Областное государственное автономное образовательное учреждение

среднего профессионального образования Белгородский строительный колледж г. Белгород

Урок-лекция «Угол между двумя векторами»

урок математики, 1 курс

Автор: Агапова Наталья Николаевна, преподаватель математики

#### План:

- Определение скалярного произведения
- Скалярное произведение векторов в координатной форме
- Нахождение угла между векторами

# Определение скалярного произведения

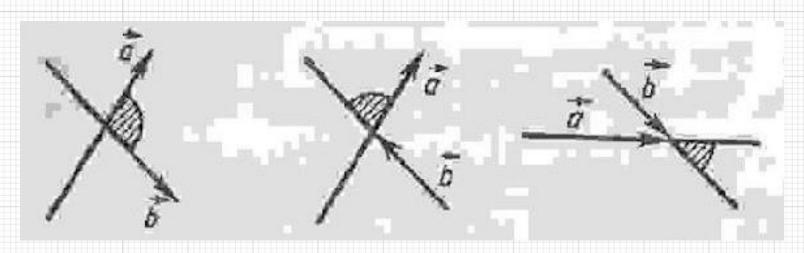
то есть: 
$$\vec{a}\vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \varphi$$

(1)

где 
$$\varphi = \left(\widehat{\vec{a}}, \widehat{\vec{b}}\right), 0 \le \varphi \le 180^\circ$$

## Определение скалярного произведения

- Если хотя бы один из двух векторов равен нулевому вектору, то их произведение считается равным нулю.
- Углом между векторами называется угол между их направлениями.

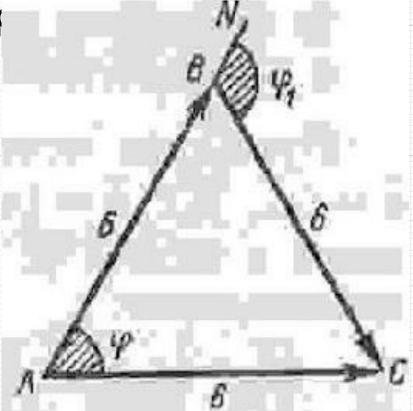


### Пример №1

• В равностороннем треугольнике АВС со стороной, равной 6, найти скалярное произведение вектор

a) ABиAC;

b) AB u BC.



#### Решение:



а) Так как угол ф между векторами AB и AC (и их направлениями) равен 60°, то для скалярного произведения этих векторов получим:

векторов получим:
$$\overrightarrow{ABBC} = |\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{BC}| \cdot \cos \overrightarrow{BAC} =$$

$$= 6 \cdot 6 \cdot \cos 60^{\circ} = 36 \cdot 0,5 = 18$$

#### Решение:



b) Угол ф между векторами AB и BC (то есть угол между их направлениями) есть угол ф₁=120°, поэтому:

$$\overrightarrow{ABBC} = |\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{BC}| \cdot \cos \overrightarrow{NBC} =$$

$$= 6 \cdot 6 \cdot \cos 120^{\circ} = 36 \cdot (-0.5) = -18$$

## Скалярное произведение векторов в координатной форме

- Пусть два ненулевых вектора заданы своими коорд $\vec{a} = (x_a; y_a) \vec{b} = (x_b; y_b)$
- Это значит, что в $(\vec{a} = x_a \vec{l} + y_a \vec{J}) | \vec{b} = x_b \vec{l} + y_b \vec{J}|$  в базисе (i;j), то есть
- Найдём их произведение:  $\vec{a}\vec{b} = (x_a\vec{i} + y_a\vec{j})(x_b\vec{i} + y_b\vec{j}) = x_ax_b\vec{\imath}^2 + x_by_b\vec{i}\vec{j} + x_ay_a\vec{i}\vec{j} + y_ay_b\vec{j}^2$

## Скалярное произведение векторов в координатной форме

Так как вектора і и ј – единичные и взаимно перпендикулярные, то i²=1; j²=1; ij=0. Подставив эти значения в равенство (2), получим

$$\vec{a}\vec{b} = x_a x_b + y_a y_b \tag{3}$$

• Итак, скалярное произведение векторов, заданных своими координатами, равно сумме произведений одноимённых координат.

### Пример N°2



• Найти скалярное произведение векторов a=(3;5) и b=(-2;7).

### Решение:

Здесь х<sub>a</sub>=3; х<sub>b</sub>=-2; у<sub>a</sub>=5; у<sub>b</sub>=7. Используя формулу (3), получим:

$$\vec{a}\vec{b} = 3 \cdot (-2) + 5 \cdot 7 = -6 + 35 = 29$$

## Нахождение угла между векторами

Из определения скалярного произведения двух векторов можно получить формулу.

$$\cos \varphi = \frac{\vec{a}\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|} \tag{4}$$

которая позволяет найти угол между векторами.

## Нахождение угла между векторами

• Учитывая, чі $\vec{a}\vec{b} = x_a x_b + y_a y_b$ 

$$\vec{a} = \sqrt{x_a^2 + y_a^2}$$

$$\vec{b} = \sqrt{x_b^2 + y_b^2}$$

B

формулу (4) можно записать координатной форме:

$$\cos \varphi = \frac{x_a x_b + y_a y_b}{\sqrt{x_a^2 + y_a^2} \cdot \sqrt{x_b^2 + y_b^2}}$$

## Пример N°3



- Найти угол между векторами:
- a) a=(4;0) и b=(2;-2);
- b) a=(5;-3) и b=(3;5).

### Решение:

а) Используя формулу (5), находим:

$$\cos \varphi = \frac{4 \cdot 2 + 0 \cdot (-2)}{\sqrt{16 + 0} \cdot \sqrt{4 + 4}} = \frac{8}{4 \cdot 2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}, \ \varphi = \frac{\pi}{4}$$

#### Решение:



#### b) Имеем:

$$\cos \varphi = \frac{5 \cdot 3 + (-3) \cdot 5}{\sqrt{25 + 9} \cdot \sqrt{9 + 25}} = \frac{0}{34} = 0$$

$$\varphi = \arccos 0 = \frac{\pi}{2}$$

### Домашнее задание

Лисичкин В. Т., Соловей чик И. Л.
 Математика в задачах с решениями
 №42, 43, 48, 49, 54, 55

### Список использованной литературы

- Дадаян А. А. Сборник задач по математике. М.: ФОРУМ: ИНФРА-М, 2007.
- Лисичкин В. Т., Соловейчик И. Л. Математика в задачах с решениями. СПб.: «Лань», 2011.

### Список использованных материалов, Интернет-ресурсов

- Мультимедийный диск «Алгебра 10 11 класс».
- Мультимедийный диск «Математика 7-11 Класс».