Областное государственное автономное образовательное учреждение
среднего профессионального образования
Белгородский строительный колледж
г. Белгород

Урок-лекция «Угол между двумя векторами»

урок математики, 1 курс

Автор: Агапова Наталья Николаевна,
преподаватель математики

План:

- **Определение скалярного произведения**
- **Скалярное произведение векторов в координатной форме**
- **Нахождение угла между векторами**

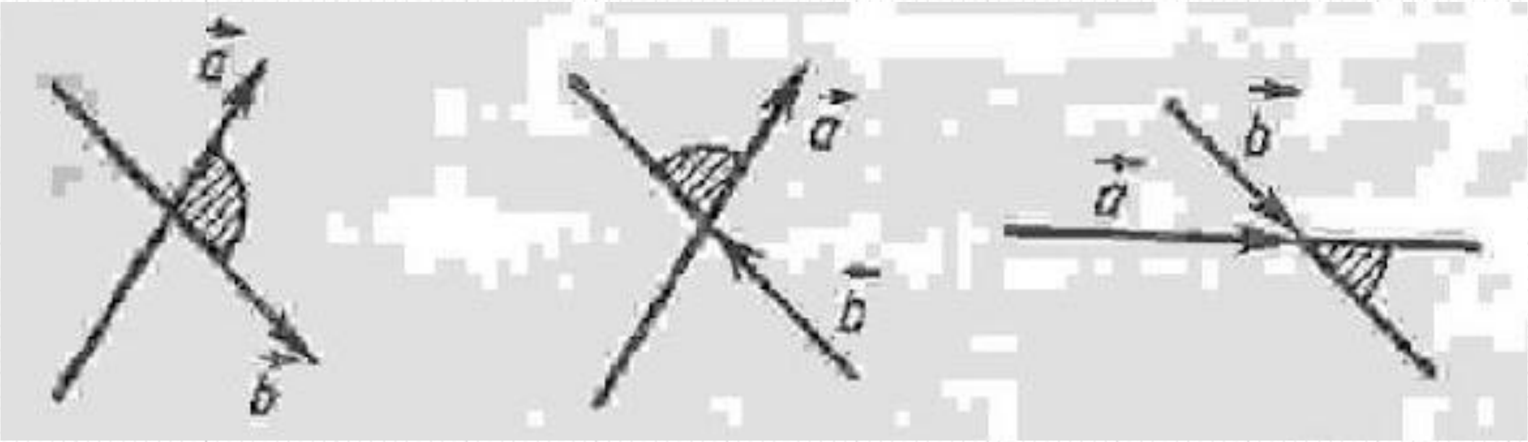
Определение скалярного произведения

- ***Скалярным произведением двух ненулевых векторов*** **называется** ***число, равное произведению длин этих векторов на косинус угла между ними,*** **то есть:** $$\vec{a}\vec{b} = |\vec{a}| \cdot \left|\vec{b}\right| \cdot \cos\varphi$$ **(1)**

где $$\varphi = \left(\widehat{\vec{a},\vec{b}}\right), 0 \le \varphi \le 180^\circ$$

Определение скалярного произведения

- **Если хотя бы один из двух векторов равен нулевому вектору, то их произведение считается равным нулю.**
- ***Углом между векторами*** **называется угол между их направлениями.**

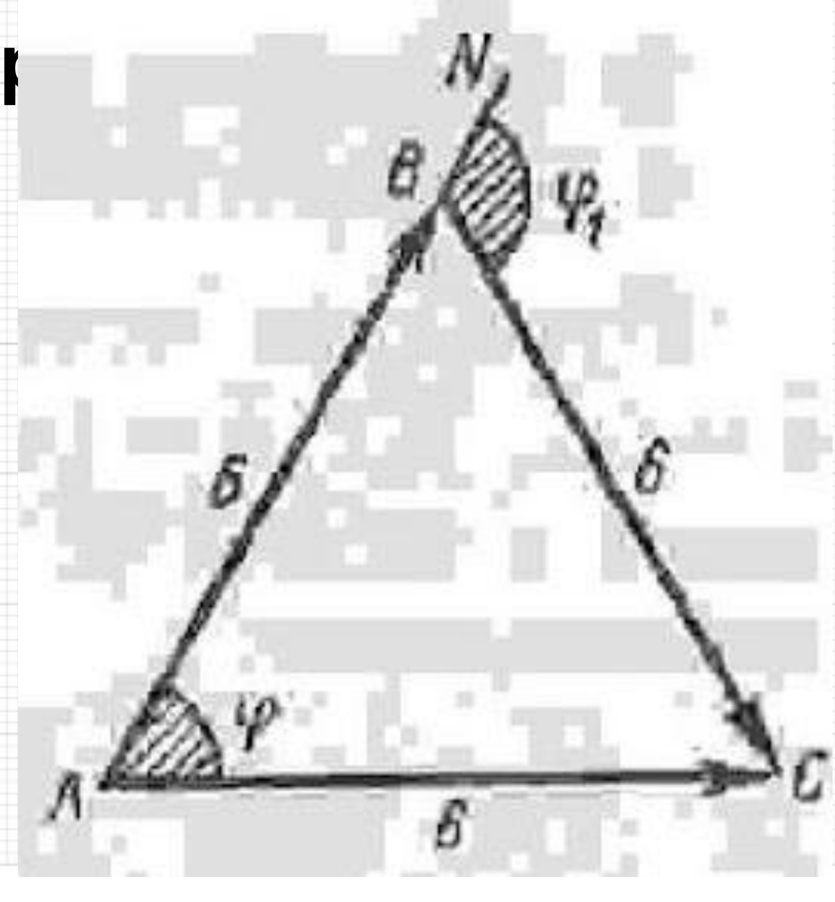


Пример №1

- **В равностороннем треугольнике ABC со стороной, равной 6, найти скалярное произведение вектор**

a) **AB и AC;**

b) **AB и BC.**



Решение:

а) **Так как угол ф между векторами AB и AC (и их направлениями) равен 60°, то для скалярного произведения этих векторов получим:**

$$\overrightarrow{AB}\overrightarrow{BC} = \left|\overrightarrow{AB}\right| \cdot \left|\overrightarrow{BC}\right| \cdot \cos\widehat{BAC} =$$

$$= 6 \cdot 6 \cdot \cos 60° = 36 \cdot 0{,}5 = 18$$

Решение:

b) Угол ф между векторами AB и BC (то есть угол между их направлениями) есть угол ф$_1$=120°, поэтому:

$$\overrightarrow{AB}\overrightarrow{BC} = \left|\overrightarrow{AB}\right| \cdot \left|\overrightarrow{BC}\right| \cdot \cos \widehat{NBC} =$$

$$= 6 \cdot 6 \cdot \cos 120° = 36 \cdot (-0{,}5) = -18$$

Скалярное произведение векторов в координатной форме

- **Пусть два ненулевых вектора заданы своими коорд** $\vec{a}=(x_a;y_a)$ $\vec{b}=(x_b;y_b)$ **,**
  .
- **Это значит, что ве** $\vec{a}=x_a\vec{i}+y_a\vec{j}$ $\vec{b}=x_b\vec{i}+y_b\vec{j}$ **в базисе (i;j), то есть ,**
- **Найдём их произведение:**

$$\vec{a}\vec{b}=(x_a\vec{i}+y_a\vec{j})(x_b\vec{i}+y_b\vec{j})=x_ax_b\vec{i}^2+x_by_b\vec{i}\vec{j}+x_ay_a\vec{i}\vec{j}+y_ay_b\vec{j}^2$$

- **Так как вектора i и j – единичные и взаимно перпендикулярные, то $i^2=1$; $j^2=1$; $ij=0$. Подставив эти значения в равенство (2), получим**

Скалярное произведение векторов в координатной форме

- **Так как вектора i и j – единичные и взаимно перпендикулярные, то $i^2=1$; $j^2=1$; $ij=0$. Подставив эти значения в равенство (2), получим**

$$\vec{a}\vec{b} = x_a x_b + y_a y_b \qquad \textbf{(3)}$$

- **Итак, *скалярное произведение векторов, заданных своими координатами, равно сумме произведений одноимённых координат.***

Пример №2

- **Найти скалярное произведение векторов a=(3;5) и b=(-2;7).**

Решение:

- **Здесь $x_a=3$; $x_b=-2$; $y_a=5$; $y_b=7$. Используя формулу (3), получим:**

$$\vec{a}\vec{b} = 3 \cdot (-2) + 5 \cdot 7 = -6 + 35 = 29$$

Нахождение угла между векторами

- **Из определения скалярного произведения двух векторов можно получить формулу:**

$$\cos\varphi = \frac{\vec{a}\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|} \qquad \textbf{(4)}$$

которая позволяет найти угол между векторами.

Нахождение угла между векторами

- **Учитывая, чт** $\vec{a}\vec{b} = x_a x_b + y_a y_b$

$$\vec{a} = \sqrt{x_a^2 + y_a^2}$$

$$\vec{b} = \sqrt{x_b^2 + y_b^2}$$

формулу (4) можно записать в координатной форме:

$$\cos\varphi = \frac{x_a x_b + y_a y_b}{\sqrt{x_a^2 + y_a^2} \cdot \sqrt{x_b^2 + y_b^2}}$$

Пример №3

- **Найти угол между векторами:**

a) **a=(4;0) и b=(2;-2);**

b) **a=(5;-3) и b=(3;5).**

Решение:

a) **Используя формулу (5), находим:**

$$\cos\varphi = \frac{4 \cdot 2 + 0 \cdot (-2)}{\sqrt{16+0} \cdot \sqrt{4+4}} = \frac{8}{4 \cdot 2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \varphi = \frac{\pi}{4}$$

Решение:

b) Имеем:

$$\cos\varphi = \frac{5\cdot 3 + (-3)\cdot 5}{\sqrt{25+9}\cdot\sqrt{9+25}} = \frac{0}{34} = 0$$

$$\varphi = \arccos 0 = \frac{\pi}{2}$$

Домашнее задание

- **Лисичкин В. Т., Соловей   чик И. Л. Математика в задачах с решениями**

№42, 43, 48, 49, 54, 55

Список использованной литературы

- **Дадаян А. А. Сборник задач по математике. – М.: ФОРУМ: ИНФРА-М, 2007.**
- **Лисичкин В. Т., Соловейчик И. Л. Математика в задачах с решениями. – СПб.: «Лань», 2011.**

Список использованных материалов, Интернет-ресурсов

- **Мультимедийный диск «Алгебра 10 - 11 класс».**
- **Мультимедийный диск «Математика 7-11 Класс».**