

# Интегральное исчисление

## Первообразная функция

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Пусть  $f(x)$  и  $F(x)$  определены на  $X \subseteq \mathbb{R}$ .

Функция  $F(x)$  называется **первообразной** для функции  $f(x)$  на промежутке  $X \subseteq \mathbb{R}$ , если  $F(x)$  дифференцируема на  $X$  и  $\forall x \in X$  выполняется равенство

$$F'(x) = f(x) .$$

ПРИМЕРЫ.

1)  $F(x) = \sin x$  – первообразная для  $f(x) = \cos x$  на  $\mathbb{R}$ , т.к.

$$(\sin x)' = \cos x, \quad \forall x \in \mathbb{R};$$

2)  $F(x) = \ln|x|$  – первообразная для  $f(x) = \frac{1}{x}$  на любом промежутке, не содержащем точки  $x = 0$ , т.к.

$$(\ln|x|)' = \frac{1}{x}$$

Основная задача дифференциального исчисления:

для функции  $f(x)$  найти  $f'(x)$ .

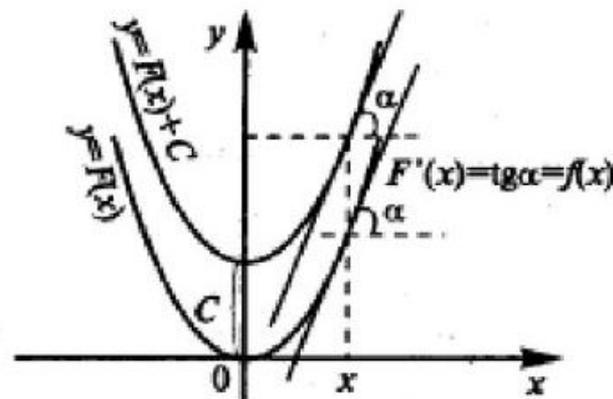
Обратная задача: известна  $f'(x)$ , требуется найти  $f(x)$ .

## Геометрический смысл первообразной

Геометрический смысл производной:  
 $F'(x)$  – угловой коэффициент  
касательной к кривой  $y=F(x)$  в точке  $x$ .

Геометрически найти первообразную  
для  $f(x)$ , значит, найти такую кривую  
 $F(x)$ , что угловой коэффициент  
касательной к ней в произвольной  
точке  $x$  равен значению  $f(x)$  заданной  
функции в этой точке

Если найдена одна кривая  $y=F(x)$ ,  
удовлетворяющая условию  $F'(x)=\operatorname{tg}\alpha$ ,  
то сдвигая ее вдоль оси ординат, мы  
получим кривые, отвечающие  
указанному условию



### Теорема.

Если  $y = F(x)$  – первообразная для функции  $y = f(x)$  на промежутке  $X$ , то у функции  $y = f(x)$  бесконечно много первообразных и все они имеют вид  $y = F(x) + C$ .

### Доказательство.

1. Пусть  $y = F(x)$  – первообразная для  $y = f(x)$ , на промежутке  $X \Rightarrow$

$$\Rightarrow \forall x \in X: F'(x) = f(x);$$

$$(F(x) + C)' = F'(x) + C' = f(x) + 0 = f(x);$$

$$(F(x) + C)' = f(x) \Rightarrow y = F(x) + C \text{ – первообразная для } y = f(x);$$

2. Пусть  $y = F_1(x)$  и  $y = F(x)$  – две первообразные для  $y = f(x)$ , на промежутке  $X \Rightarrow$

$$\Rightarrow \forall x \in X: F'(x) = f(x), F_1'(x) = f(x);$$

$$(F_1(x) - F(x))' = F_1'(x) - F'(x) = f(x) - f(x) = 0;$$

$$F_1(x) - F(x) = C \Rightarrow F_1(x) = F(x) + C;$$

ИЛИ

*Теорема:* Две различные первообразные одной и той же функции, определенной на некотором промежутке, отличаются друг от друга на этом промежутке на постоянное слагаемое.

*Доказательство:*

$f(x)$  - некоторая функция

$F_1(x)$  и  $F_2(x)$  - первообразные

$$\text{т.е. } F_1' = f; F_2' = f \Rightarrow F_1' = F_2' \Rightarrow F_1 - F_2 = C$$

# Неопределённый интеграл

**Определение.** Совокупность  $F(x) + C$  всех первообразных функции  $y = f(x)$  на множестве  $X$  называется *неопределённым интегралом* функции  $y = f(x)$ .

**Обозначение.**  $\int f(x) dx$

- ❖ при этом  $f(x)$  называют *подынтегральной функцией*,
- ❖  $f(x) dx$  – *подынтегральное выражение*,
- ❖ а  $\int$  – *знак интеграла*.

С **геометрической точки зрения** неопределённый интеграл представляет собой **однопараметрическое семейство кривых**  $y = F(x) + C$  ( $C$  – параметр), обладающих следующим свойством: все касательные к кривой в точках с абсциссой  $x = x_0$  параллельны между собой.

# Свойства неопределённого интеграла

1. Постоянный множитель можно вынести за знак интеграла:

$$\int k f(x) dx = k \int f(x) dx, k \neq 0.$$

2. Неопределенный интеграл от алгебраической суммы двух функций равен сумме неопределенных интегралов от этих функций:

$$\int (f(x) \pm \varphi(x)) dx = \int f(x) dx \pm \int \varphi(x) dx .$$

3. Производная неопределенного интеграла равна подынтегральной функции:

$$\left( \int f(x) dx \right)' = f(x).$$

4. Дифференциал неопределенного интеграла равен подынтегральному выражению:

$$d \left( \int f(x) dx \right) = f(x) dx .$$

5. Неопределенный интеграл от дифференциала некоторой функции равен этой функции плюс константа:

$$\int dF(x) = F(x) + C .$$

**Замечание.** Формула  $\int dF(x) = F(x) + C$  остается справедливой, если вместо  $x$  подставить любую дифференцируемую функцию.

## Таблица неопределённых интегралов

$$1. \int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, n \neq -1.$$

$$2. \int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C, x \neq 0.$$

$$3. \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C, a > 0, a \neq 1.$$

$$4. \int e^x dx = e^x + C.$$

$$5. \int \sin x dx = -\cos x + C; \quad \int \sin ax dx = -\frac{1}{a} \cos ax + C, a \neq 0.$$

$$6. \int \cos x dx = \sin x + C; \quad \int \cos ax dx = \frac{1}{a} \sin ax + C, a \neq 0.$$

$$7. \int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C, x \neq \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z}; \quad \int \frac{dx}{\cos^2 ax} = \frac{1}{a} \operatorname{tg} ax + C, a \neq 0, x \neq \frac{\pi}{2a} + \frac{\pi k}{a}, k \in \mathbb{Z}.$$

$$8. \int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C, x \neq \pi k, k \in \mathbb{Z}; \quad \int \frac{dx}{\sin^2 ax} = -\frac{1}{a} \operatorname{ctg} ax + C, a \neq 0, x \neq \frac{\pi k}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z}.$$

$$9. \int \operatorname{tg} x dx = -\ln|\cos x| + C, x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

$$10. \int \operatorname{ctg} x dx = \ln|\sin x| + C, x \neq \pi k, k \in \mathbb{Z}.$$

$$11. \int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x + C; \quad \int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C, a \neq 0.$$

$$12. \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C, |x| < 1; \quad \int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C, |x| < a.$$

$$13. \int \frac{dx}{a^2-x^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{a+x}{a-x} \right| + C, a \neq 0, x \neq \pm a.$$

$$14. \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a}} = \ln|x + \sqrt{x^2 \pm a}| + C.$$

# Методы интегрирования

## 1. Непосредственное интегрирование

Непосредственным интегрированием называется такой метод вычисления интегралов, при котором они сводятся к табличным путём применения к ним основных свойств неопределённого интеграла. При этом подынтегральную функцию обычно соответствующим образом преобразуют.

Примеры.

$$\begin{aligned}\int (5x^4 - 6x^2 + 2)dx &= \int 5x^4 dx - \int 6x^2 dx + \int 2dx = \\ &= x^5 - 2x^3 + 2x + C\end{aligned}$$

$$\int (1 - \sin x)dx = \int dx - \int \sin x dx = x + \cos x + C$$

## Методы интегрирования

### 2. Замена переменных в неопределённом интеграле

Метод основан на замене переменной в неопределенном интеграле с целью свести его нахождение к нахождению такого неопределенного интеграла, который может быть найден методом разложения.

Найти  $\int f(x) dx$

пусть  $x = \varphi(t)$  , тогда  $dx = \varphi'(t)dt$

$$\int f(x) dx = \int f[\varphi(t)]\varphi'(t) dt$$

## 2. Замена переменных в неопределённом интеграле

**Первый метод подстановки.**  $\int f(x) dx = \int f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt.$

( $x = \varphi(t)$  – монотонная и непрерывно дифференцируемая функция)

Порядок вычисления интеграла:

- 1) Независимую переменную  $x$  заменяют по формуле  $x = \varphi(t)$ .
- 2) Дифференциал записывают в виде:  $dx = d(\varphi(t)) = \varphi'(t) dt.$
- 3) Вычисляют полученный интеграл.
- 4) В полученном значении первообразной осуществляют обратную замену:  
 $t = \psi(x)$ , где функция  $\psi$  является обратной для функции  $\varphi$ . ( $\psi = \varphi^{-1}$ )

**Второй метод подстановки.**  $\varphi(x) = z$  и  $\varphi'(x) dx = dz.$

$$\int f(\varphi(x)) \varphi'(x) dx = \int f(z) dz.$$

## 2. Замена переменных в неопределённом интеграле

Пример Найдем неопределенный интеграл  $\int \sin^2 x \cos x dx$ .

$$\int \sin^2 x \cos x dx = \left. \begin{array}{l} t = \sin x \\ dt = \cos x dx \end{array} \right| = \int t^2 dt = \frac{t^3}{3} + C = \frac{1}{3} \sin^3 x + C.$$

Пример Найдем неопределенный интеграл  $\int \frac{dx}{x \ln x}$ .

$$\int \frac{dx}{x \ln x} = \left. \begin{array}{l} t = \ln x \\ dt = \frac{dx}{x} \end{array} \right| = \int \frac{dt}{t} = \ln|t| + C = \ln|\ln x| + C.$$

## Методы интегрирования

### 3. Интегрирование по частям в неопределённом интеграле

Формула  $\int u dv = uv - \int v du,$

где  $u = u(x)$  и  $v = v(x)$  – дифференцируемые функции, называется

**формулой интегрирования по частям.**

### 3. Интегрирование по частям в неопределённом интеграле

по формуле дифференцирования произведения

$$d(uv) = u \cdot dv + v \cdot du \rightarrow u \cdot dv = d(uv) - v \cdot du.$$

Находим неопределённые интегралы для обеих частей этого равенства (при этом  $\int d(uv) = uv + C$ ):

$$\int u \cdot dv = uv - \int v \cdot du$$

Или:

$$\int u \cdot v' dx = uv - \int v \cdot u' dx$$

### 3. Интегрирование по частям в неопределённом интеграле

Интегрирование по частям состоит в том, что подынтегральное выражение заданного интеграла представляется каким-либо образом в виде произведения двух сомножителей  $U$  и  $dv$ . Затем, после нахождения  $v$  и  $dU$  используется формула интегрирования по частям. Иногда эту формулу приходится использовать несколько раз.

# Таблица типичных интегралов, к которым применима формула интегрирования по частям

$\int u dv$	$u$	$dv$	
$\int x \sin x dx$	$x$	$\sin x dx$	
$\int x \cos x dx$	$x$	$\cos x dx$	
$\int P_n(x) \sin x dx$	$P_n(x)$	$\sin x dx$	Применить формулу $n$ раз
$\int P_n(x) \cos x dx$	$P_n(x)$	$\cos x dx$	
(где $P_n(x)$ - многочлен степени $n$ )			
$\int x \cdot e^x dx$	$x$	$e^x dx$	
$\int x \cdot a^x dx$	$x$	$a^x dx$	
$\int P_n(x) \cdot e^x dx$	$P_n(x)$	$e^x dx$	Применить формулу $n$ раз
$\int P_n(x) \cdot a^x dx$	$P_n(x)$	$a^x dx$	
$\int \ln x dx$	$\ln x$	$dx$	
$\int \log_a x dx$	$\log_a x$	$dx$	
$\int P_n(x) \cdot \ln x dx$	$\ln x$	$P_n(x) dx$	
$\int P_n(x) \cdot \log_a x dx$	$\log_a x$	$P_n(x) dx$	
$\int \operatorname{arctg} x dx$	$\operatorname{arctg} x$	$dx$	
$(\operatorname{arccotg} x, \operatorname{arcsin} x, \operatorname{arccos} x)$	$(\operatorname{arccotg} x, \operatorname{arcsin} x, \operatorname{arccos} x)$		
$\int P_n(x) \operatorname{arctg} x dx$	$\operatorname{arctg} x$	$P_n(x) dx$	
$\int P_n(x) \operatorname{arccotg} x dx$	$\operatorname{arccotg} x$	$P_n(x) dx$	
$\int e^{ax} \sin bx dx$	$e^{ax}$ (или $\sin bx$ )	$\sin bx dx$ (или $e^{ax} dx$ )	Применить формулу 2 раза
$\int e^{ax} \cos bx dx$	$e^{ax}$ (или $\cos bx$ )	$\cos bx dx$ (или $e^{ax} dx$ )	

### 3. Интегрирование по частям в неопределённом интеграле

Вычислить интеграл  $\int \ln x dx$

$$\left[ \begin{array}{ll} u = \ln x & dv = dx \\ du = \frac{dx}{x} & v = x \end{array} \right]$$

$$\int \ln x dx = x \ln x - \int x \cdot \frac{dx}{x} = x \ln x - \int dx = x \ln x - x + C$$

## Интегрирование рациональных функций

Рациональная дробь есть отношение двух многочленов целой степени

$$R(x) = \frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = \frac{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \dots + b_2 x^2 + b_1 x + b_0}$$

Если  $n < m$ , то дробь называется правильной. Если  $n \geq m$ , то дробь называется неправильной.

Прежде, чем интегрировать неправильную дробь, следует выделить целую часть дроби путем деления многочлена  $P_n(x)$  на многочлен  $Q_m(x)$ .

*Пример*

$$\frac{3x^3 - 4x^2 + x - 5}{x^2 - 2x - 1} = (3x + 2) + \frac{8x - 3}{x^2 - 2x - 1}$$

Дробь представляется в виде суммы целой части (многочлена целой степени) и правильной дроби.

# Интегрирование рациональных функций

Простейшими элементарными дробями называются дроби следующего вида:

1.  $\frac{A}{x-a}$  ;

2.  $\frac{A}{(x-a)^m}$  ,  $m > 1$ , целое;

3.  $\frac{Ax+B}{x^2+px+q}$  , где квадратный трехчлен не имеет действительных корней;

4.  $\frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^k}$  , где квадратный трехчлен не имеет действительных корней.

# Интегрирование рациональных функций

**Теорема.** Пусть  $P_m(x) / Q_n(x)$  – правильная рациональная дробь, знаменатель которой представлен в виде произведения линейных и квадратичных множителей (с вещественными коэффициентами)

$$Q_n(x) = a (x - x_1)^k (x - x_2)^l \dots (x^2 + r x + s)^\lambda \dots (x^2 + p x + q)^s,$$

где  $x_1, x_2, \dots$  – вещественные корни,  $(x^2 + p x + q), \dots (x^2 + r x + s)$  – квадратные трехчлены, не разложимые на вещественные множители ( $k + l + \dots + \lambda + \dots + s = n$ ). Тогда имеет место разложение

$$\begin{aligned} \frac{P_m(x)}{Q_n(x)} = & \frac{A_1}{x - x_1} + \frac{A_2}{(x - x_1)^2} + \dots + \frac{A_\alpha}{(x - x_1)^k} + \frac{B_1}{(x - x_2)} + \frac{B_2}{(x - x_2)^2} + \dots + \frac{B_\beta}{(x - x_2)^l} + \dots \\ & + \frac{M_1 x + N_1}{(x^2 + p x + q)} + \dots + \frac{M_{\lambda-1} x + N_{\lambda-1}}{(x^2 + p x + q)^{\lambda-1}} + \frac{M_\lambda x + N_\lambda}{(x^2 + p x + q)^\lambda} + \dots + \frac{R_s x + S_s}{(x^2 + r x + s)^s}, \end{aligned}$$

где  $A_i, B_i, M_i, N_i, R_i, S_i, \dots$  – вещественные числа (некоторые из которых могут быть равны нулю).

## Интегрирование рациональных функций

$$\frac{R(x)}{(x-a)^\alpha (x^2+px+q)^\beta \dots} = \frac{A_1}{(x-a)} + \dots + \frac{A_\alpha}{(x-a)^\alpha} + \frac{M_1x+N_1}{(x^2+px+q)} + \dots$$
$$+ \frac{M_\beta x + N_\beta}{(x^2+px+q)^\beta} + \dots$$

## Интегрирование рациональных функций

пример

$$\int \frac{(x^2 + 4x - 5)dx}{(x+2)(x-3)(2x+1)}$$

$$\frac{(x^2 + 4x - 5)}{(x-3)(x+2)(2x+1)} = \frac{A}{x-3} + \frac{B}{x+2} + \frac{C}{2x+1}$$

$$x^2 + 4x - 5 = A(2x^2 + 5x + 2) + B(2x^2 - 5x - 3) + C(x^2 - x - 6)$$

$$x^2 \mid 2A + 2B + C = 1$$

$$x^1 \mid 5A - 5B - C = 4$$

$$x^0 \mid 2A - 3B - 6C = -5$$

$$A = \frac{16}{35}, B = -\frac{21}{35}, C = \frac{45}{35}$$

$$\int \frac{(x^2 + 4x - 5)dx}{(x+2)(x-3)(2x+1)} = \frac{16}{35} \int \frac{dx}{x-3} - \frac{21}{35} \int \frac{dx}{x+2} + \frac{45}{35} \int \frac{dx}{2x+1} =$$

$$= \frac{16}{35} \ln|x-3| - \frac{21}{35} \ln|x+2| + \frac{45}{70} \ln|2x+1| + C$$

## Интегрирование некоторых иррациональных функций

I. Пусть  $\int R(x; x^{\frac{m}{n}}, \dots, x^{\frac{r}{s}}) dx$  – рациональная функция своих аргументов;  $m, n, \dots, r, s$  – целые числа.

Пусть  $k$  – общий знаменатель дробей  $\frac{m}{n}, \dots, \frac{r}{s}$ . Тогда подстановка  $x = t^k, dx = k \cdot t^{k-1} dt$  преобразует данный интеграл в интеграл от рациональной функции.

II. Пусть  $\int R(x; (\frac{ax+b}{cx+d})^{\frac{m}{n}}, \dots, (\frac{ax+b}{cx+d})^{\frac{r}{s}}) dx$ , тогда подстановка  $\frac{ax+b}{cx+d} = t^k$ , где  $k$  – общий знаменатель дробей  $\frac{m}{n}, \dots, \frac{r}{s}$ .

# Интегрирование иррациональностей

**Интегралы вида**  $\int R(x; \sqrt[n]{ax+b}) dx$ .

Интегралы вида  $\int R(x; \sqrt[n]{ax+b}) dx$ , где  $R(x; \sqrt[n]{ax+b})$  – рациональное выражение относительно  $x$  и  $\sqrt[n]{ax+b}$ ,  $n$  – целое положительное число не меньшее двух, могут быть сведены к интегралам от рациональных функций с помощью замены переменной:

$$ax + b = t^n, \text{ тогда } x = \frac{t^n - b}{a}, dx = \frac{nt^{n-1}}{a} dt, \sqrt[n]{ax + b} = t.$$

Следовательно,  $\int R(x; \sqrt[n]{ax+b}) dx = \int R\left(\frac{t^n - b}{a}; t\right) \frac{nt^{n-1}}{a} dt$ .

Интеграл в правой части последнего равенства может быть найден приемами, изложенными ранее.

При решении большинства типов интегралов от иррациональных функций применяется метод замены переменной (или подстановки).  
Целью замены является избавление от иррациональности.

$$\begin{aligned}
 \bullet 1. \int \frac{\sqrt{x}}{1-\sqrt[4]{x}} dx &= \left. \begin{array}{l} x=t^4, \quad dx=4t^3 dt \\ 1-\sqrt[4]{x}=1-t, \quad t^4\sqrt{x} \end{array} \right| = \int \frac{t^2 \cdot 4t^3 dt}{1-t} = 4 \int \frac{t^5 dt}{1-t} = \\
 &= 4 \int \left( -t^4 - t^3 - t^2 - t - 1 + \frac{1}{1-t} \right) dt = \text{(здесь выполнено деление } t^5 \text{ на} \\
 &\hspace{15em} (1-t) \text{)} \\
 &= 4 \left( -\frac{t^5}{5} - \frac{t^4}{4} - \frac{t^3}{3} - \frac{t^2}{2} - t - \ln|1-t| \right) = \text{(возвращаемся к переменной } x \text{)} \\
 &= 4 \left( -\frac{\sqrt[4]{x^5}}{5} - \frac{x}{4} - \frac{\sqrt[4]{x^3}}{3} - \frac{\sqrt{x}}{2} - \sqrt[4]{x} - \ln|1-\sqrt[4]{x}| \right) + c
 \end{aligned}$$

## Квадратичные иррациональности

Рассмотрим некоторые типы интегралов, содержащих иррациональные функции.

Интегралы типа  $\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}}$ ,  $\int \sqrt{ax^2 + bx + c} dx$ ,  $\int \frac{mx + n}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} dx$

Называют неопределенными интегралами от квадратичных иррациональностей. Их можно найти следующим образом: **под радикалом выделить полный квадрат:**

$$\begin{aligned} ax^2 + bx + c &= a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right) = a\left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a} - \frac{b^2}{4a^2}\right) = \\ &= a\left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a^2}\right) \text{ и сделать подстановку } x + \frac{b}{2a} = t \end{aligned}$$

## Квадратичные иррациональности

$$\int \frac{dx}{\sqrt{8 - 2x - 2x^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{2(4 - x - x^2)}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \int \frac{dx}{\sqrt{4 - x - x^2}} = I$$

Выделим в подкоренном выражении полный квадрат:

$$\begin{aligned} 4 - x - x^2 &= -(x^2 + x - 4) = -\left[\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} - 4\right] = \\ &= -\left[\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{17}{4}\right] = \left(\frac{\sqrt{17}}{2}\right)^2 - \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 \end{aligned}$$

# Интегрирование некоторых иррациональных функций

Интеграл вида

$$\int \frac{Mx + N}{(x - a)\sqrt{ax^2 + bx + c}} dx$$

находят подстановкой

$$x - a = \frac{1}{t}$$

пример

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2+3x+3}} &= [x+1 = \frac{1}{t}; x = \frac{1}{t} - 1; dx = -\frac{dt}{t^2}] = -\int \frac{-\frac{dt}{t^2}}{\frac{1}{t}\sqrt{(\frac{1}{t}-1)^2+3(\frac{1}{t}-1)+3}} = \\ &= -\int \frac{dt}{\sqrt{t^2+t+1}} = -\int \frac{dt}{\sqrt{(t+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}} = -\ln|t+\frac{1}{2}+\sqrt{t^2+t+1}|+C = \ln|\frac{1}{x+1}+\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{x^2+3x+3}}{x+1}|+C \end{aligned}$$

# Универсальная тригонометрическая подстановка

Рассмотрим интегралы вида:  $\int R(\sin x; \cos x) dx$ , где  $R(\sin x; \cos x)$  – рациональная функция.

## **Универсальная тригонометрическая подстановка.**

Из тригонометрии известно, что все тригонометрические функции аргумента  $x$  рационально выражаются через тангенс половинного аргумента:

$$\sin x = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}, \quad \cos x = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}.$$

Поэтому с помощью формул:

$$\operatorname{tg} \frac{x}{2} = t, \quad \sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \quad dx = \frac{2dt}{1+t^2}$$

интеграл  $\int R(\sin x; \cos x) dx$  сводится к интегралу

$$\int R\left(\frac{2t}{1+t^2}; \frac{1-t^2}{1+t^2}\right) \frac{2dt}{1+t^2} = \int R_1(t) dt,$$

где  $R_1(t)$  – рациональная функция  $t$

С помощью универсальной подстановки находятся интегралы вида:

$$\int \frac{dx}{a \sin x + b \cos x + c}, \quad \int \frac{dx}{\cos x}, \quad \int \frac{dx}{2 \cos x + 5}, \quad \int \frac{\sin x \, dx}{(3 \sin x - 2)^2}.$$

$$\bullet 1. \int \frac{dx}{2 - 4 \sin x} = \left| \begin{array}{l} \operatorname{tg} \frac{x}{2} = t, \quad dx = \frac{2dt}{1+t^2} \\ \sin x = \frac{2t}{1+t^2} \end{array} \right| = \int \frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{2 - 4 \frac{2t}{1+t^2}} = \int \frac{2dt}{2t^2 - 8t + 2} =$$

$$= \int \frac{dt}{t^2 - 4t + 1} = \int \frac{dt}{(t-2)^2 - 3} = \frac{1}{2\sqrt{3}} \ln \left| \frac{t-2-\sqrt{3}}{t-2+\sqrt{3}} \right| = \frac{1}{2\sqrt{3}} \ln \left| \frac{\operatorname{tg}(x/2) - 2 - \sqrt{3}}{\operatorname{tg}(x/2) - 2 + \sqrt{3}} \right| + c$$

# Интегрирование тригонометрических функций

$\int R(\sin x, \cos x) dx$ , где  $R$  – рациональная функция.

1. Универсальная подстановка:  $t = \operatorname{tg} \frac{x}{2} \Rightarrow x = 2 \cdot \operatorname{arctg} t$ ,  $dx = \frac{2dt}{1+t^2}$

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2} \quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

2. Упрощенные подстановки.

a)  $R(-\sin x, \cos x) = -R(\sin x, \cos x)$  Подстановка:  $t = \cos x$

b)  $R(\sin x, -\cos x) = -R(\sin x, \cos x)$  Подстановка:  $t = \sin x$

c)  $R(-\sin x, -\cos x) = R(\sin x, \cos x)$   $R(\operatorname{tg} x)$  Подстановка:  $t = \operatorname{tg} x$

d)  $R(\operatorname{ctg} x)$  Подстановка:  $t = \operatorname{ctg} x$

## Интегрирование тригонометрических функций

II. Интегралы вида  $\int \sin^m x \cos^n x dx$ , где  $n$  и  $m$  – целые.

1. Если  $n$  и  $m$  – четные, положительные, то применяются формулы понижения степени:

$$\sin^2 \alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2}$$

$$\cos^2 \alpha = \frac{1 + \cos 2\alpha}{2}$$

$$2 \sin \alpha \cos \alpha = \sin 2\alpha$$

2. Если  $n$  или  $m$  – нечетное, то непосредственно отделяют от нечетной степени один множитель.

3. Если  $n$  и  $m$  – дробные или целые отрицательные и  $(n + m)$  четное отрицательное, то замена  $t = \operatorname{tg} x$ , или  $t = \operatorname{ctg} x$ .

пример

$$\begin{aligned}\int \cos^2 3x \sin^4 3x dx &= \int (\cos 3x \sin 3x)^2 \sin^2 3x dx = \\ &= \int \frac{\sin^2 6x}{4} \cdot \frac{1 - \cos 6x}{2} dx = \frac{1}{8} \int (\sin^2 6x - \sin^2 6x \cos 6x) dx = \\ &= \frac{1}{8} \int \left( \frac{1 - \cos 12x}{2} - \sin^2 6x \cos 6x \right) dx = \\ &= \frac{1}{8} \left( \frac{x}{2} - \frac{\sin 12x}{24} - \frac{1}{18} \sin^3 6x \right) + C\end{aligned}$$

пример

$$\begin{aligned}\int \sin^8 x \cdot \cos^3 x \, dx &= \int \sin^8 x (1 - \sin^2 x)(\cos x \, dx) = \\ &= \int t^8 (1 - t^2) dt = \int (t^8 - t^{10}) dt = \frac{t^9}{9} - \frac{t^{11}}{11} + C = \\ &= \frac{1}{9} \sin^9 x - \frac{1}{11} \sin^{11} x + C.\end{aligned}$$

Для преобразования рациональных выражений от  $\sin x$ ,  $\cos x$ ,  $\operatorname{tg} x$ ,  $\operatorname{ctg} x$  в алгебраические рациональные функции переменной  $t$  применяются следующие тригонометрические формулы:

$$\sin x = \frac{2\operatorname{tg} \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}} = \frac{2t}{1 + t^2}$$

$$\operatorname{tg} x = \frac{2\operatorname{tg} \frac{x}{2}}{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}} = \frac{2t}{1 - t^2}$$

$$\cos x = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}} = \frac{1 - t^2}{1 + t^2}$$

$$\operatorname{ctg} x = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}{2\operatorname{tg} \frac{x}{2}} = \frac{1 - t^2}{2t}$$

пример

$$\int \frac{dx}{1 + \sin^2 x} = 2 \int \frac{dx}{3 - \cos 2x} \left| \begin{array}{l} \operatorname{tg} x = t, x = \operatorname{arctg} t \\ dx = \frac{dt}{1+t^2}, \cos 2x = \frac{1-t^2}{1+t^2} \end{array} \right| =$$
$$= 2 \int \frac{1}{3 - \frac{1-t^2}{1+t^2}} dt = 2 \int (1 + 2t^2) dt = 2t + \frac{4}{3}t^3 + C =$$
$$= 2 \operatorname{tg} x + \frac{4}{3} \operatorname{tg}^3 x + C$$

# Интегрирование тригонометрических функций

Интегралы вида

$$\int \sin ax \cos bxdx, \quad \int \cos ax \cos bxdx, \quad \int \sin ax \sin bxdx, \quad \text{где } a \neq b$$

Находятся с помощью формул:

$$\sin ax \cos bx = \frac{1}{2} [\sin(a-b)x + \sin(a+b)x];$$

$$\cos ax \cos bx = \frac{1}{2} [\cos(a-b)x + \cos(a+b)x];$$

$$\sin ax \sin bx = \frac{1}{2} [\cos(a-b)x - \cos(a+b)x].$$

пример

$$\int \sin 9x \sin x dx = \frac{1}{2} \int [\cos 8x - \cos 10x] dx = \frac{1}{16} \sin 8x - \frac{1}{20} \sin 10x + C .$$

## Интегрирование иррациональностей с помощью тригонометрических подстановок

**Интегралы вида**

$$\int R(x, \sqrt{a^2 - x^2}) dx, \quad \int R(x, \sqrt{a^2 + x^2}) dx, \quad \int R(x, \sqrt{x^2 - a^2}) dx$$

**вычисляются с помощью  
тригонометрических подстановок.**

1. 
$$\int R(x, \sqrt{a^2 - x^2}) dx; \quad x = a \sin z, \quad dx = a \cos z dz,$$
$$\sqrt{a^2 - x^2} = \sqrt{a^2 - a^2 \sin^2 z} = a \sqrt{1 - \sin^2 z} = a \cos z.$$

## Интегрирование иррациональностей с помощью тригонометрических подстановок

$$2. \int R(x, \sqrt{a^2 + x^2}) dx, \quad x = atgz, \quad dx = \frac{adz}{\cos^2 z},$$

$$\sqrt{a^2 + x^2} = \sqrt{a^2 + a^2 tg^2 z} = a\sqrt{1 + tg^2 z} = \frac{a}{\cos z}.$$

$$3. \int R(x, \sqrt{x^2 - a^2}) dx, \quad x = \frac{a}{\cos z}, \quad dx = \frac{a \sin z dz}{\cos^2 z},$$

$$\sqrt{x^2 - a^2} = \sqrt{\frac{a^2}{\cos^2 z} - a^2} = a\sqrt{\frac{1 - \cos^2 z}{\cos^2 z}} = a \frac{\sin z}{\cos z} = atgz.$$

пример

$$\int \frac{dx}{x^4 \sqrt{a^2 + x^2}} = \left\{ \begin{array}{l} x = atgt; dx = \frac{a}{\cos^2 t} dt, \\ \sqrt{a^2 + x^2} = \frac{a}{\cos^2 t}. \end{array} \right\} = \int \frac{a \cos t dt}{\cos^2 t a^4 tg^4 ta} = \int \frac{\cos^3 t dt}{a^4 \sin^4 t} = \frac{1}{a^4} \int \frac{(1 - \sin^2 t) d \sin t}{\sin^4 t} =$$
$$= -\frac{1}{3a^4 \sin^3 t} + \frac{1}{a^4 \sin t} + C = \left\{ \sin t = \sqrt{1 - \frac{a^2}{a^2 + x^2}} = \frac{x}{\sqrt{a^2 + x^2}} \right\} = -\frac{(a^2 + x^2)^{3/2}}{3a^4 x^3} + \frac{\sqrt{a^2 + x^2}}{a^4 x} + C.$$

## пример

$$\int \sqrt{a^2 - x^2} dx = \left\{ \begin{array}{l} x = a \sin t; \\ dx = a \cos t dt \end{array} \right\} = \int \sqrt{a^2 - a^2 \sin^2 t} a \cos t dt = \int a^2 \cos^2 t dt = \frac{a^2}{2} \int (1 + \cos 2t) dt =$$
$$= \frac{a^2 t}{2} + \frac{a^2}{4} \sin 2t + C = \frac{a^2 t}{2} + \frac{a^2}{2} \sin t \cos t + C = \frac{a^2}{2} \arcsin \frac{x}{a} + \frac{x}{2} \sqrt{a^2 - x^2} + C.$$