{dx}{x} \end{array} \right| = \int \frac{dt}{t} = \ln|t| + C = \ln|\ln x| + C.$$

Методы интегрирования

3. Интегрирование по частям в неопределённом интеграле

Формула $$\int u\,dv = uv - \int v\,du,$$

где $u = u(x)$ и $v = v(x)$ – дифференцируемые функции, называется

формулой интегрирования по частям.

3. Интегрирование по частям в неопределённом интеграле

по формуле дифференцирования произведения

$$d(uv) = u \cdot dv + v \cdot du \rightarrow u \cdot dv = d(uv) - v \cdot du.$$

Находим неопределённые интегралы для обеих частей этого равенства (при этом $\int d(uv) = uv + C$):

$$\int u \cdot dv = uv - \int v \cdot du$$

Или:

$$\int u \cdot v' dx = uv - \int v \cdot u' dx$$

3. Интегрирование по частям в неопределённом интеграле

Интегрирование по частям состоит в том,что подынтегральное выражение заданного интеграла представляется каким-либо образом в виде произведения двух сомножителей U и dv

Затем,после нахождения v и dU используется формула интегрирования по частям. Иногда эту формулу приходится использовать несколько раз.

Таблица типичных интегралов, к которым применима формула интегрирования по частям

$\int u dv$	u	dv	
$\int x \sin x dx$ $\int x \cos x dx$	x x	$\sin x\, dx$ $\cos x\, dx$	
$\int P_n(x) \sin x dx$ $\int P_n(x) \cos x dx$ (где $P_n(x)$ - многочлен степени n)	$P_n(x)$ $P_n(x)$	$\sin x\, dx$ $\cos x\, dx$	Применить формулу n раз
$\int x \cdot e^x dx$ $\int x \cdot a^x dx$	x x	$e^x dx$ $a^x dx$	
$\int P_n(x) \cdot e^x dx$ $\int P_n(x) \cdot a^x dx$	$P_n(x)$ $P_n(x)$	$e^x dx$ $a^x dx$	Применить формулу n раз
$\int \ln x dx$ $\int \log_a x dx$	$\ln x$ $\log_a x$	dx dx	
$\int P_n(x) \cdot \ln x dx$ $\int P_n(x) \cdot \log_a x dx$	$\ln x$ $\log_a x$	$P_n(x) dx$ $P_n(x) dx$	
$\int arctg\, x\, dx$ ($arcctg\, x$, $arcsin\, x$, $arccos\, x$)	$arctg\, x$ ($arcctg\, x$, $arcsin\, x$ $arccos\, x$)	dx	
$\int P_n(x) arctg\, x dx$ $\int P_n(x) arcctg\, x dx$	$arctg\, x$ $arcctg\, x$	$P_n(x) dx$ $P_n(x) dx$	
$\int e^{ax} \sin bx\, dx$ $\int e^{ax} \cos bx\, dx$	e^{ax} (или $\sin bx$) e^{ax} (или $\cos bx$)	$\sin bx\, dx$ (или $e^{ax}\, dx$) $\cos bx\, dx$ (или $e^{ax}\, dx$)	Применить формулу 2 раза

3. Интегрирование по частям в неопределённом интеграле

Вычислить интеграл $\int \ln x \, dx$

$$\begin{bmatrix} u = \ln x & dv = dx \\ du = \dfrac{dx}{x} & v = x \end{bmatrix}$$

$$\int \ln x \, dx = x \ln x - \int x \cdot \frac{dx}{x} = x \ln x - \int dx = x \ln x - x + C$$

Интегрирование рациональных функций

- Рациональная дробь есть отношение двух многочленов целой степени

$$R(x)=\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}=\frac{a_n x^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_2x^2+a_1x+a_0}{b_m x^m+b_{m-1}x^{m-1}+\cdots+b_2x^2+b_1x+b_0}$$

- Если $n<m$, то дробь называется правильной. Если $n\geq m$, то дробь называется неправильной.
- Прежде, чем интегрировать неправильную дробь, следует выделить целую часть дроби путем деления многочлена $P_n(x)$ на многочлен $Q_m(x)$.
- *Пример*

$$\frac{3x^3-4x^2+x-5}{x^2-2x-1}=(3x+2)+\frac{8x-3}{x^2-2x-1}$$

- Дробь представляется в виде суммы целой части (многочлена целой степени) и правильной дроби.

Интегрирование рациональных функций

Простейшими элементарными дробями называются дроби следующего вида:

1. $\frac{A}{x-a}$;

2. $\frac{A}{(x-a)^m}$, $m > 1$, целое;

3. $\frac{Ax+B}{x^2+px+q}$, где квадратный трехчлен не имеет действительных корней;

4. $\frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^k}$, где квадратный трехчлен не имеет действительных корней.

Интегрирование рациональных функций

Теорема. Пусть $P_m(x)\ /Q_n(x)$ – правильная рациональная дробь, знаменатель которой представлен в виде произведения линейных и квадратичных множителей (с вещественными коэффициентами)

$$Q_n(x) = a\,(x-x_1)^k\,(x-x_2)^l \ldots (x^2+r\,x+s)^{\lambda} \ldots (x^2+p\,x+q)^s\,,$$

где $x_1, x_2, \ldots$ – вещественные корни, $(x^2+p\,x+q)$, … $(x^2+r\,x+s)$ – квадратные трехчлены, не разложимые на вещественные множители ($k+l+\ldots+\lambda+\ldots+s=n$). Тогда имеет место разложение

$$\frac{P_m(x)}{Q_n(x)} = \frac{A_1}{x-x_1} + \frac{A_2}{(x-x_1)^2} + \ldots + \frac{A_\alpha}{(x-x_1)^k} + \frac{B_1}{(x-x_2)} + \frac{B_2}{(x-x_2)^2} + \ldots + \frac{B_\beta}{(x-x_2)^l} + \ldots$$

$$+ \frac{M_1 x + N_1}{(x^2+px+q)} + \ldots + \frac{M_{\lambda-1} x + N_{\lambda-1}}{(x^2+px+q)^{\lambda-1}} + \frac{M_\lambda x + N_\lambda}{(x^2+px+q)^\lambda} + \ldots + \frac{R_s x + S_s}{(x^2+rx+s)^s}\,,$$

где A_i, B_i, M_i, N_i, R_i, S_i, … – вещественные числа (некоторые из которых могут быть равны нулю).

Интегрирование рациональных функций

$$\frac{R(x)}{(x-a)^{\alpha}(x^2+px+q)^{\beta}\ldots}=\frac{A_1}{(x-a)}+\ldots\frac{A_{\alpha}}{(x-a)^{\alpha}}+\frac{M_1x+N_1}{(x^2+px+q)}+\ldots$$

$$+\frac{M_{\beta}x+N_{\beta}}{(x^2+px+q)^{\beta}}+\ldots$$

Интегрирование рациональных функций

пример

$$\int \frac{(x^2+4x-5)dx}{(x+2)(x-3)(2x+1)}$$

$$\frac{(x^2+4x-5)}{(x-3)(x+2)(2x+1)} = \frac{A}{x-3} + \frac{B}{x+2} + \frac{C}{2x+1}$$

$$x^2+4x-5 = A(2x^2+5x+2) + B(2x^2-5x-3) + C(x^2-x-6)$$

$$x^2 \left| 2A+2B+C=1 \right.$$

$$x^1 \left| 5A-5B-C=4 \right.$$

$$x^0 \left| 2A-3B-6C=-5 \right.$$

$$A=\frac{16}{35},\ B=-\frac{21}{35},\ C=\frac{45}{35}$$

$$\int \frac{(x^2+4x-5)dx}{(x+2)(x-3)(2x+1)} = \frac{16}{35}\int\frac{dx}{x-3} - \frac{21}{35}\int\frac{dx}{x+2} + \frac{45}{35}\int\frac{dx}{2x+1} =$$

$$= \frac{16}{35}\ln|x-3| - \frac{21}{35}\ln|x+2| + \frac{45}{70}\ln|2x+1| + C$$

Интегрирование некоторых иррациональных функций

I. Пусть $\int R(x; x^{\frac{m}{n}}, \ldots, x^{\frac{r}{s}})\, dx$ – рациональная функция своих аргументов; $m, n, \ldots, r, s$ – целые числа.

Пусть k – общий знаменатель дробей $\frac{m}{n}, \ldots, \frac{r}{s}$. Тогда подстановка $\boldsymbol{x = t^k,\ dx = k \cdot t^{k-1}\, dt}$ преобразует данный интеграл в интеграл от рациональной функции.

II. Пусть $\int R\left(x; \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{m}{n}}, \ldots, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{r}{s}}\right) dx$, тогда подстановка $\boldsymbol{\frac{ax+b}{cx+d} = t^k}$, где k – общий знаменатель дробей $\frac{m}{n}, \ldots, \frac{r}{s}$.

Интегрирование иррациональностей

Интегралы вида $\int R(x;\sqrt[n]{ax+b})dx$.

Интегралы вида $\int R(x;\sqrt[n]{ax+b})dx$, где $R(x;\sqrt[n]{ax+b})$ – рациональное выражение относительно x и $\sqrt[n]{ax+b}$, n – целое положительное число не меньшее двух, могут быть сведены к интегралам от рациональных функций с помощью замены переменной:

$$ax+b=t^n, \text{ тогда } x=\frac{t^n-b}{a},\ dx=\frac{nt^{n-1}}{a}dt,\ \ \sqrt[n]{ax+b}=t.$$

Следовательно, $\int R(x;\sqrt[n]{ax+b})dx=\int R\left(\frac{t^n-b}{a};t\right)\frac{nt^{n-1}}{a}dt.$

Интеграл в правой части последнего равенства может быть найден приемами, изложенными ранее.

При решении большинства типов интегралов от иррациональных функций применяется метод замены переменной (или подстановки).
Целью замены является избавление от иррациональности.

- 1. $\int \frac{\sqrt{x}}{1-\sqrt[4]{x}}dx = \left| \begin{matrix} x = t^4, \ dx = 4t^3dt \\ 1-\sqrt[4]{x} = 1-t, \quad t\sqrt[4]{x} \end{matrix} \right| = \int \frac{t^2 \cdot 4t^3dt}{1-t} = 4\int \frac{t^5\,dt}{1-t} =$

$= 4\int\left(-t^4 - t^3 - t^2 - t - 1 + \frac{1}{1-t}\right)dt =$ (здесь выполнено деление t^5 на $(1-t)$)

$= 4\left(-\frac{t^5}{5} - \frac{t^4}{4} - \frac{t^3}{3} - \frac{t^2}{2} - t - \ln|1-t|\right) =$ (возвращаемся к переменной x)

$$= 4\left(-\frac{\sqrt[4]{x^5}}{5} - \frac{x}{4} - \frac{\sqrt[4]{x^3}}{3} - \frac{\sqrt{x}}{2} - \sqrt[4]{x} - \ln|1-\sqrt[4]{x}|\right) + c$$

Квадратичные иррациональности

Рассмотрим некоторые типы интегралов,содержащих иррациональные функции.

Интегралы типа $\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}, \int \sqrt{ax^2+bx+c}\,dx, \int \frac{mx+n}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx$

Называют неопределенными интегралами от квадратичных иррациональностей.Их можно найти следующим образом: **под радикалом выделить полный квадрат:**

$$ax^2+bx+c = a(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}) = a((x+\frac{b}{2a})^2+\frac{c}{a}-\frac{b^2}{4a^2}) =$$

$= a((x+\frac{b}{2a})^2+\frac{4ac-b^2}{4a^2})$ и сделать подстановку $x+\frac{b}{2a}=t$

Квадратичные иррациональности

$$\int \frac{dx}{\sqrt{8-2x-2x^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{2(4-x-x^2)}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \int \frac{dx}{\sqrt{4-x-x^2}} = I$$

Выделим в подкоренном выражении полный квадрат:

$$4-x-x^2 = -(x^2+x-4) = -\left[\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} - 4\right] =$$

$$= -\left[\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{17}{4}\right] = \left(\frac{\sqrt{17}}{2}\right)^2 - \left(x+\frac{1}{2}\right)^2$$

Интегрирование некоторых иррациональных функций

Интеграл вида $\int \frac{Mx+N}{(x-a)\sqrt{ax^2+bx+c}}dx$ находят подстановкой

$$x-a=\frac{1}{t}$$

пример

$$\int\frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2+3x+3}}=[x+1=\frac{1}{t};x=\frac{1}{t}-1;dx=-\frac{dt}{t^2}]=-\int\frac{-\frac{dt}{t^2}}{\frac{1}{t}\sqrt{(\frac{1}{t}-1)^2+3(\frac{1}{t}-1)+3}}=$$

$$=-\int\frac{dt}{\sqrt{t^2+t+1}}=-\int\frac{dt}{\sqrt{(t+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}}=-\ln|t+\frac{1}{2}+\sqrt{t^2+t+1}|+C=\ln|\frac{1}{x+1}+\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{x^2+3x+3}}{x+1}|+C$$

Универсальная тригонометрическая подстановка

Рассмотрим интегралы вида: $\int R(\sin x; \cos x)dx$, где $R(\sin x; \cos x)$ – рациональная функция.

Универсальная тригонометрическая подстановка.

Из тригонометрии известно, что все тригонометрические функции аргумента x рационально выражаются через тангенс половинного аргумента:

$$\sin x = \frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}, \qquad \cos x = \frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}.$$

Поэтому с помощью формул:

$$\operatorname{tg}\frac{x}{2} = t,\ \sin x = \frac{2t}{1+t^2},\quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2},\qquad dx = \frac{2dt}{1+t^2}$$

интеграл $\int R(\sin x; \cos x)dx$ сводится к интегралу

$$\int R\left(\frac{2t}{1+t^2}; \frac{1-t^2}{1+t^2}\right)\frac{2dt}{1+t^2} = \int R_1(t)dt,$$

где $R_1(t)$ – рациональная функция t

С помощью универсальной подстановки находятся интегралы вида:

$$\int \frac{dx}{a\sin x + b\cos x + c}, \quad \int \frac{dx}{\cos x}, \quad \int \frac{dx}{2\cos x + 5}, \quad \int \frac{\sin x\,dx}{(3\sin x - 2)^2}.$$

- 1. $$\int \frac{dx}{2-4\sin x} = \left| \begin{array}{l} \operatorname{tg}\dfrac{x}{2} = t, \quad dx = \dfrac{2dt}{1+t^2} \\ \sin x = \dfrac{2t}{1+t^2} \end{array} \right| = \int \frac{\dfrac{2dt}{1+t^2}}{2-4\dfrac{2t}{1+t^2}} = \int \frac{2dt}{2t^2-8t+2} =$$

$$= \int \frac{dt}{t^2-4t+1} = \int \frac{dt}{(t-2)^2-3} = \frac{1}{2\sqrt{3}} \ln\left|\frac{t-2-\sqrt{3}}{t-2+\sqrt{3}}\right| = \frac{1}{2\sqrt{3}} \ln\left|\frac{\operatorname{tg}(x/2)-2-\sqrt{3}}{\operatorname{tg}(x/2)-2+\sqrt{3}}\right| + c$$

Интегрирование тригонометрических функций

$\boxed{\int R(\sin x, \cos x)dx}$, где R – рациональная функция .

1. Универсальная подстановка: $t = \operatorname{tg}\dfrac{x}{2} \Rightarrow x = 2\cdot\operatorname{arctg} t$, $dx = \dfrac{2dt}{1+t^2}$

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2} \qquad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

2. Упрощенные подстановки.

a) $\boxed{R(-\sin x, \cos x) = -R(\sin x, \cos x)}$ Подстановка: $t = \cos x$

b) $\boxed{R(\sin x, -\cos x) = -R(\sin x, \cos x)}$ Подстановка: $t = \sin x$

c) $\boxed{R(-\sin x, -\cos x) = R(\sin x, \cos x)}$ $\boxed{R(\operatorname{tg} x)}$ Подстановка: $t = \operatorname{tg} x$

d) $\boxed{R(\operatorname{ctg} x)}$ Подстановка: $t = \operatorname{ctg} x$

Интегрирование тригонометрических функций

II. Интегралы вида $\boxed{\int \sin^m x \cos^n x dx}$, где n и m – целые.

1. Если n и m – четные, положительные, то применяются формулы понижения степени:

$$\sin^2\alpha = \frac{1-\cos 2\alpha}{2} \qquad \cos^2\alpha = \frac{1+\cos 2\alpha}{2} \qquad 2\sin\alpha\cos\alpha = \sin 2\alpha$$

2. Если n или m – нечетное, то непосредственно отделяют от нечетной степени один множитель.

3. Если n и m – дробные или целые отрицательные и $(n+m)$ четное отрицательное, то замена $t = \operatorname{tg} x$, иди $t = \operatorname{ctg} x$.

пример

$$\int \cos^2 3x \sin^4 3x dx = \int (\cos 3x \sin 3x)^2 \sin^2 3x dx =$$

$$= \int \frac{\sin^2 6x}{4} \cdot \frac{1-\cos 6x}{2} dx = \frac{1}{8} \int \left(\sin^2 6x - \sin^2 6x \cos 6x \right) dx =$$

$$= \frac{1}{8} \int \left(\frac{1-\cos 12x}{2} - \sin^2 6x \cos 6x \right) dx =$$

$$= \frac{1}{8} \left(\frac{x}{2} - \frac{\sin 12x}{24} - \frac{1}{18} \sin^3 6x \right) + C$$

пример

$$\int \sin^8 x \cdot \cos^3 x\, dx = \int \sin^8 x\, (1 - \sin^2 x)(\cos x\, dx) =$$

$$= \int t^8 (1 - t^2) dt = \int (t^8 - t^{10}) dt = \frac{t^9}{9} - \frac{t^{11}}{11} + C =$$

$$= \frac{1}{9} \sin^9 x - \frac{1}{11} \sin^{11} x + C.$$

Для преобразования рациональных выражений от sin *x*, cos *x*, tg *x*, ctg *x* в алгебраические рациональные функции переменной *t* применяются следующие тригонометрические формулы:

$$\sin x = \frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}} = \frac{2t}{1+t^2}$$

$$\cos x = \frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}} = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

$$\operatorname{tg} x = \frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}} = \frac{2t}{1-t^2}$$

$$\operatorname{ctg} x = \frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}} = \frac{1-t^2}{2t}$$

пример

$$\int \frac{dx}{1+\sin^2 x} = 2\int \frac{dx}{3-\cos 2x} \left| \begin{array}{l} tgx = t,\ x = arctgt \\ dx = \dfrac{dt}{1+t^2},\ \cos 2x = \dfrac{1-t^2}{1+t^2} \end{array} \right| =$$

$$= 2\int \frac{\dfrac{1}{1+t^2}}{3-\dfrac{1-t^2}{1+t^2}}dt = 2\int \left(1+2t^2\right)dt = 2t + \frac{4}{3}t^3 + C =$$

$$= 2tgx + \frac{4}{3}tg^3 x + C$$

Интегрирование тригонометрических функций

Интегралы вида

$$\int \sin ax \cos bx dx, \quad \int \cos ax \cos bx dx, \int \sin ax \sin bx dx, где \quad a \neq b$$

Находятся с помощью формул:

$$\sin ax \cos bx = \frac{1}{2}[\sin(a-b)x + \sin(a+b)x];$$

$$\cos ax \cos bx = \frac{1}{2}[\cos(a-b)x + \cos(a+b)x];$$

$$\sin ax \sin bx = \frac{1}{2}[\cos(a-b)x - \cos(a+b)x].$$

пример

$$\int \sin 9x \sin x dx = \frac{1}{2}\int \left[\cos 8x - \cos 10x\right] dx = \frac{1}{16}\sin 8x - \frac{1}{20}\sin 10x + C\ .$$

Интегрирование иррациональностей с помощью тригонометрических подстановок

Интегралы вида

$$\int R(x, \sqrt{a^2 - x^2})dx, \quad \int R(x, \sqrt{a^2 + x^2})dx, \quad \int R(x, \sqrt{x^2 - a^2})dx$$

вычисляют с помощью тригонометрических подстановок.

1. $$\int R(x, \sqrt{a^2 - x^2})dx; \quad x = a\sin z, \quad dx = a\cos z dz,$$

$$\sqrt{a^2 - x^2} = \sqrt{a^2 - a^2 \sin^2 z} = a\sqrt{1 - \sin^2 z} = a\cos z.$$

Интегрирование иррациональностей с помощью тригонометрических подстановок

2. $$\int R(x, \sqrt{a^2 + x^2})dx, \quad x = atgz, \quad dx = \frac{adz}{\cos^2 z},$$

$$\sqrt{a^2 + x^2} = \sqrt{a^2 + a^2 tg^2 z} = a\sqrt{1 + tg^2 z} = \frac{a}{\cos^2 z}.$$

3. $$\int R(x, \sqrt{x^2 - a^2})dx, \quad x = \frac{a}{\cos z}, \quad dx = \frac{a \sin z dz}{\cos^2 z},$$

$$\sqrt{x^2 - a^2} = \sqrt{\frac{a^2}{\cos^2 z} - a^2} = a\sqrt{\frac{1 - \cos^2 z}{\cos^2 z}} = a\frac{\sin z}{\cos z} = atgz.$$

пример

$$\int \frac{dx}{x^4\sqrt{a^2+x^2}} = \left\{ \begin{aligned} & x = atgt; dx = \frac{a}{\cos^2 t}dt; \\ & \sqrt{a^2+x^2} = \frac{a}{\cos^2 t}. \end{aligned} \right\} = \int \frac{a\cos t dt}{\cos^2 t a^4 tg^4 t a} = \int \frac{\cos^3 t dt}{a^4 \sin^4 t} = \frac{1}{a^4}\int \frac{(1-\sin^2 t)d\sin t}{\sin^4 t} =$$

$$= -\frac{1}{3a^4\sin^3 t} + \frac{1}{a^4 \sin t} + C = \left\{ \sin t = \sqrt{1-\frac{a^2}{a^2+x^2}} = \frac{x}{\sqrt{a^2+x^2}} \right\} = -\frac{(a^2+x^2)^{3/2}}{3a^4x^3} + \frac{\sqrt{a^2+x^2}}{a^4 x} + C.$$

пример

$$\int\sqrt{a^2-x^2}\,dx=\left\{\begin{aligned}&x=a\sin t;\\&dx=a\cos t\,dt\end{aligned}\right\}=\int\sqrt{a^2-a^2\sin^2 t}\,a\cos t\,dt=\int a^2\cos^2 t\,dt=\frac{a^2}{2}\int(1+\cos 2t)\,dt=$$

$$=\frac{a^2t}{2}+\frac{a^2}{4}\sin 2t+C=\frac{a^2t}{2}+\frac{a^2}{2}\sin t\cos t+C=\frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a}+\frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2}+C.$$