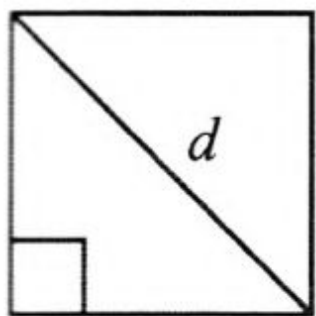


# Геометрия





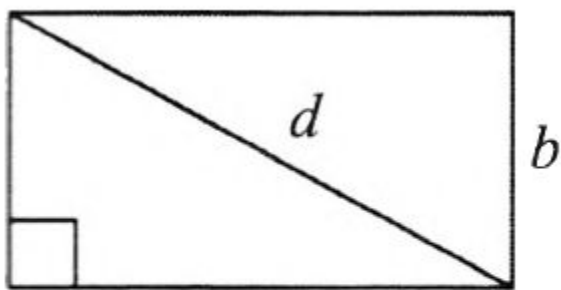
$a$

Квадрат

Площадь:  $S = a^2$ .

Периметр:  $P = 4a$ . (Периметр — это сумма всех сторон фигуры.)

Длина диагонали:  $d = a \cdot \sqrt{2}$ .

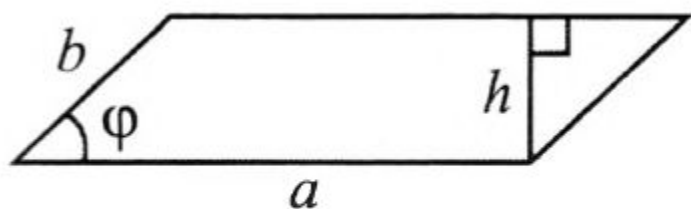


$a$

Прямоугольник

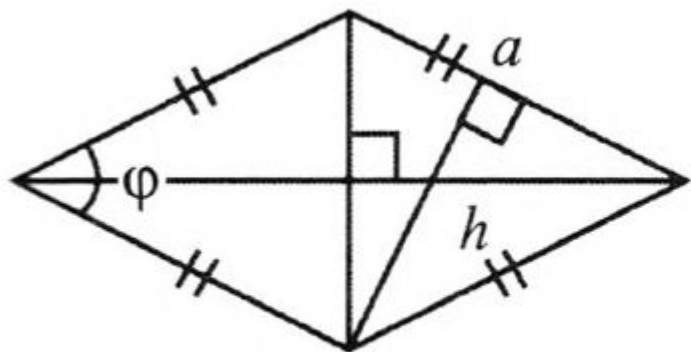
$$S = a \cdot b.$$

$$d = \sqrt{a^2 + b^2}.$$



Параллелограмм

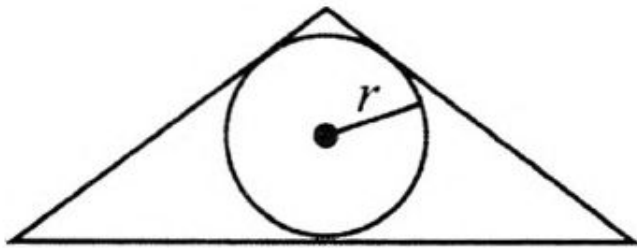
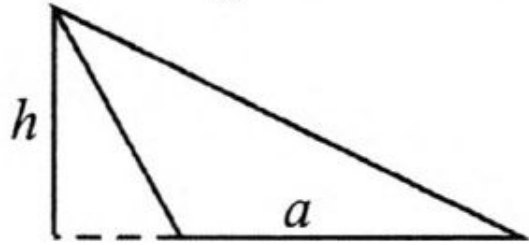
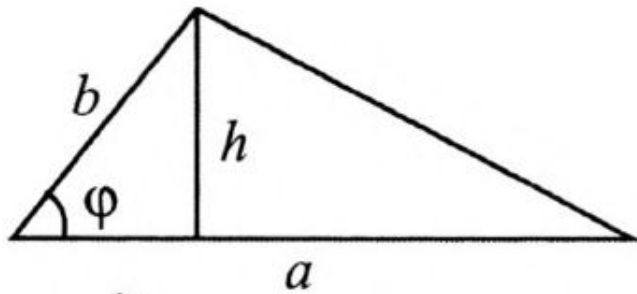
$$S = a \cdot h = a \cdot b \cdot \sin\varphi.$$



Ромб

$$S = a \cdot h = a^2 \cdot \sin\varphi = \frac{1}{2} \cdot d_1 \cdot d_2$$

( $d_1$  и  $d_2$  — диагонали ромба).

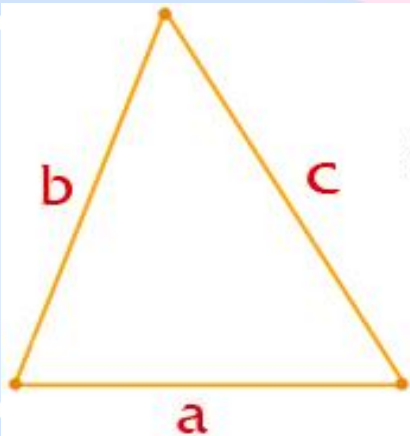


Треугольник

$$S = \frac{1}{2} \cdot a \cdot h = \frac{1}{2} \cdot a \cdot b \cdot \sin \varphi = p \cdot r$$

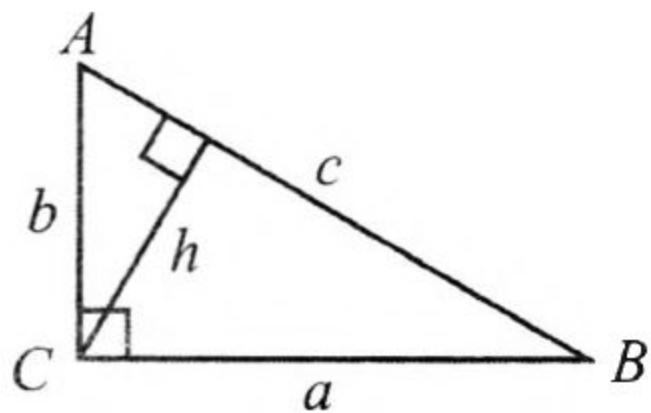
( $p$  — полупериметр,  $r$  — радиус вписанной окружности).

$$S = abc/4R$$



$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

$$p = \frac{a+b+c}{2}$$



Прямоугольный  
треугольник

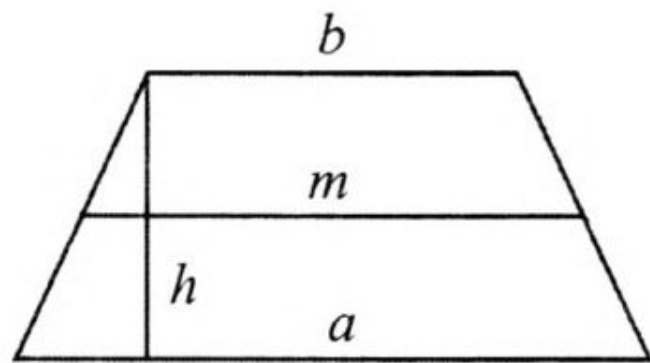
$$S = \frac{1}{2} \cdot a \cdot b = \frac{1}{2} \cdot c \cdot h.$$

$$c^2 = a^2 + b^2 \text{ (теорема Пифагора).}$$

$$\sin A = \frac{a}{c};$$

$$\cos A = \frac{b}{c};$$

$$\operatorname{tg} A = \frac{a}{b}.$$

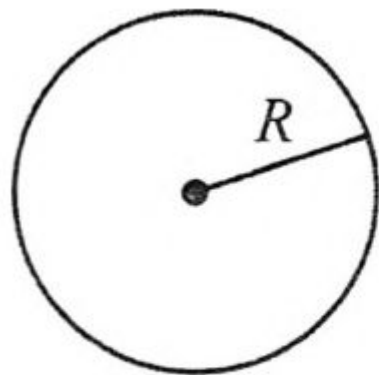


Трапеция

$$S = \frac{1}{2}(a + b) \cdot h;$$

$$m = \frac{1}{2}(a + b)$$

( $m$  — средняя линия, отрезок, соединяющий середины боковых сторон).

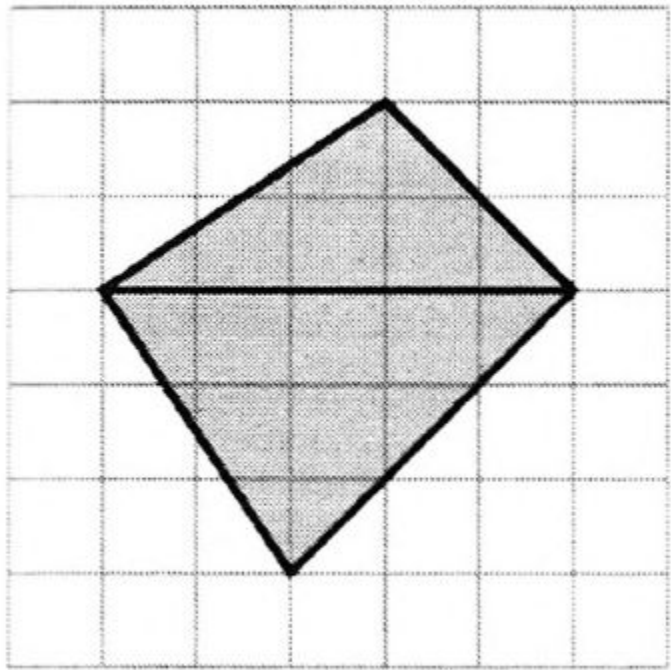


Круг

$$S = \pi R^2.$$

$$L = 2\pi R = \pi D \text{ (} D \text{ — диаметр)}$$

# Найти площадь фигуры

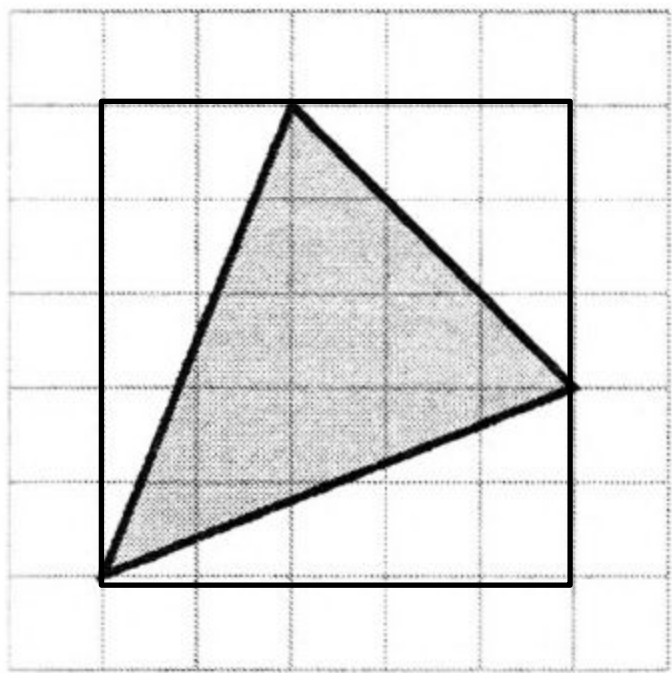


Применим простой прием. Разобьем эту фигуру на такие, площадь которых легко найти, и найдем ее площадь — как сумму площадей этих фигур.

Разделим четырехугольник горизонтальной линией на два треугольника с общим основанием, равным 5. Высоты этих треугольников равны 2 и 3. Тогда площадь четырехугольника равна сумме площадей двух треугольников:

$$S = 5 + 7,5 = 12,5.$$





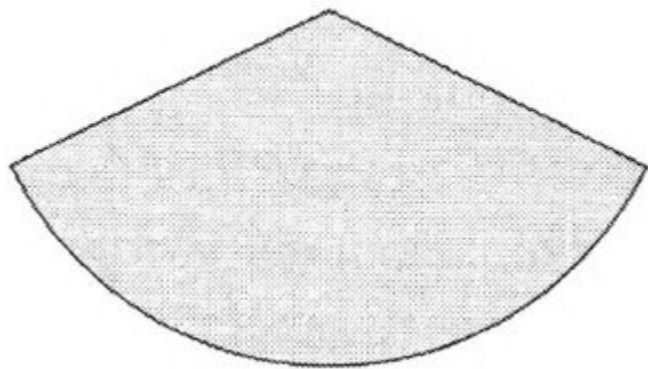
**2.** В других случаях площадь фигуры можно представить как разность каких-либо площадей.

Не так-то просто посчитать, чему равны основание и высота в этом треугольнике! Зато его площадь равна разности площадей квадрата со стороной 5 и трех прямоугольных треугольников. Видите их на рисунке? Получаем:

$$S = 25 - 5 - 5 - 4,5 = 10,5.$$



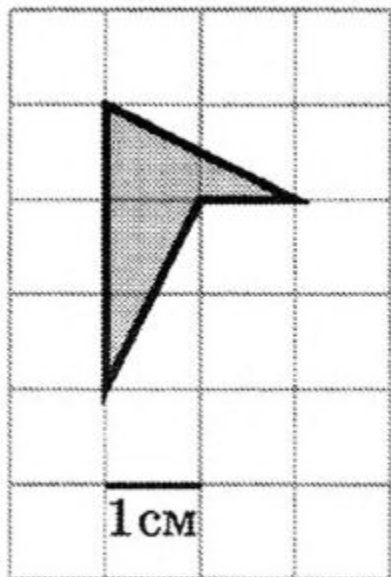
**3.** Найдите площадь сектора круга радиуса 1, длина дуги которого равна 2.



Площадь всего круга равна  $\pi R^2 = \pi$ , так как  $R = 1$ . Остается узнать, какая часть круга изображена. Поскольку длина всей окружности равна  $2\pi R = 2\pi$  (так как  $R = 1$ ), а длина дуги данного сектора равна 2, следовательно, длина дуги в  $\pi$  раз меньше, чем длина всей окружности. Угол, на который опирается эта дуга, также в  $\pi$  раз меньше, чем полный круг (то есть 360 градусов). Значит, и площадь сектора будет в  $\pi$  раз меньше, чем площадь всего круга.

*Ответ:* 1.

4. Найдите площадь четырехугольника, изображенного на клетчатой бумаге с размером клетки 1 см на 1 см (см. рисунок). Ответ дайте в квадратных сантиметрах

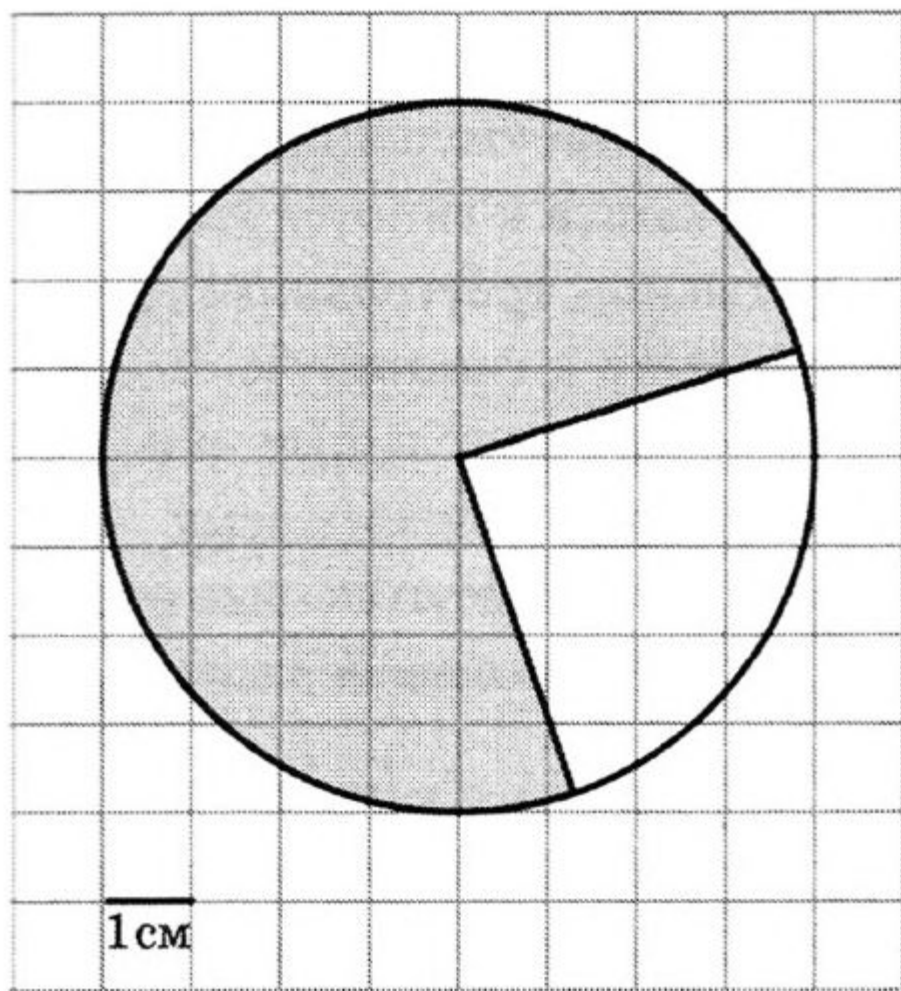


Разбейте фигуру на два равных по площади треугольника.

*Ответ: 2.*

5. Найдите (в  $\text{см}^2$ ) площадь фигуры, изображенной на клетчатой бумаге с размером клетки 1 см на 1 см (см. рисунок).

В ответе запишите  $\frac{S}{\pi}$ .




Закрашены  $\frac{3}{4}$  круга. Значит,

$$S = \frac{3}{4} \pi \cdot 4^2 = 12\pi;$$

$$\frac{S}{\pi} = 12.$$

Ответ: 12.

A cartoon illustration of Peppa Pig, a pink piglet, smiling broadly with her arms raised. She is wearing a red dress. The background is light blue with several white-outlined circles of various sizes scattered around.

# ОСНОВЫ ТРИГОНОМЕТРИИ





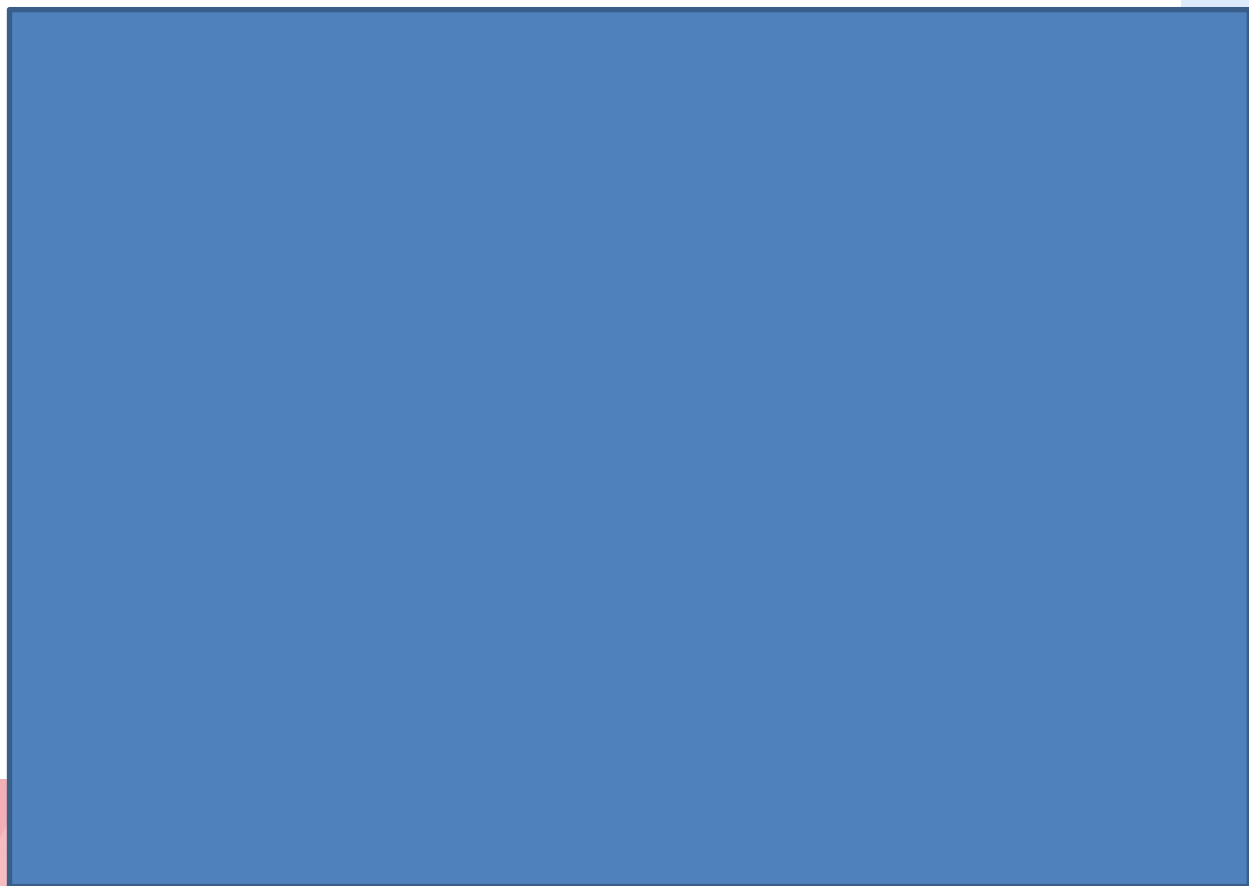
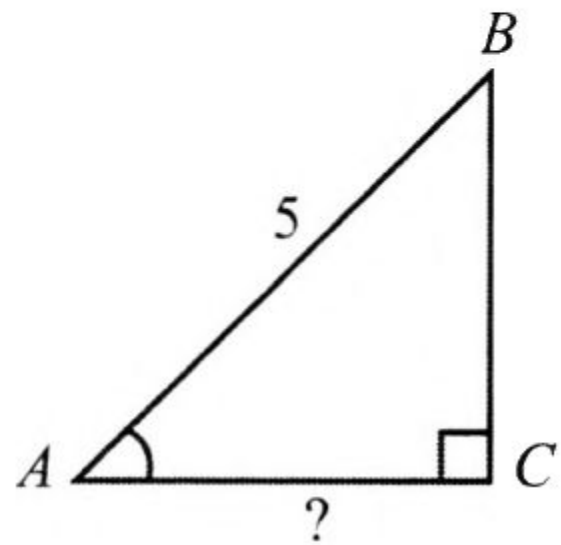
$\varphi$	$0^\circ$	$30^\circ$	$45^\circ$	$60^\circ$	$90^\circ$
$\sin \varphi$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos \varphi$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\operatorname{tg} \varphi$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	—
$\operatorname{ctg} \varphi$	—	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0

$$\operatorname{ctg} \alpha = \frac{b}{a}$$

$\sin \alpha$

$$\operatorname{tg} \alpha = \operatorname{ctg} \beta$$

7. В треугольнике  $ABC$  угол  $C$  равен  $90^\circ$ ,  $AB = 5$ ,  $\sin \angle A = \frac{7}{25}$ .  
Найдите  $AC$ .





8. В треугольнике  $ABC$  угол  $C$  равен  $90^\circ$ , угол  $A$  равен  $60^\circ$ ,  $BC = 2\sqrt{3}$ . Найдите  $AB$ .

Обратите внимание, что

$$\sin (180^\circ - \alpha) = \sin \alpha,$$

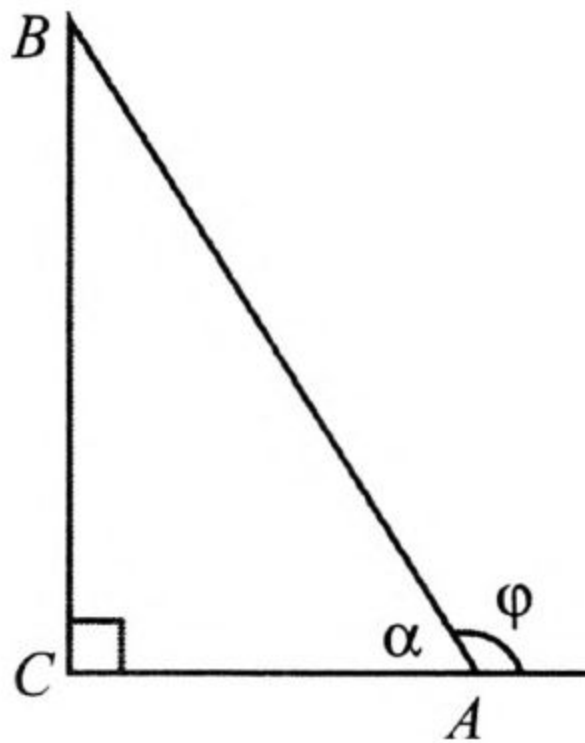
$$\cos (180^\circ - \alpha) = -\cos \alpha,$$

$$\operatorname{tg} (180^\circ - \alpha) = -\operatorname{tg} \alpha$$

**Внешний угол треугольника равен сумме двух внутренних углов, не смежных с ним.**

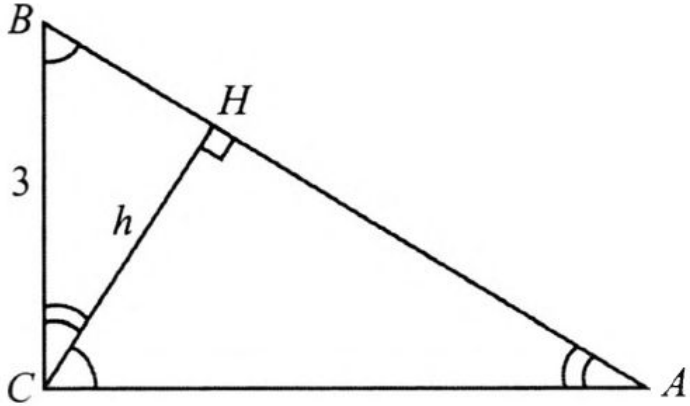


9. В треугольнике  $ABC$  угол  $C$  равен  $90^\circ$ ,  $\cos \angle A = \frac{4}{\sqrt{17}}$ . Найдите тангенс внешнего угла при вершине  $A$ .



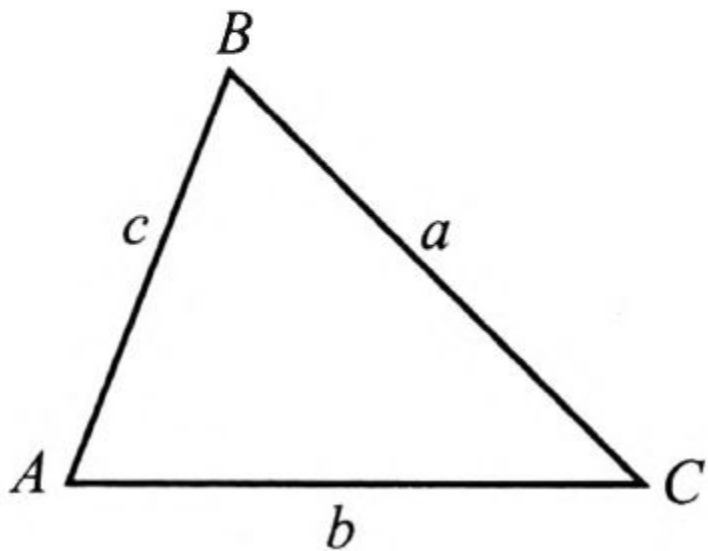
10. В треугольнике  $ABC$  угол  $C$  равен  $90^\circ$ ,  $CH$  – высота,

$BC = 3$ ,  $\cos \angle A = \frac{\sqrt{35}}{6}$ . Найдите  $AH$ .



# Формулы геометрии и свойства фигур

Для любого треугольника выполняются теорема синусов и теорема косинусов.



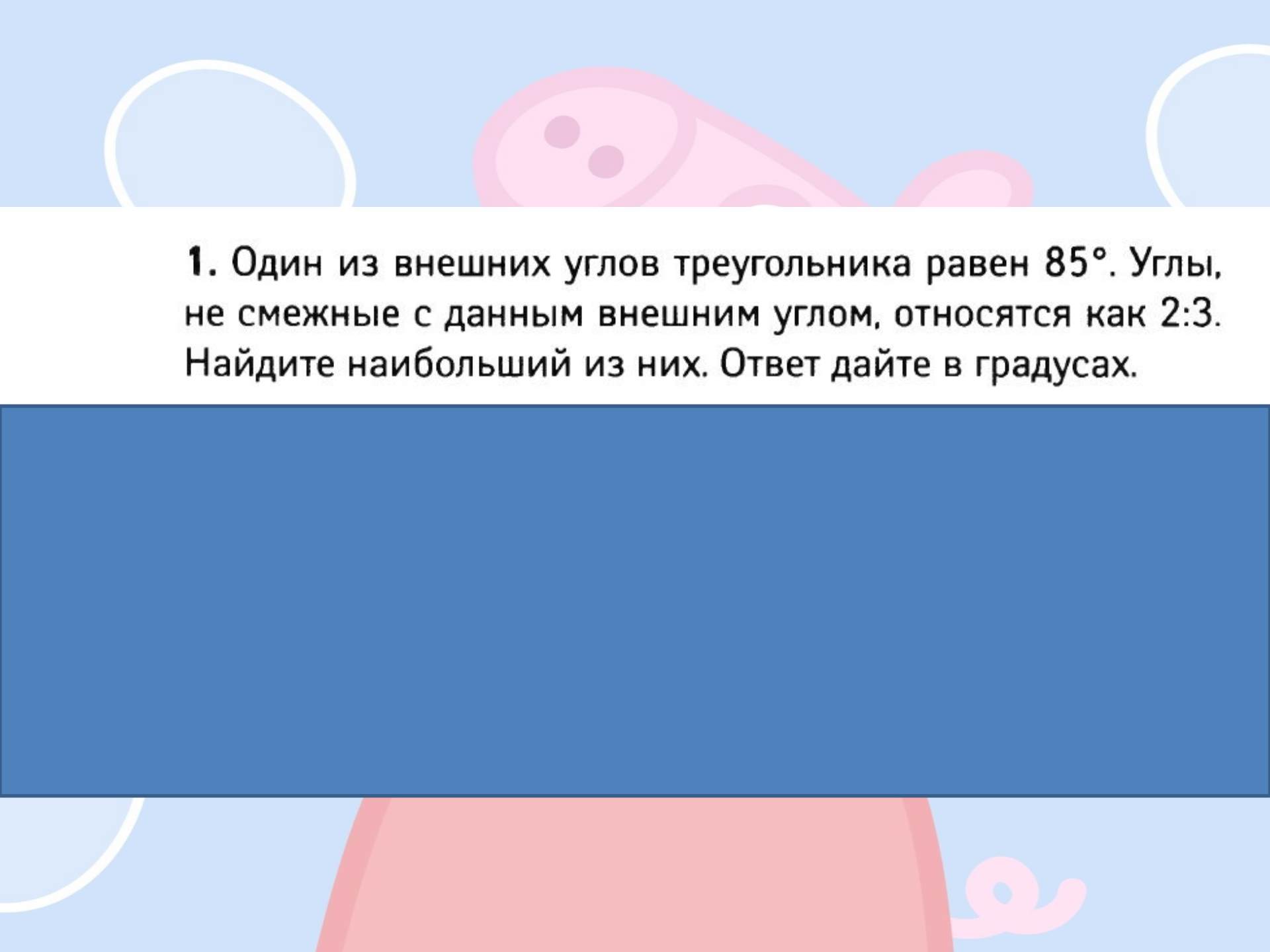
Теорема синусов:

$$\frac{a}{\sin \angle A} = \frac{b}{\sin \angle B} = \frac{c}{\sin \angle C} = 2R,$$

где  $R$  — радиус описанной окружности.

Теорема косинусов:

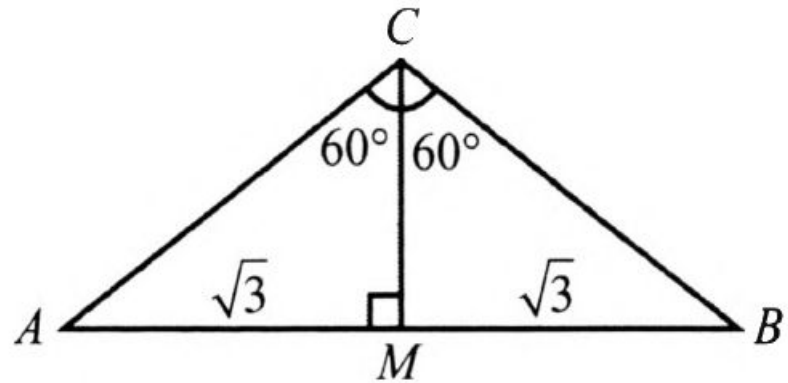
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2a \cdot b \cdot \cos \angle C.$$



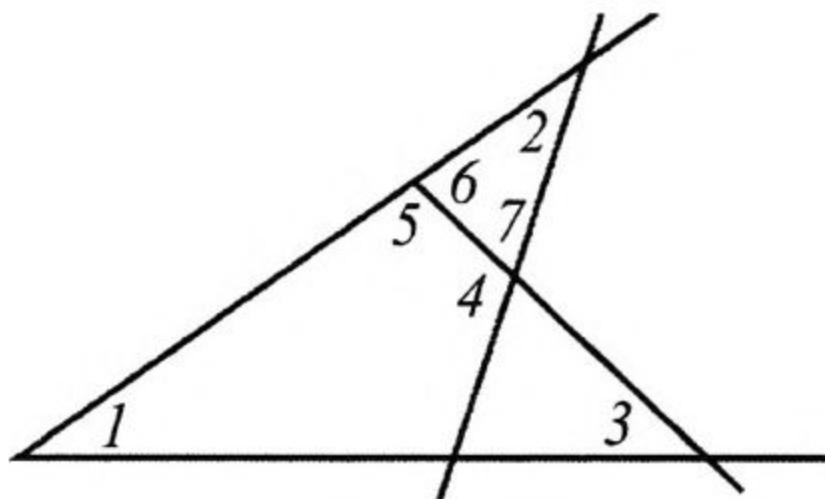
1. Один из внешних углов треугольника равен  $85^\circ$ . Углы, не смежные с данным внешним углом, относятся как 2:3. Найдите наибольший из них. Ответ дайте в градусах.



3. В треугольнике  $ABC$   $AC = BC$ , угол  $C$  равен  $120^\circ$ ,  $AB = 2\sqrt{3}$ . Найдите  $AC$ .



Давайте отметим на чертеже еще несколько углов. Они нам понадобятся.



Сначала найдем угол 5. Он равен  $180^\circ - \angle 1 - \angle 3 = 90^\circ$ .


Тогда  $\angle 6 = 90^\circ$ ,  $\angle 7 = 180^\circ - \angle 2 - \angle 6 = 60^\circ$ .

Угол 4, смежный с углом 7, равен  $120^\circ$ .

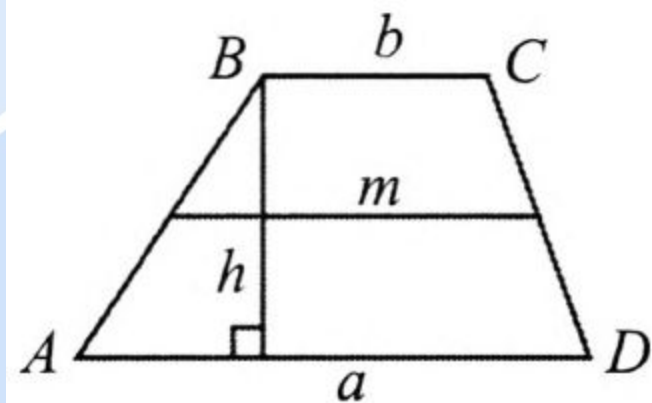
*Ответ:* 120.

**5.** Углы треугольника относятся как 2:3:4. Найдите меньший из них. Ответ дайте в градусах.



A cartoon illustration of Peppa Pig, a pink piglet, with her mouth open as if speaking. She is wearing a red dress. The background is light blue with several white-outlined circles of various sizes, resembling bubbles. The text is overlaid on her face and chest.

**Четырехугольн  
ИКИ**



$$m = \frac{1}{2}(a + b)$$

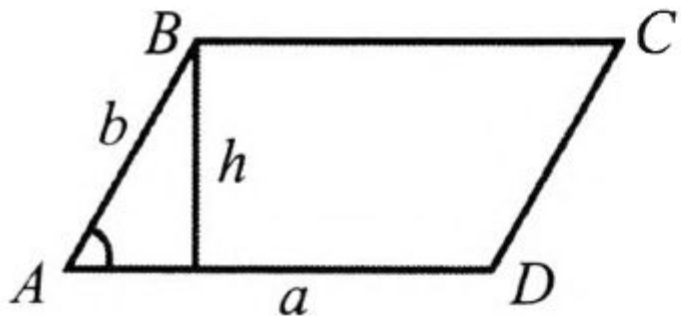
**Трапеция** — четырехугольник, имеющий одну пару параллельных сторон.

Эти стороны называются **основаниями** трапеции, две другие — **боковые стороны**.

**Средняя линия** трапеции — отрезок, соединяющий середины боковых сторон.

Средняя линия параллельна основаниям трапеции и равна их полусумме.

Площадь трапеции:  $S = \frac{1}{2}(a + b)h$ .



$$\begin{aligned}AB &= CD, BC = DA, \\ \angle A &= \angle C, \\ \angle A + \angle D &= 180^\circ.\end{aligned}$$

**Параллелограмм** — четырехугольник, имеющий две пары параллельных сторон.

Противоположные углы параллелограмма равны.

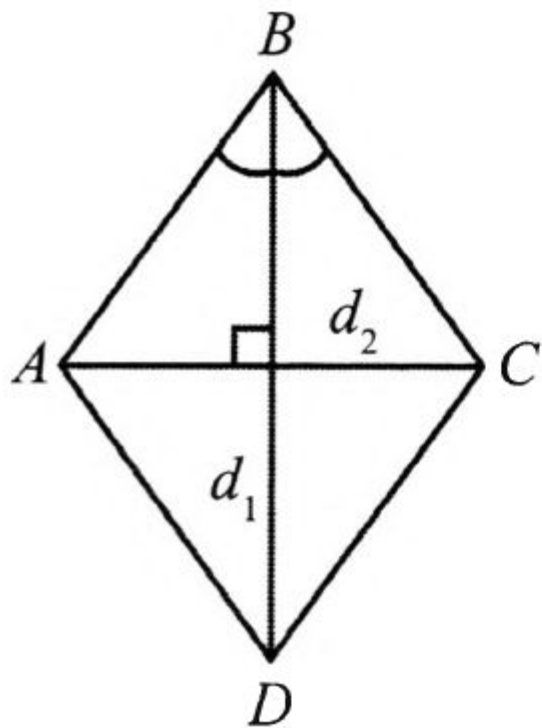
Сумма углов, прилежащих к одной стороне параллелограмма, равна  $180^\circ$ .

Диагонали параллелограмма в точке пересечения делятся пополам.

Площадь параллелограмма:

$$S = ab \sin \angle A = ah.$$

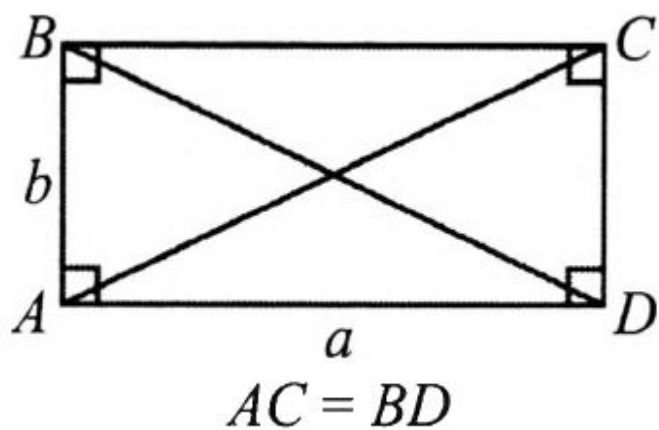




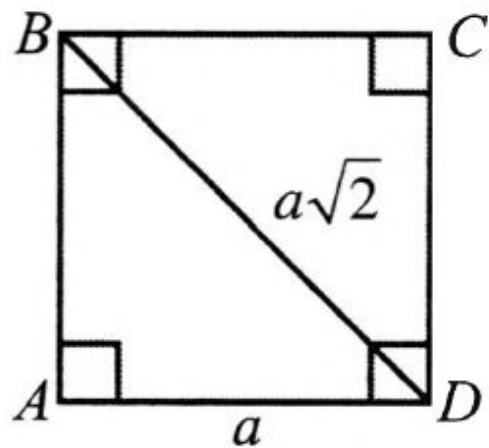
**Ромб** — это параллелограмм, у которого все стороны равны.

Диагонали ромба перпендикулярны и являются биссектрисами углов ромба.

$$\text{Площадь ромба: } S = \frac{1}{2} d_1 d_2.$$



**Прямоугольник** — это параллелограмм, у которого все углы прямые.  
Диагонали прямоугольника равны.  
Площадь прямоугольника:  $S = ab$ .



**Квадрат** — это прямоугольник, у которого все стороны равны.

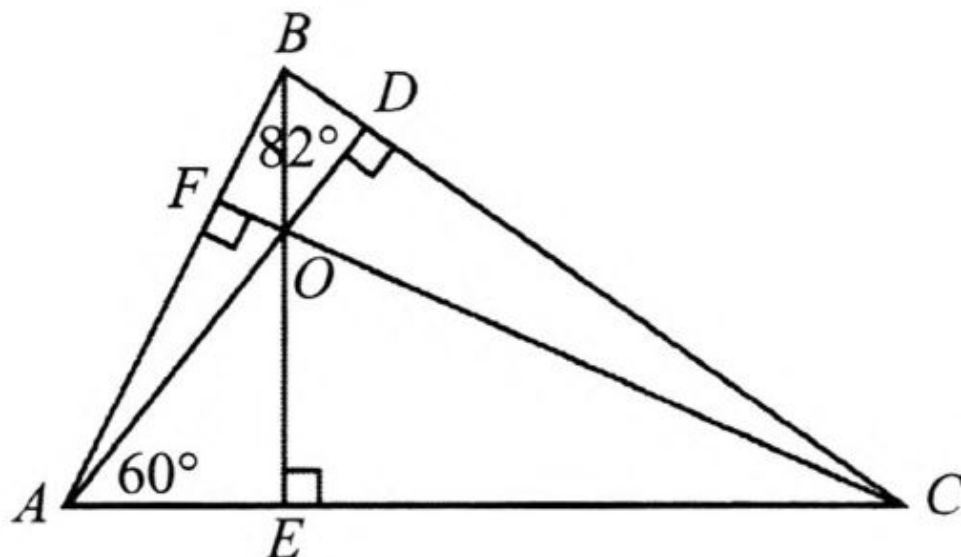
Другими словами, это ромб с прямыми углами.

Площадь квадрата:  $S = a^2$ .

Сумма углов выпуклого четырехугольника равна  $360^\circ$ .

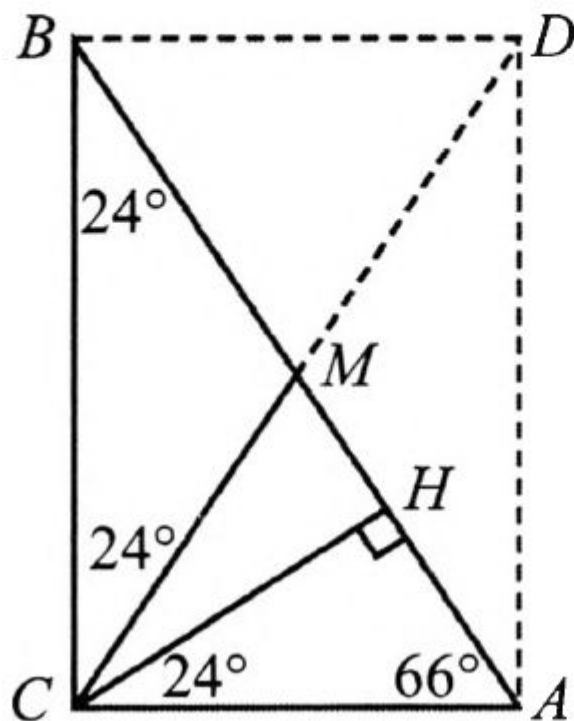


11. В треугольнике  $ABC$  угол  $A$  равен  $60^\circ$ , угол  $B$  равен  $82^\circ$ .  $AD$ ,  $BE$  и  $CF$  — высоты, пересекающиеся в точке  $O$ . Найдите угол  $AOF$ . Ответ дайте в градусах.

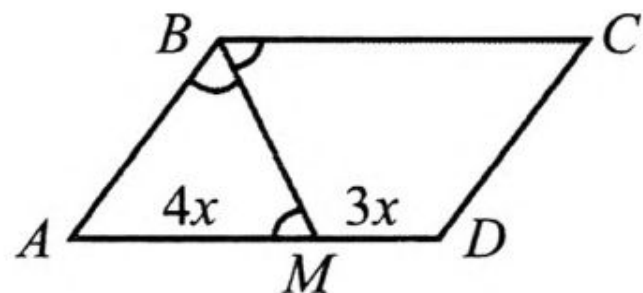


**В прямоугольном треугольнике медиана, проведенная к гипотенузе, равна половине гипотенузы.**

**12.** Острые углы прямоугольного треугольника равны  $24^\circ$  и  $66^\circ$ . Найдите угол между высотой и медианой, проведенными из вершины прямого угла. Ответ дайте в градусах.

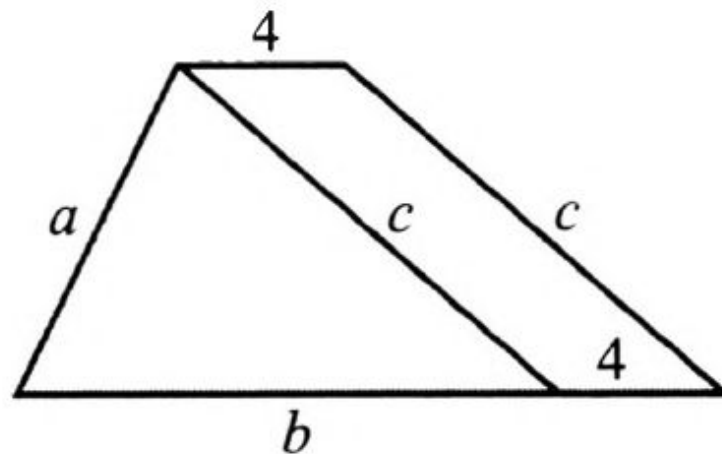


**13.** Биссектриса тупого угла параллелограмма делит противоположную сторону в отношении 3:4, считая от вершины тупого угла. Найдите большую сторону параллелограмма, если его периметр равен 88.

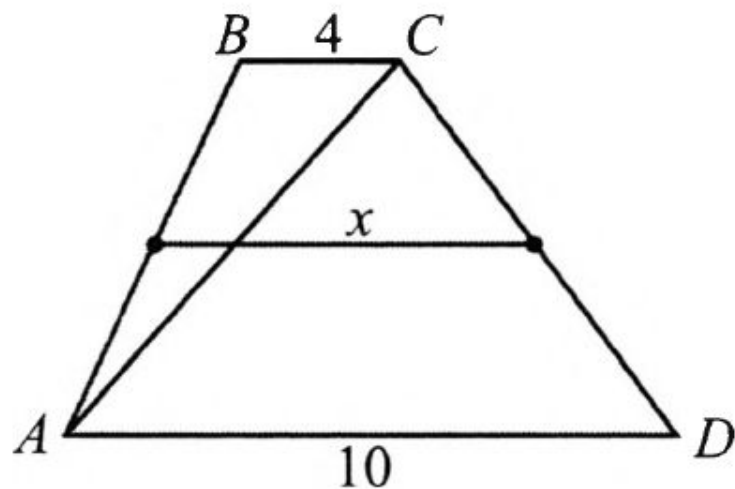




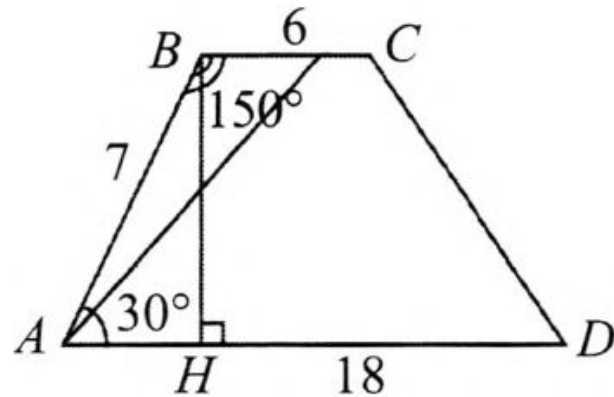
**14.** Прямая, проведенная параллельно боковой стороне трапеции через конец меньшего основания, равного 4, отсекает треугольник, периметр которого равен 15. Найдите периметр трапеции.



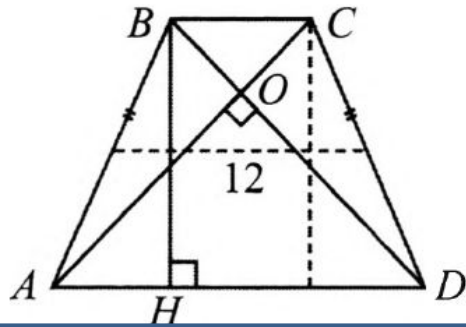
**17.** Основания трапеции равны 4 и 10. Найдите больший из отрезков, на которые делит среднюю линию этой трапеции одна из ее диагоналей.



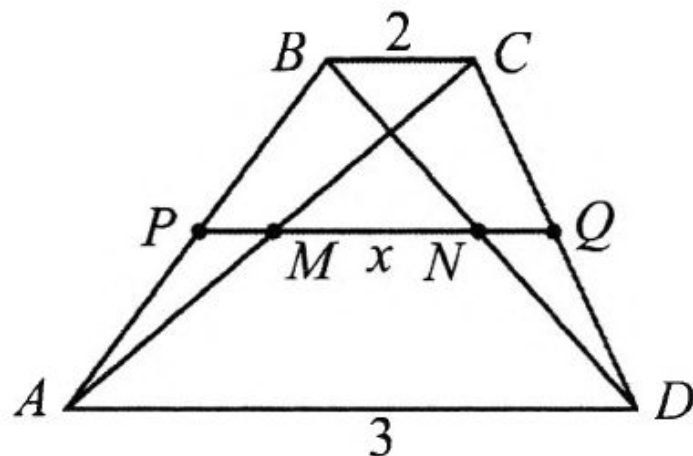
**18.** Основания трапеции равны 18 и 6, боковая сторона, равная 7, образует с одним из оснований трапеции угол  $150^\circ$ . Найдите площадь трапеции.



20. В равнобедренной трапеции диагонали перпендикулярны. Высота трапеции равна 12. Найдите ее среднюю линию.

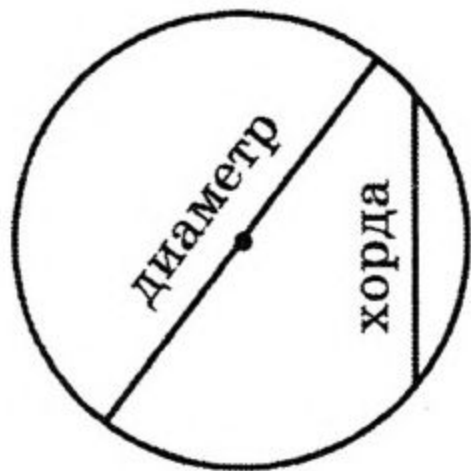


**22.** Основания трапеции равны 3 и 2. Найдите отрезок, соединяющий середины диагоналей трапеции.



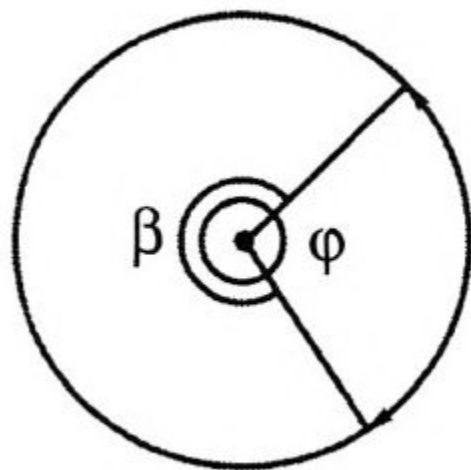
A cartoon illustration of Peppa Pig, a pink piglet, smiling broadly with her mouth open, showing a dark grey tongue. She has large, round eyes and a prominent pink nose. She is wearing a simple pink dress. The background is a light blue color with several white, hand-drawn circles of varying sizes scattered around her.

**ОКРУЖНОСТЬ**



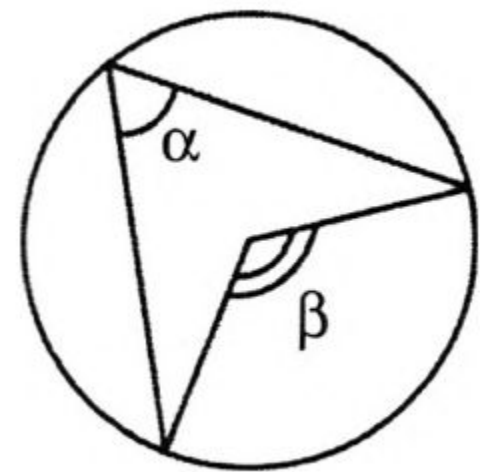
Отрезок, соединяющий две точки на окружности, называется **хорда**.

Самая большая хорда проходит через центр окружности и называется **диаметр**.

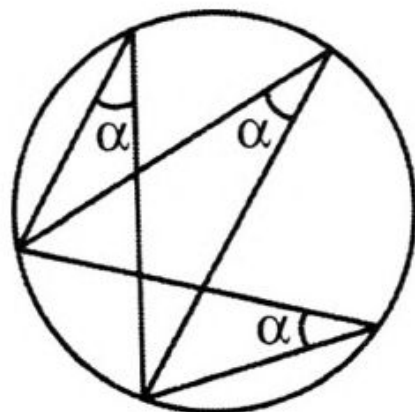


Угол, вершина которого лежит в центре окружности, называется **центральный**. Величина центрального угла равна угловой величине дуги, на которую он опирается. Угол  $\beta$  тоже называется **центральный**. Только он опирается на дугу, которая больше  $180^\circ$ .

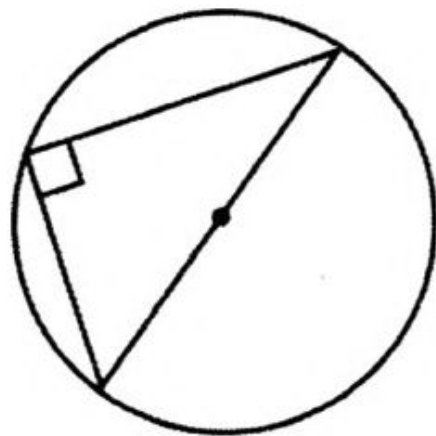




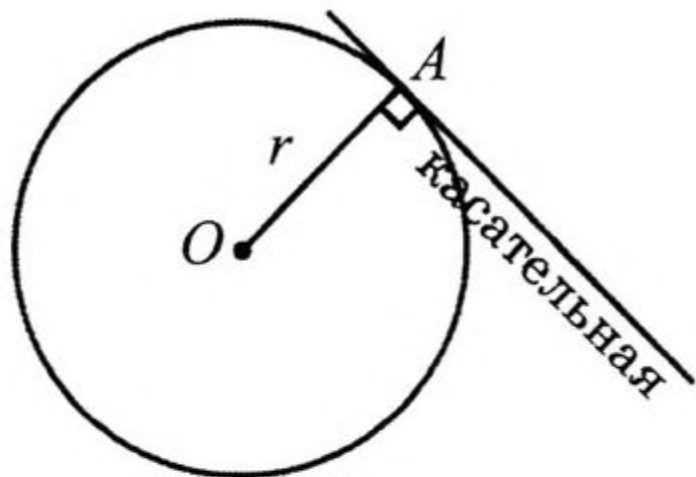
Угол, вершина которого лежит на окружности, а стороны пересекают окружность, называется **вписанным**. Величина вписанного угла равна половине центрального угла, опирающегося на ту же дугу,  $\alpha = \frac{\beta}{2}$ .



Вписанные углы, опирающиеся на одну и ту же дугу, равны.

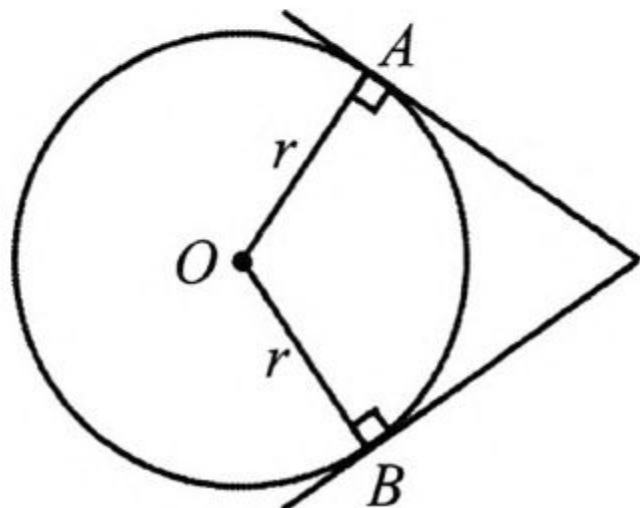


Вписанный угол, опирающийся на диаметр, — прямой.

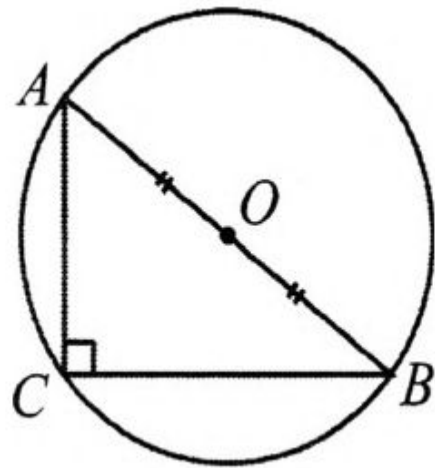


Прямая, имеющая с окружностью только одну общую точку, называется **касательной**.

Касательная к окружности перпендикулярна радиусу, проведенному в точку касания.

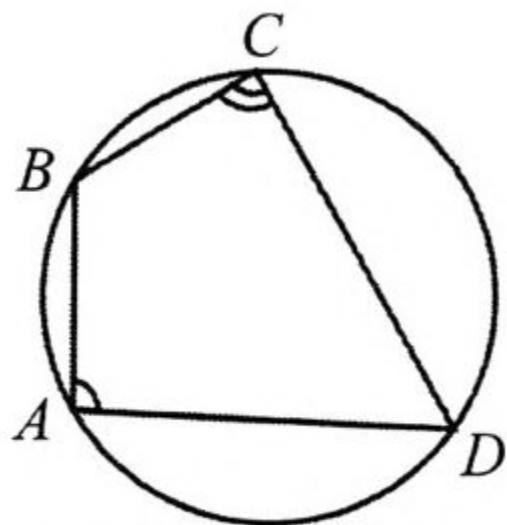


Отрезки касательных, проведенных из одной точки, равны.



У прямоугольного треугольника центр описанной окружности лежит на середине гипотенузы.

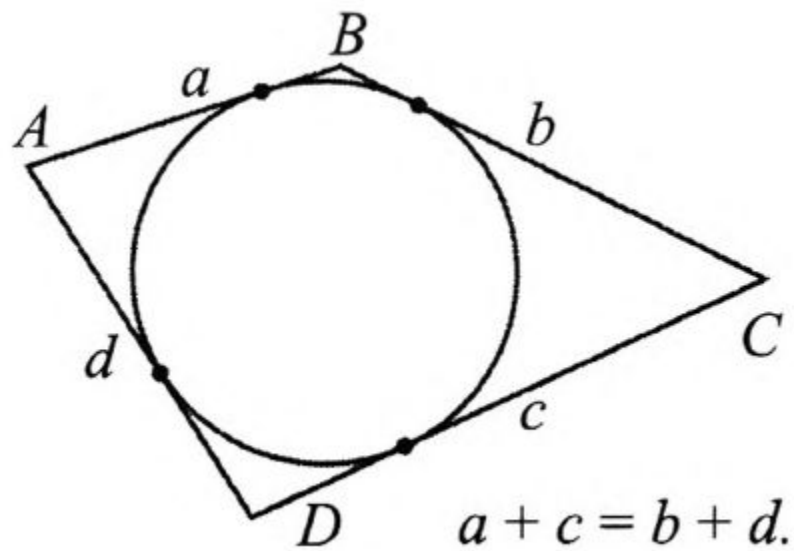




$$\angle A + \angle C = 180^\circ$$

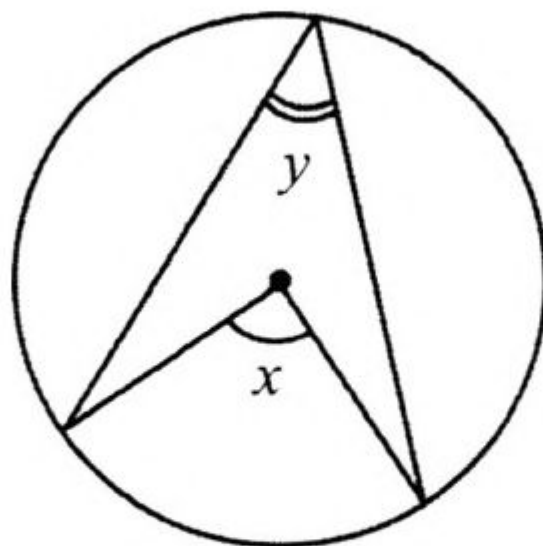
Четырехугольник можно **вписать** в окружность тогда и только тогда, когда суммы его противоположных углов равны  $180^\circ$ .





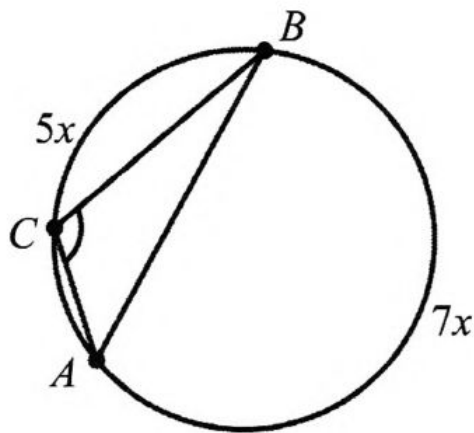
Четырехугольник можно **описать** вокруг окружности тогда и только тогда, когда суммы длин его противоположных сторон равны.

2. Центральный угол на  $36^\circ$  больше острого вписанного угла, опирающегося на ту же дугу окружности. Найдите вписанный угол. Ответ дайте в градусах.





4. Хорда  $AB$  делит окружность на две части, градусные величины которых относятся как  $5:7$ . Под каким углом видна эта хорда из точки  $C$ , принадлежащей меньшей дуге окружности? Ответ дайте в градусах.



Очевидно, что нужно найти угол  $ACB$ .

Сумма двух дуг, на которые хорда  $AB$  делит окружность, равна  $360^\circ$ , то есть  $5x + 7x = 360^\circ$ .

Отсюда  $x = 30^\circ$ , и тогда вписанный угол  $ACB$  опирается на дугу, равную  $210^\circ$ .

Величина вписанного угла равна половине угловой величины дуги, на которую он опирается, значит, угол  $ACB$  равен  $105^\circ$ .

*Ответ:* 105.



5. Четырехугольник  $ABCD$  вписан в окружность. Угол  $ABC$  равен  $110^\circ$ , угол  $ABD$  равен  $70^\circ$ . Найдите угол  $CAD$ . Ответ дайте в градусах.

