Лекция 5

Доверительные интервалы и доверительная вероятность.

Распределение Стьюдента

Точечная оценка

Точечной оценкой называют оценку, которая определяется одним числом. При малом количестве обрабатываемых измерений n точечная оценка может значительно отличаться от оцениваемого параметра. Поэтому при небольшом объёме выборки необходимо рассмотреть надежность этой оценки, которую можно оценить ***неслучайным интервалом***, расположенным вокруг точечной оценки, в который результат измерения попадет с заданной доверительной вероятностью (обычно в измерениях называемой «надежностью» и обозначаемой α).

Оценка $a^*(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ называется **состоятельной**, если с увеличением объема выборки n она стремится (по вероятности) к оцениваемому параметру a.

Оценка $a^*(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ называется **несмещенной**, если ее математическое ожидание при любом объеме выборки равно оцениваемому параметру a, т. е. $M[a^*] = a$.

Выборочные параметры распределения, определяемые по серии измерений, являются *случайными величинами*, следовательно, и их отклонения от генеральных параметров также будут случайными. Оценка этих отклонений носит вероятностный характер — при статистическом анализе можно лишь указать *вероятность той или иной погрешности*.

Пусть для генерального параметра a получена из опыта несмещенная оценка a^*. Назначим достаточно большую вероятность β (такую, что событие с вероятностью β можно считать практически достоверным) и найдем такое значение $\varepsilon_\beta = f(\beta)$, для которого

$$P\left(a^* - a \leq \varepsilon_\beta\right) = \beta$$

Диапазон практически возможных значений ошибки, возникающей при замене a на a^*, будет $\pm\varepsilon_\beta$.

Большие по абсолютной величине ошибки будут появляться только с малой вероятностью

$$p = 1 - \beta$$

называемой уровнем значимости. Иначе выражение можно интерпретировать как вероятность того, что истинное значение параметра a лежит в пределах

$$a^* - \varepsilon_\beta \leq a \leq a^* + \varepsilon_\beta$$

Вероятность β называется доверительной вероятностью и характеризует надежность полученной оценки.

Доверительный интервал при данной доверительной вероятности определяет точность оценки. Величина доверительного интервала зависит от доверительной вероятности, с которой гарантируется нахождение параметра a внутри доверительного интервала: чем больше величина β, тем больше интервал I_β (и величина ε_β). Увеличение числа опытов проявляется в сокращении доверительного интервала при постоянной доверительной вероятности или в повышении доверительной вероятности при сохранении доверительного интервала.

построение доверительного интервала

- Рассмотрим построение доверительного интервала для математического ожидания нормально распределенной случайной величины X с известным генеральным стандартом σ по выборке объемом n. Наилучшей оценкой для математического ожидания m_x является среднее выборки x со стандартным отклонением среднего

$$\sigma(x) = \frac{\sigma}{n}$$

Используя функцию Лапласа, получаем

$$P\left(|\bar{x} - m_x| \le \varepsilon_\beta\right) = \beta = 2\Phi\left(\frac{\varepsilon_\beta}{\sigma(\bar{x})}\right)$$

Задавшись доверительной вероятностью β, определим по таблице функции Лапласа величину

$$k_\beta = \frac{\varepsilon_\beta}{\sigma(x)}$$

Тогда доверительный интервал для математического ожидания принимает вид

$$x - k_\beta \sigma(x) \le m_x \le x + k_\beta \sigma(x)$$

или

$$\bar{x} - k_\beta \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \le m_x \le \bar{x} + k_\beta \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

уменьшение доверительного интервала обратно пропорционально корню квадратному из числа опытов.

При отсутствии грубых и систематических ошибок математическое ожидание случайной величины совпадает с истинным результатом наблюдений. Легче всего оценить математическое ожидание при известной дисперсии генеральной совокупности. Однако значение σ^2 нельзя получить из наблюдений, ее можно только оценить при помощи выборочной дисперсии s^2. Ошибка от этой замены будет тем меньше, чем больше объем выборки n. На практике эту погрешность не учитывают при $n \leq 50$ и в формуле для доверительного интервала генеральный параметр σ заменяют выборочным стандартом.

При небольших объемах выборок для построения доверительного интервала математического ожидания используют распределение Стьюдента, или t -распределение. Распределение Стьюдента имеет величина t

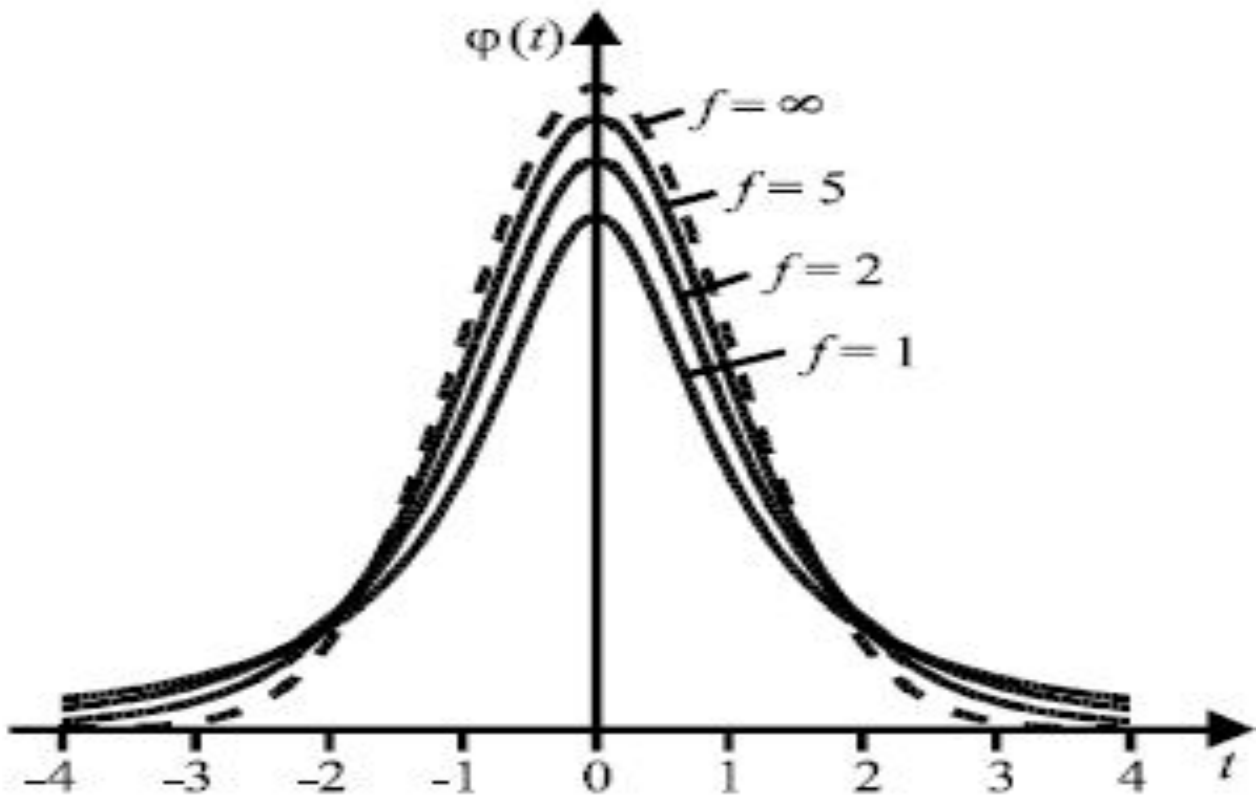
$$t = \frac{\bar{x} - m_x}{s_x}\sqrt{n}$$

с плотностью вероятности

$$\varphi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi f}} \frac{\Gamma\left(\frac{f+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{f}{2}\right)} \left(1 + \frac{t^2}{f}\right)^{-\left(\frac{f+1}{2}\right)}, -\infty < t < +\infty$$

где Γ(f) — гамма-функция Эйлера:

Распределение Стьюдента зависит только от числа степеней свободы f, с которым определена выборочная дисперсия. На рис. приведены графики плотности t-распределения для нескольких чисел свободы f и нормальная кривая.



Плотность распределения Стьюдента

Кривые t -распределения по своей форме напоминают нормальную кривую, но при малых f они медленнее сближаются с осью абсцисс при $t \to \infty$. При $f \to \infty$ $s^2 \to \sigma^2$, поэтому распределение Стьюдента сближается (в пределе соответствует) с нормальным распределением. Вероятность того, что случайная величина попадет в интервал $(t_{p/2};\ t_{1-p/2})$, определяется выражением

$$P(t_{p/2};\ t_{1-p/2}) = 1 - p = \beta$$

Распределение Стьюдента симметрично относительно нуля, поэтому

$$t_{p/2} = -t_{1-p/2}$$