ОСНОВНЫЕ ПОЛОЖЕНИЯ ТЕОРИИ ГРУПП

ЛЕКЦИЯ 4

ВОПРОСЫ ЛЕКЦИИ

- Определение группы симметрии
- Условия существования группы
- Теоремы о взаимодействии элементов симметрии

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ГРУППЫ СИММЕТРИИ

- Рассмотренные симметрические преобразования в реальных кристаллах встречаются в виде определенных совокупностей – групп.
- Поэтому при разработке теории симметрии кристаллов использовали раздел математической теории абстрактных групп.
- *Группой называется множество объектов G любой природы с заданной бинарной операцией *, если для любой пары элементов a и b этого множества G определен третий, результирующий элемент $c=a*b$ того же множества. В общем случае $a*b \neq b*a$.*
- *Группа (класс) симметрии кристалла – это совокупность всех различных неэквивалентных симметрических операций – сочетаний элементов симметрии, преобразующих фигуру саму в себя.*
- *При том их взаимные расположения подчиняются всем положениям математической теории абстрактных групп. В общем случае результирующие операции могут оказаться различными, если поменять порядок выполнения исходных операций.*

Условия, которые должны выполняться множеством элементов, для того чтобы называться группой

математической

- **1)**Произведение любых двух элементов или квадрат какого-либо элемента множества принадлежит тому же множеству

{a,b,c….} – множество

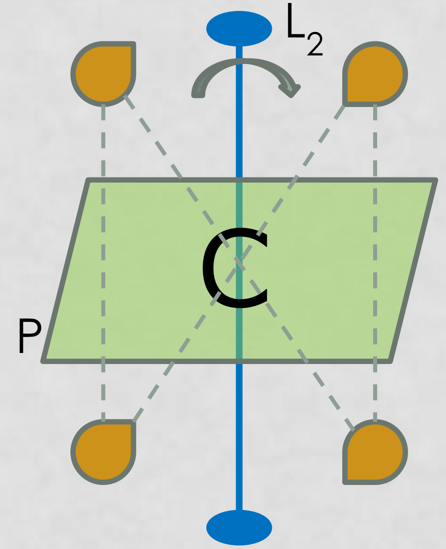
a*b = c

симметрии

- **1)** Произведение двух операций, входящих в группу, эквивалентно третьей операции, которая также принадлежит этой группе

L_2PC - группа симметрии

$L_2*P=C; P*C=L_2; L_2*C=P$



УСЛОВИЯ, КОТОРЫЕ ДОЛЖНЫ ВЫПОЛНЯТЬСЯ МНОЖЕСТВОМ ЭЛЕМЕНТОВ, ДЛЯ ТОГО ЧТОБЫ НАЗЫВАТЬСЯ ГРУППОЙ

математической

- **2)** Для любых трех элементов множества выполняется ассоциативный (сочетательный) закон

  (a*b)*c=a*(b*c)

- **3)** Существование единичного члена **e** – такого единичного члена, что для любого элемента группы будет выполняться равенство

  e*a=a*e

симметрии

- ***2)*** Произведение трех любых симметрических операций в общем случае удовлетворяет ассоциативной операции

  $$(L_2 * P) * C = L_2 * (P * C)$$

- ***3)*** Произведение операций отождествления (действие оси первого порядка – поворот на 360°) на любой элемент группы эквивалентно обратному произведению

  $$L_1 * P = P * L_1$$

УСЛОВИЯ, КОТОРЫЕ ДОЛЖНЫ ВЫПОЛНЯТЬСЯ МНОЖЕСТВОМ ЭЛЕМЕНТОВ, ДЛЯ ТОГО ЧТОБЫ НАЗЫВАТЬСЯ ГРУППОЙ

математической

- **4)** Обратимость - для любого элемента ***a*** существует элемент **a**$^{-1}$ из того же множества, называемый обратным элементом к элементу ***a*****,** такой, что

$$a*a^{-1} = a^{-1}*a = e$$

Множество элементов составляет математическую группу, если оно удовлетворяет всем 4 условиям

симметрии

- **4)** Каждому элементу группы соответствует обратный элемент.
- *Если a – правый поворот вокруг оси симметрии на угол 360°/n, то a*$^{-1}$ *– такой же левый поворот, равный*

(360°-360°/n).

Сумма правого и левого поворотов эквивалентна полному повороту вокруг $\boldsymbol{L_1}$, т.е. *360°.*

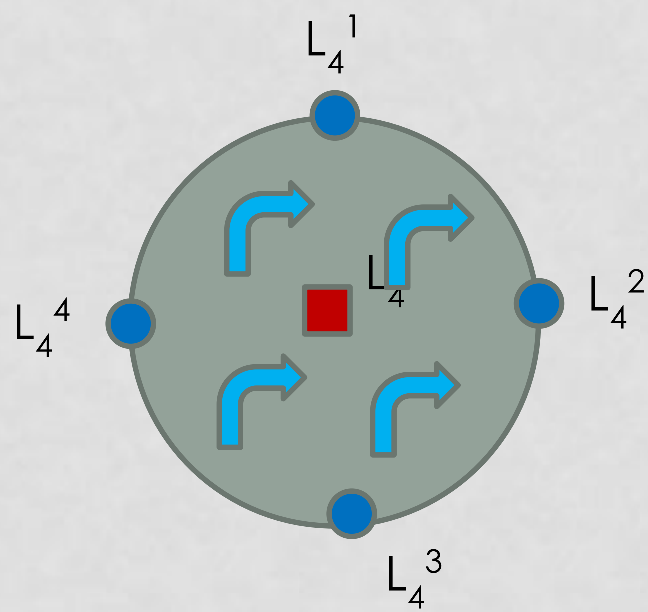
Симметрические преобразования I и II рода составляют группу симметрии если удовлетворяют всем 4 условиям

Симметрические преобразования I и II рода кристаллического многогранника оставляют на месте по крайней мере ***одну его точку*, в которой пересекаются все элементы симметрии**. Поэтому группа симметрических преобразований образует **точечную группу симметрии**

Точечные группы симметрии удовлетворяют всем условиям математической группы.

Порядок группы симметрии – это число неэквивалентных симметрических преобразований, образующих группу. Обозначается $\mathbf{G_k}$

$L_4 = \{L_4^1 ; L_4^2 ; L_4^3 ;L_4^4 \}$ $\mathbf{G_k} = 4$



Кратность точечной группы симметрии определяет максимальное количество эквивалентных точек, которое можно получить из одной точки, преобразуя ее всеми операциями симметрии, входящими в группу.
Кратность N соответствует числу граней общей простой формы, характеризующей группу. $\frac{G_к}{G_г}$=N

Группа может являться подгруппой другой группы, если все элементы симметрии первой группы входят в состав элементов симметрии второй группы и если их множество само образует группу при одинаковом выборе правил сочетания
Например L_4 и $L_4 4P$ являются подгруппами группы $L_4 4L_2 5PC$

ТЕОРЕМЫ О ВЗАИМОДЕЙСТВИИ ЭЛЕМЕНТОВ СИММЕТРИИ

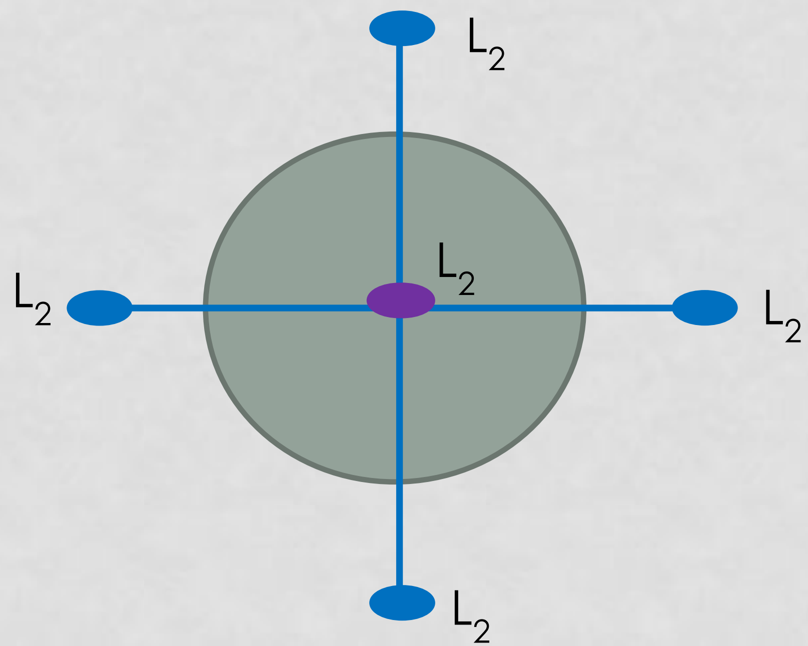
Осевая теорема Эйлера в общем виде:

Взаимодействие двух осей симметрии n-ого порядка, поворотных или инверсионных, приводит к возникновению третьей оси симметрии, проходящей через точку их пересечения.

При этом результирующая ось окажется поворотной, если исходными будут две одинаковые оси (обе поворотные или обе инверсионные) и инверсионной, если исходные оси будут разного типа.

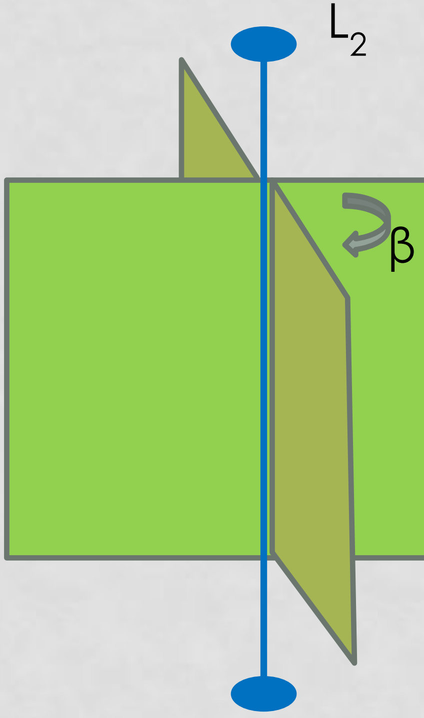
Вариант 1 Взаимодействие элементов симметрии I рода

При наличии двух пересекающихся осей симметрии всегда следует искать третью равнодействующую ось, проходящую через точку пересечения первых двух.



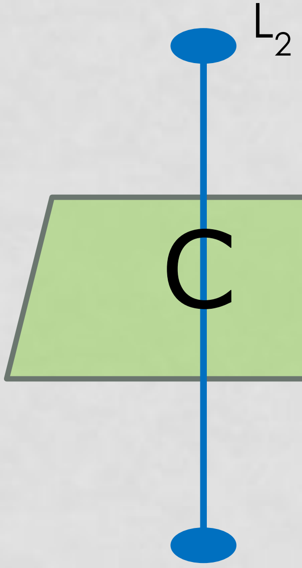
Вариант 2 Взаимодействие элементов симметрии II рода

При наличии двух плоскостей (двух инверсионных осей 2-ого порядка), пересекающихся под углом β, всегда следует искать равнодействующую ось, проходящую через линию пересечения плоскостей, с элементарным углом поворота α=2β.



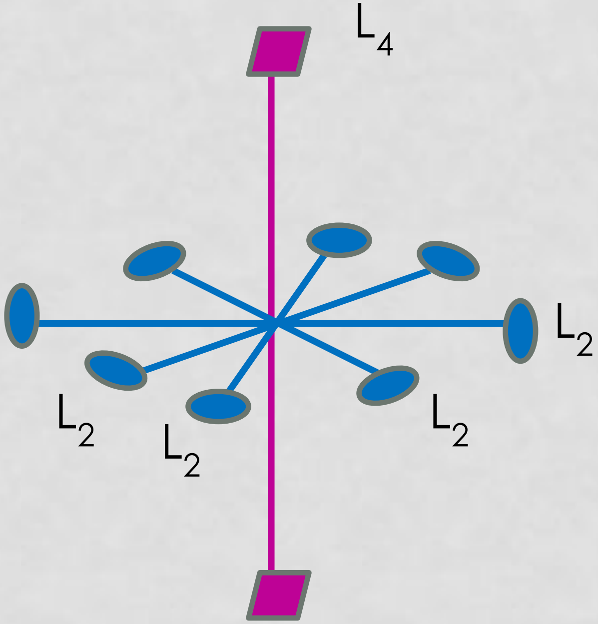
Вариант 3 Взаимодействие элементов симметрии I и II рода

Если взаимодействуют симметрические операции разнородные, то результирующей окажется симметрическая операция II рода: либо плоскость симметрии – инверсионная ось 2-го порядка; либо центр инверсии.



Следствие 1

Если взаимодействует ось симметрии n-ого порядка L_n и перпендикулярно ей ось симметрии 2-го порядка L_2, то осей симметрии 2–ого порядка будет n.



Следствие 2

Если взаимодействует ось симметрии n-ого порядка L_n и вдоль неё плоскость симметрии P, то таких плоскостей, проходящих вдоль $L_{n,}$ будет n.