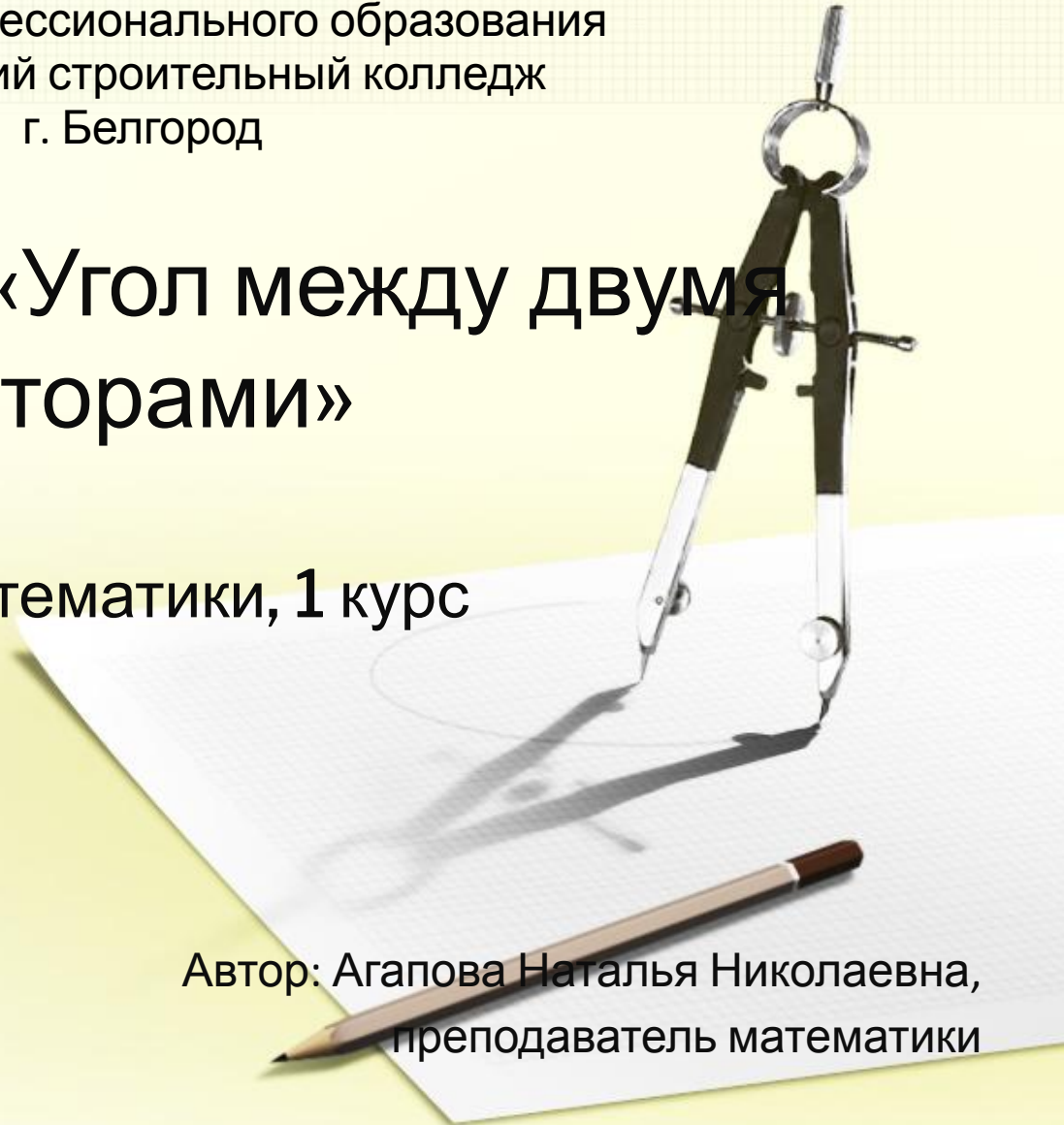


Областное государственное автономное образовательное  
учреждение  
среднего профессионального образования  
Белгородский строительный колледж  
г. Белгород

# Урок-лекция «Угол между двумя векторами»

урок математики, 1 курс

Автор: Агапова Наталья Николаевна,  
преподаватель математики



# План:



- **Определение скалярного произведения**
- **Скалярное произведение векторов в координатной форме**
- **Нахождение угла между векторами**

# Определение скалярного произведения

- **Скалярным произведением двух ненулевых векторов** называется число, равное произведению длин этих векторов на косинус угла между ними,

то есть:

$$\vec{a}\vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \varphi$$

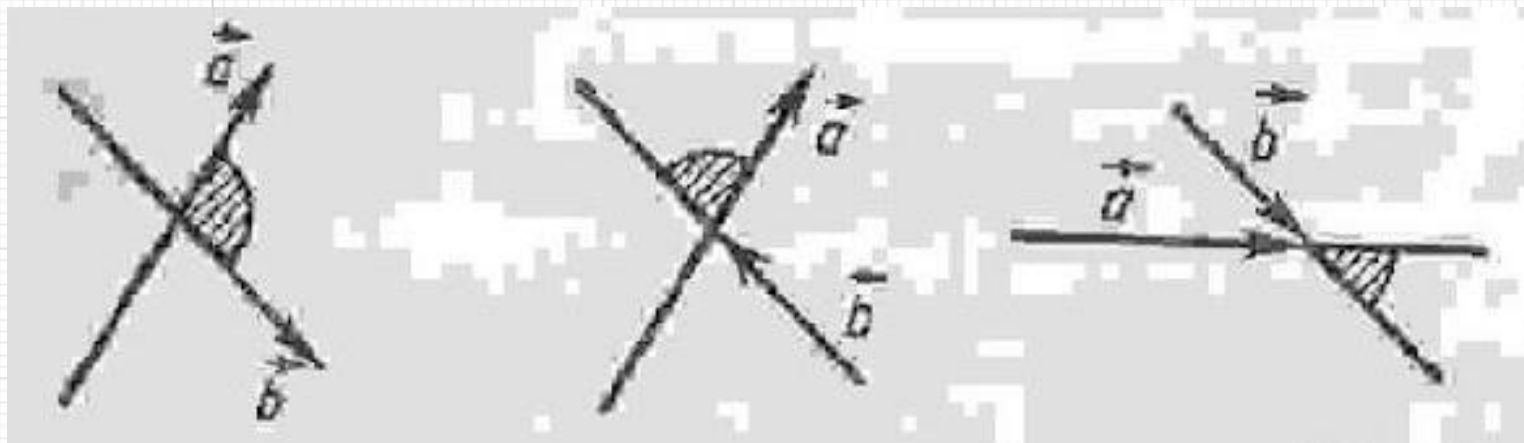
(1)

где

$$\varphi = \left( \widehat{\vec{a}, \vec{b}} \right), 0 \leq \varphi \leq 180^\circ$$

# Определение скалярного произведения

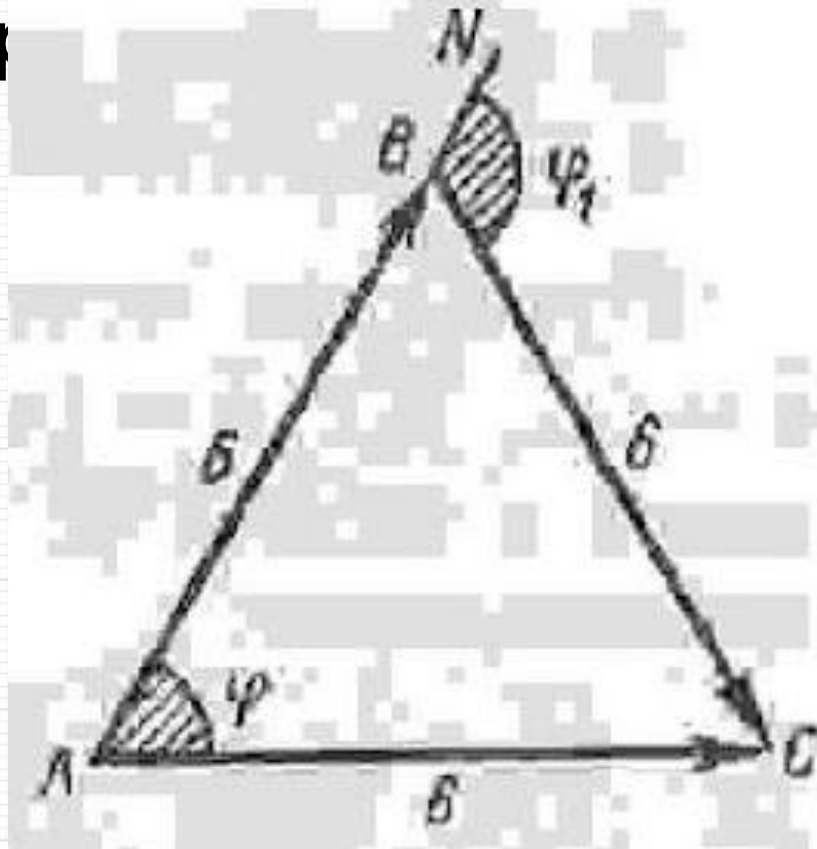
- Если хотя бы один из двух векторов равен нулевому вектору, то их произведение считается равным нулю.
- *Углом между векторами* называется угол между их направлениями.



# Пример №1

- В равностороннем треугольнике  $ABC$  со стороной, равной  $6$ , найти скалярное произведение векторов

- a)  $\vec{AB}$  и  $\vec{AC}$ ;
- b)  $\vec{AB}$  и  $\vec{BC}$ .



# Решение:

- а) Так как угол  $\phi$  между векторами  $\overrightarrow{AB}$  и  $\overrightarrow{AC}$  (и их направлениями) равен  $60^\circ$ , то для скалярного произведения этих векторов получим:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB}\overrightarrow{BC} &= |\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{BC}| \cdot \cos \widehat{BAC} = \\ &= 6 \cdot 6 \cdot \cos 60^\circ = 36 \cdot 0,5 = 18\end{aligned}$$

## Решение:



b) Угол  $\phi$  между векторами АВ и ВС (то есть угол между их направлениями) есть угол  $\phi_1 = 120^\circ$ , поэтому:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB} \overrightarrow{BC} &= |\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{BC}| \cdot \cos \widehat{NBC} = \\ &= 6 \cdot 6 \cdot \cos 120^\circ = 36 \cdot (-0,5) = -18\end{aligned}$$

# Скалярное произведение векторов в координатной форме

- Пусть два ненулевых вектора заданы своими коорд  $\vec{a} = (x_a; y_a)$   $\vec{b} = (x_b; y_b)$  ,

- Это значит, что в  $(\vec{a} = x_a \vec{i} + y_a \vec{j})$   $(\vec{b} = x_b \vec{i} + y_b \vec{j})$  в базисе  $(i;j)$ , то есть ,

- Найдём их произведение:

$$\vec{a}\vec{b} = (x_a \vec{i} + y_a \vec{j})(x_b \vec{i} + y_b \vec{j}) = x_a x_b \vec{i}^2 + x_b y_b \vec{i}\vec{j} + x_a y_a \vec{j}\vec{i} + y_a y_b \vec{j}^2$$

- Так как вектора  $i$  и  $j$  – единичные и взаимно перпендикулярные, то  $i^2=1$ ;  $j^2=1$ ;  $ij=0$ . Подставив эти значения в равенство (2), получим



# Скалярное произведение векторов в координатной форме

- Так как вектора  $i$  и  $j$  – единичные и взаимно перпендикулярные, то  $i^2=1$ ;  $j^2=1$ ;  $ij=0$ . Подставив эти значения в равенство (2), получим

$$\vec{a}\vec{b} = x_a x_b + y_a y_b \quad (3)$$

- Итак, **скалярное произведение векторов, заданных своими координатами, равно сумме произведений одноимённых координат.**

## Пример №2



- Найти скалярное произведение векторов  $a=(3;5)$  и  $b=(-2;7)$ .

Решение:

- Здесь  $x_a=3$ ;  $x_b=-2$ ;  $y_a=5$ ;  $y_b=7$ . Используя формулу (3), получим:

$$\vec{a}\vec{b} = 3 \cdot (-2) + 5 \cdot 7 = -6 + 35 = 29$$

# Нахождение угла между векторами



- Из определения скалярного произведения двух векторов можно получить формулу:

$$\cos \varphi = \frac{\vec{a}\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|} \quad (4)$$

которая позволяет найти угол между векторами.

# Нахождение угла между векторами

- Учитывая, что  $\vec{a}\vec{b} = x_a x_b + y_a y_b$

$$|\vec{a}| = \sqrt{x_a^2 + y_a^2}$$

$$|\vec{b}| = \sqrt{x_b^2 + y_b^2}$$

формулу (4) можно записать в координатной форме:

$$\cos \varphi = \frac{x_a x_b + y_a y_b}{\sqrt{x_a^2 + y_a^2} \cdot \sqrt{x_b^2 + y_b^2}}$$

# Пример №3



• Найти угол между векторами:

a)  $a=(4;0)$  и  $b=(2;-2)$ ;

b)  $a=(5;-3)$  и  $b=(3;5)$ .

Решение:

a) Используя формулу (5), находим:

$$\cos \varphi = \frac{4 \cdot 2 + 0 \cdot (-2)}{\sqrt{16 + 0} \cdot \sqrt{4 + 4}} = \frac{8}{4 \cdot 2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \varphi = \frac{\pi}{4}$$

# Решение:

b) Имеем:

$$\cos \varphi = \frac{5 \cdot 3 + (-3) \cdot 5}{\sqrt{25 + 9} \cdot \sqrt{9 + 25}} = \frac{0}{34} = 0$$

$$\varphi = \arccos 0 = \frac{\pi}{2}$$

# Домашнее задание



- **Лисичкин В. Т., Соловей чик И. Л.  
Математика в задачах с решениями  
№42, 43, 48, 49, 54, 55**

# Список использованной литературы

- Дадаян А. А. Сборник задач по математике. – М.: ФОРУМ: ИНФРА-М, 2007.
- Лисичкин В. Т., Соловейчик И. Л. Математика в задачах с решениями. – СПб.: «Лань», 2011.

## Список использованных материалов, Интернет-ресурсов

- Мультимедийный диск «Алгебра 10 - 11 класс».
- Мультимедийный диск «Математика 7-11 Класс».