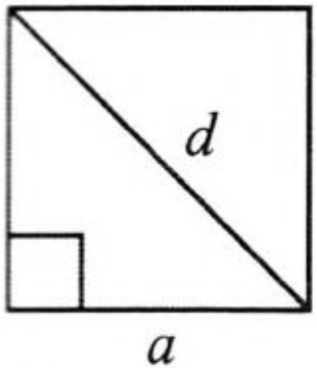
Геометрия

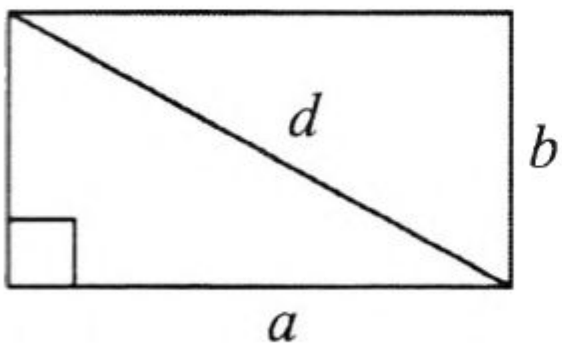


Квадрат

Площадь: $S = a^2$.

Периметр: $P = 4a$. (Периметр — это сумма всех сторон фигуры.)

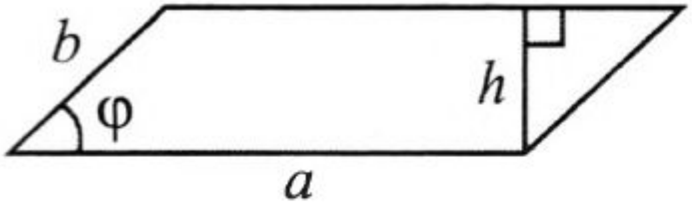
Длина диагонали: $d = a \cdot \sqrt{2}$.



Прямоугольник

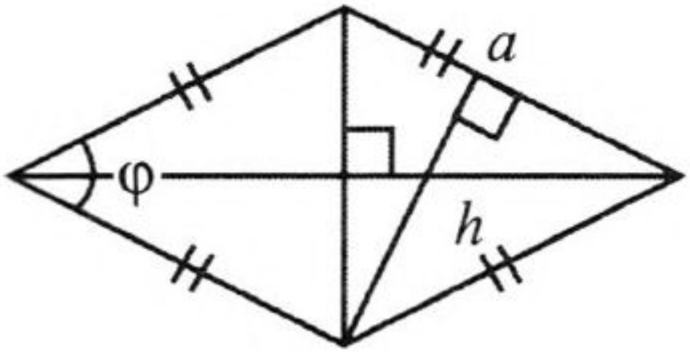
$S = a \cdot b$.

$d = \sqrt{a^2 + b^2}$.



Параллелограмм

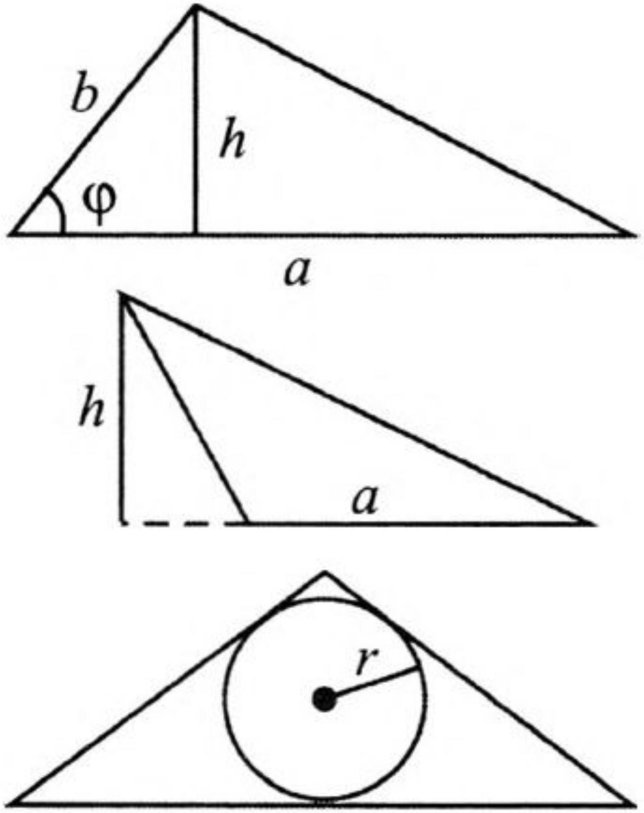
$$S = a \cdot h = a \cdot b \cdot \sin\varphi.$$



Ромб

$$S = a \cdot h = a^2 \cdot \sin\varphi = \frac{1}{2} \cdot d_1 \cdot d_2$$

(d_1 и d_2 — диагонали ромба).

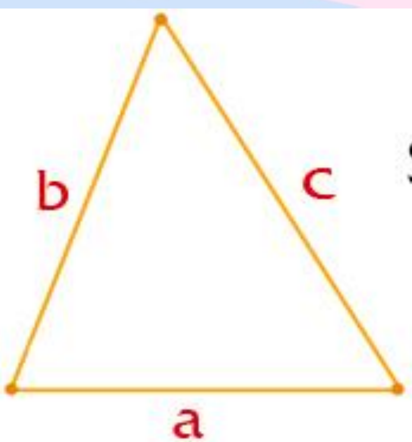


Треугольник

$$S = \frac{1}{2} \cdot a \cdot h = \frac{1}{2} \cdot a \cdot b \cdot \sin\varphi = p \cdot r$$

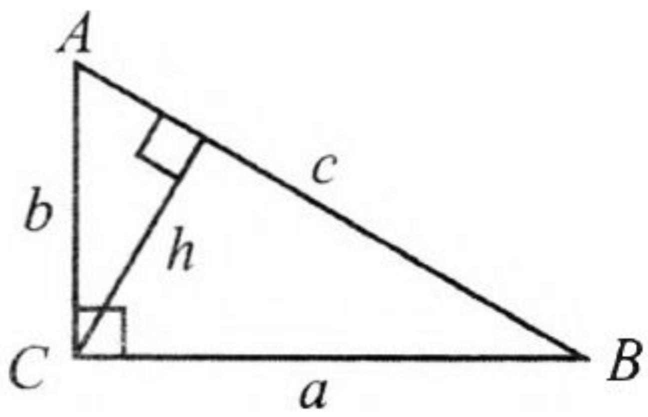
(p — полупериметр, r — радиус вписанной окружности).

$$S = abc/4R$$



$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

$$p = \frac{a+b+c}{2}$$



Прямоугольный треугольник

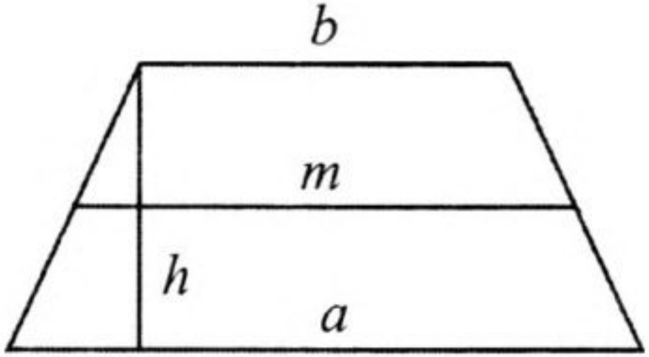
$$S = \frac{1}{2} \cdot a \cdot b = \frac{1}{2} \cdot c \cdot h.$$

$c^2 = a^2 + b^2$ (терема Пифагора).

$$\sin A = \frac{a}{c};$$

$$\cos A = \frac{b}{c};$$

$$\operatorname{tg} A = \frac{a}{b}.$$

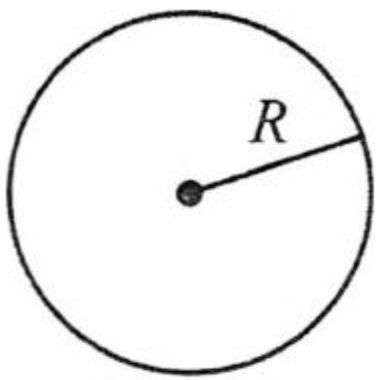


Трапеция

$$S = \frac{1}{2}(a+b)\cdot h;$$

$$m = \frac{1}{2}(a+b)$$

(m — средняя линия, отрезок, соединяющий середины боковых сторон).

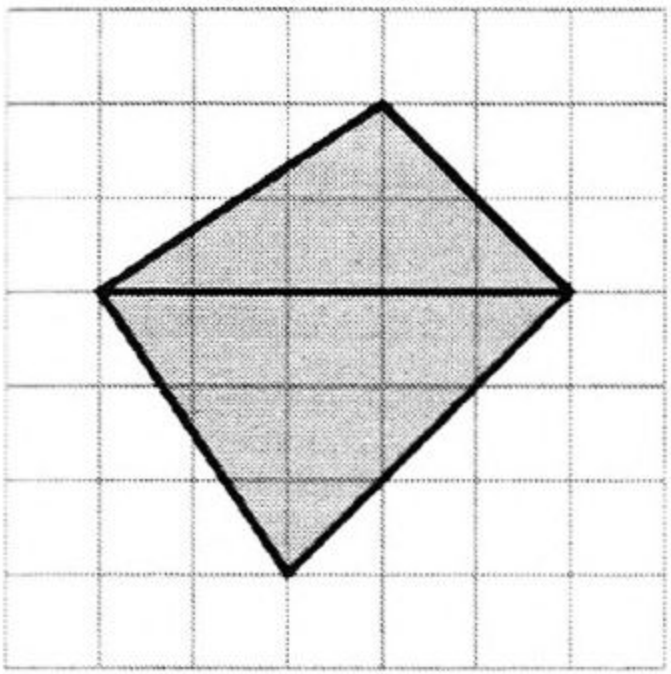


Круг

$S = \pi R^2$.

$L = 2\pi R = \pi D$ (D — диаметр)

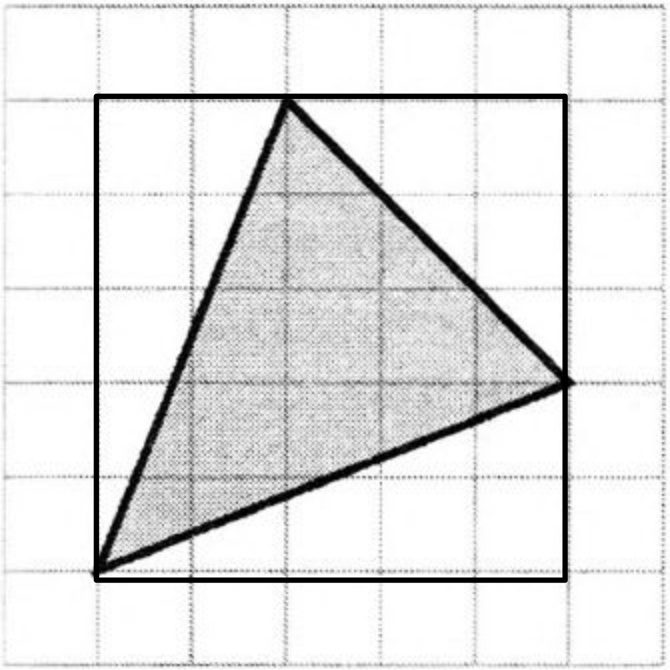
Найти площадь фигуры



Применим простой прием. Разобьем эту фигуру на такие, площадь которых легко найти, и найдем ее площадь — как сумму площадей этих фигур.

Разделим четырехугольник горизонтальной линией на два треугольника с общим основанием, равным 5. Высоты этих треугольников равны 2 и 3. Тогда площадь четырехугольника равна сумме площадей двух треугольников:

$$S = 5 + 7{,}5 = 12{,}5.$$

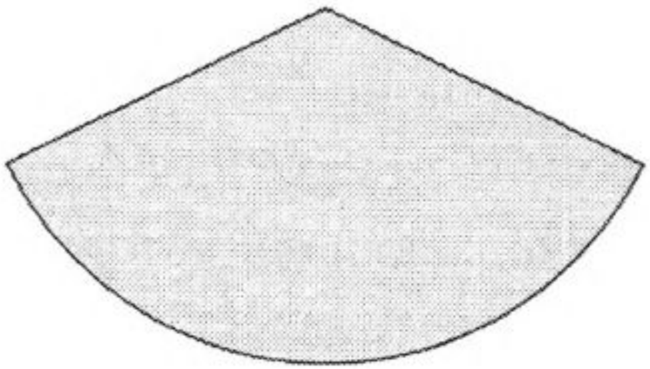


2. В других случаях площадь фигуры можно представить как разность каких-либо площадей.

Не так-то просто посчитать, чему равны основание и высота в этом треугольнике! Зато его площадь равна разности площадей квадрата со стороной 5 и трех прямоугольных треугольников. Видите их на рисунке? Получаем:

$$S = 25 - 5 - 5 - 4{,}5 = 10{,}5.$$

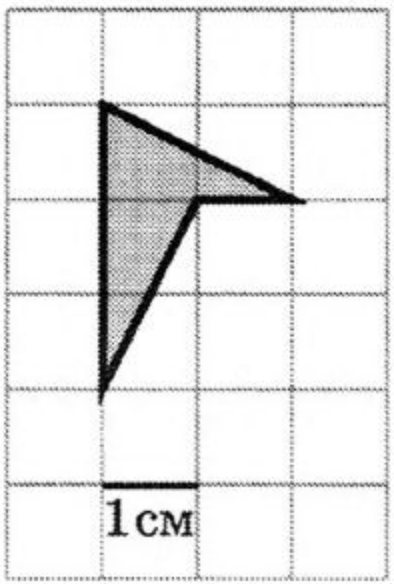
3. Найдите площадь сектора круга радиуса 1, длина дуги которого равна 2.



Площадь всего круга равна $\pi R^2 = \pi$, так как $R = 1$. Остается узнать, какая часть круга изображена. Поскольку длина всей окружности равна $2\pi R = 2\pi$ (так как $R = 1$), а длина дуги данного сектора равна 2, следовательно, длина дуги в π раз меньше, чем длина всей окружности. Угол, на который опирается эта дуга, также в π раз меньше, чем полный круг (то есть 360 градусов). Значит, и площадь сектора будет в π раз меньше, чем площадь всего круга.

Ответ: 1.

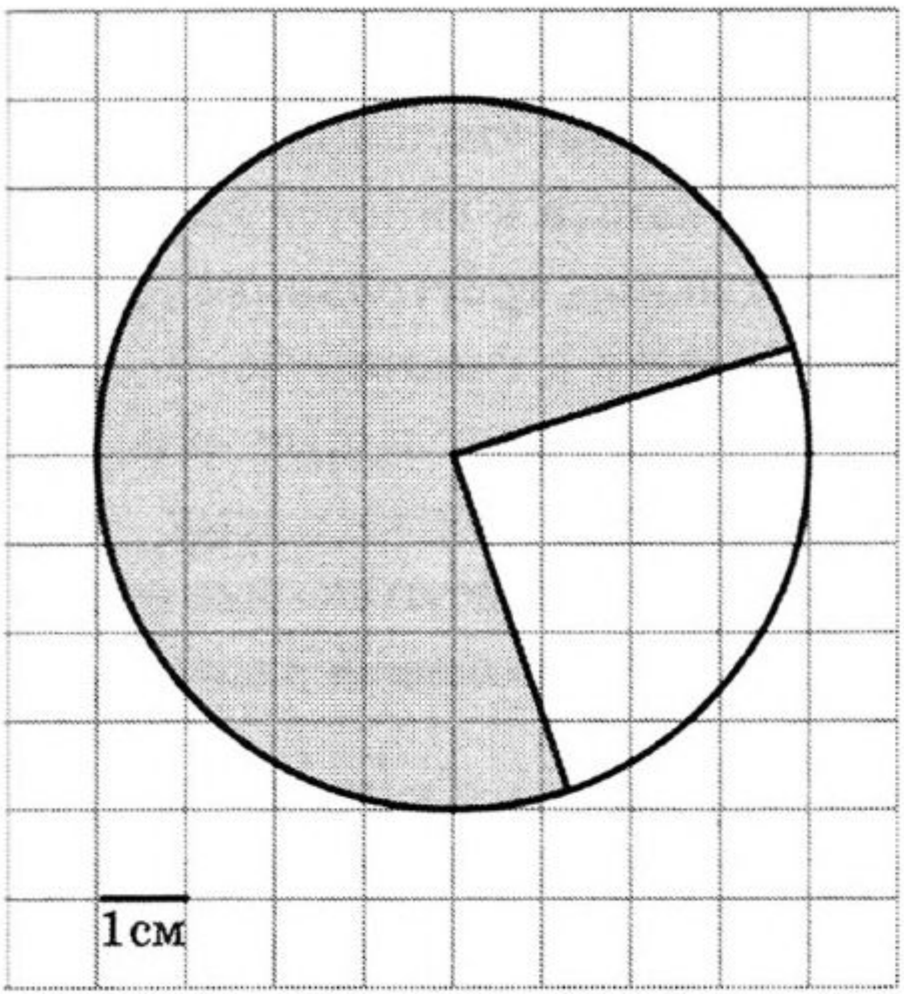
4. Найдите площадь четырехугольника, изображенного на клетчатой бумаге с размером клетки 1 см на 1 см (см. рисунок). Ответ дайте в квадратных сантиметрах



Разбейте фигуру на два равных по площади треугольника.

Ответ: 2.

5. Найдите (в см^2) площадь фигуры, изображенной на клетчатой бумаге с размером клетки 1 см на 1 см (см. рисунок). В ответе запишите $\frac{S}{\pi}$.



Закрашены $\frac{3}{4}$ круга. Значит,

$$S = \frac{3}{4}\pi \cdot 4^2 = 12\pi;$$

$$\frac{S}{\pi} = 12.$$

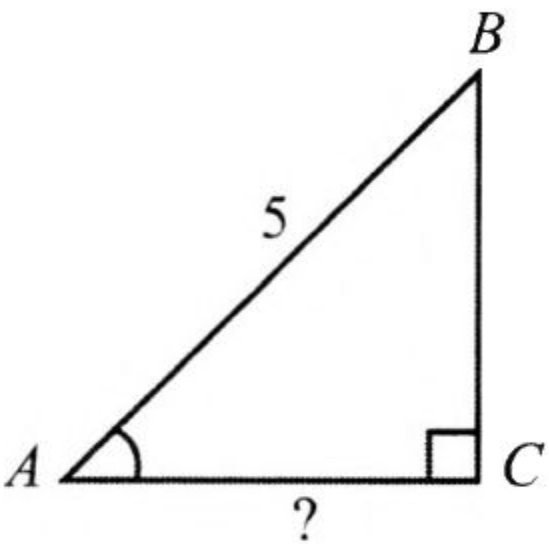
Ответ: 12.

Основы тригонометрии

φ	$0°$	$30°$	$45°$	$60°$	$90°$
$\sin\varphi$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos\varphi$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\mathrm{tg}\,\varphi$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	—
$\mathrm{ctg}\,\varphi$	—	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0

$\mathrm{ctg}\,\alpha = \frac{b}{a}.$ $\qquad$ $\mathrm{tg}\,\alpha = \mathrm{ctg}\,\beta.$

7. В треугольнике ABC угол C равен $90°$, $AB = 5$, $\sin\angle A = \frac{7}{25}$. Найдите AC.



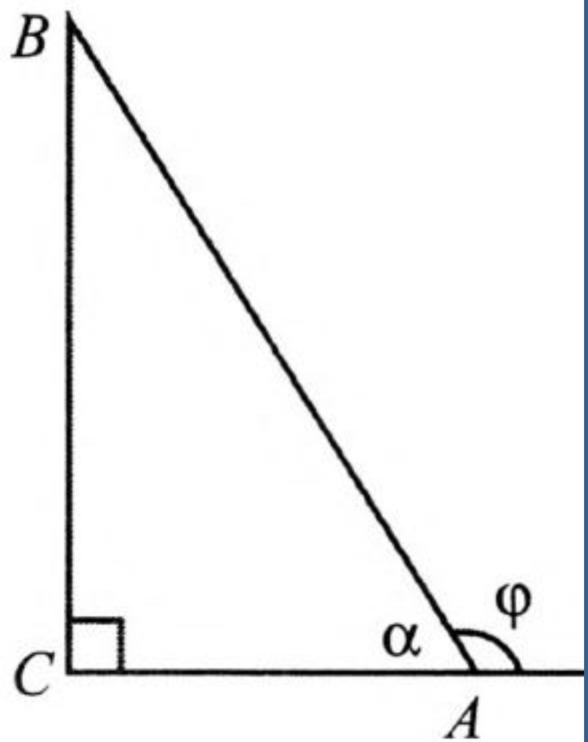
8. В треугольнике ABC угол C равен $90°$, угол A равен $60°$, $BC = 2\sqrt{3}$. Найдите AB.

Обратите внимание, что

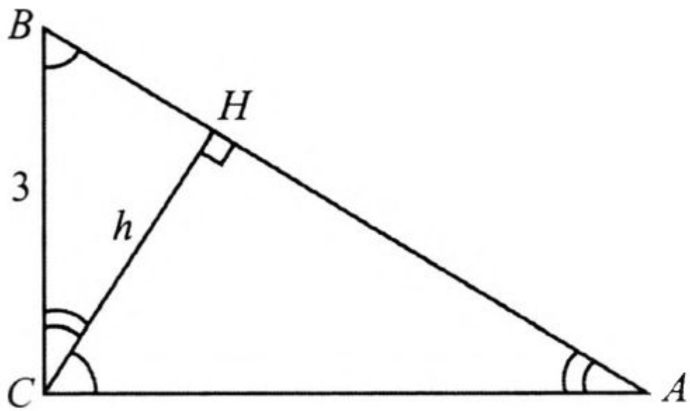
$$\sin(180° - \alpha) = \sin\alpha,$$
$$\cos(180° - \alpha) = -\cos\alpha,$$
$$\operatorname{tg}(180° - \alpha) = -\operatorname{tg}\alpha$$

Внешний угол треугольника равен сумме двух внутренних углов, не смежных с ним.

9. В треугольнике ABC угол C равен 90°, $\cos\angle A = \frac{4}{\sqrt{17}}$. Найдите тангенс внешнего угла при вершине A.

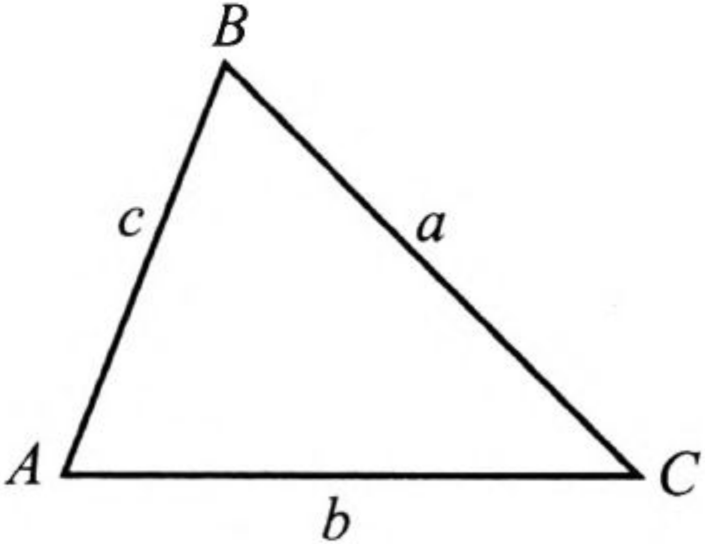


10. В треугольнике ABC угол C равен $90°$, CH — высота, $BC = 3$, $\cos\angle A = \frac{\sqrt{35}}{6}$. Найдите AH.



Формулы геометрии и свойства фигур

Для любого треугольника выполняются теорема синусов и теорема косинусов.



Теорема синусов:

$$\frac{a}{\sin \angle A} = \frac{b}{\sin \angle B} = \frac{c}{\sin \angle C} = 2R,$$

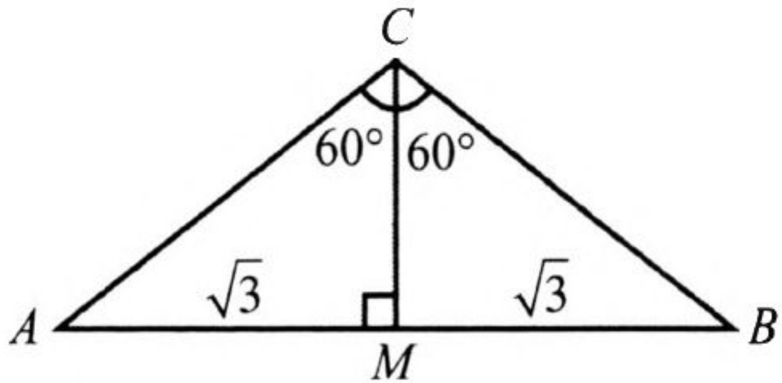
где R — радиус описанной окружности.

Теорема косинусов:

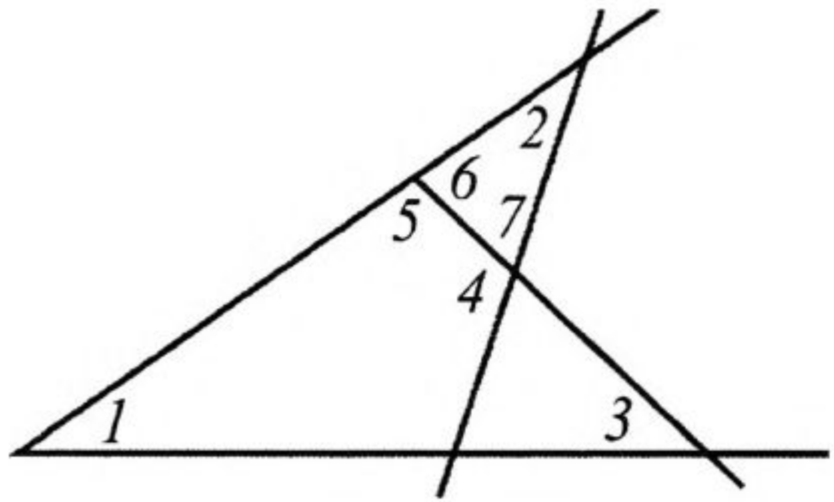
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2a \cdot b \cdot \cos \angle C.$$

1. Один из внешних углов треугольника равен 85°. Углы, не смежные с данным внешним углом, относятся как 2:3. Найдите наибольший из них. Ответ дайте в градусах.

3. В треугольнике ABC $AC = BC$, угол C равен $120°$, $AB = 2\sqrt{3}$. Найдите AC.



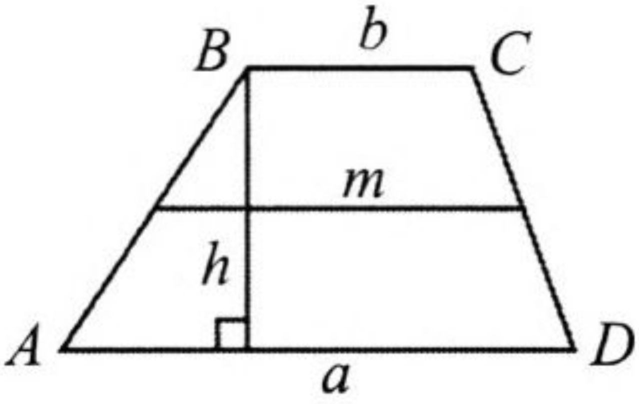
Давайте отметим на чертеже еще несколько углов. Они нам понадобятся.



Сначала найдем угол *5*. Он равен $180° - \angle 1 - \angle 3 = 90°$.
Тогда $\angle 6 = 90°$, $\angle 7 = 180° - \angle 2 - \angle 6 = 60°$.
Угол *4*, смежный с углом *7*, равен $120°$.
Ответ: 120.

5. Углы треугольника относятся как 2:3:4. Найдите меньший из них. Ответ дайте в градусах.

Четырехугольники



$$m = \frac{1}{2}(a+b)$$

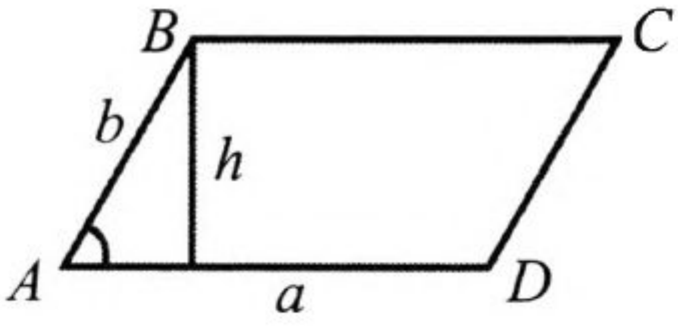
Трапеция — четырехугольник, имеющий одну пару параллельных сторон.

Эти стороны называются **основаниями** трапеции, две другие — **боковые стороны**.

Средняя линия трапеции — отрезок, соединяющий середины боковых сторон.

Средняя линия параллельна основаниям трапеции и равна их полусумме.

Площадь трапеции: $S = \frac{1}{2}(a+b)h.$



$AB = CD$, $BC = DA$,

$\angle A = \angle C$,

$\angle A + \angle D = 180°$.

Параллелограмм — четырехугольник, имеющий две пары параллельных сторон.

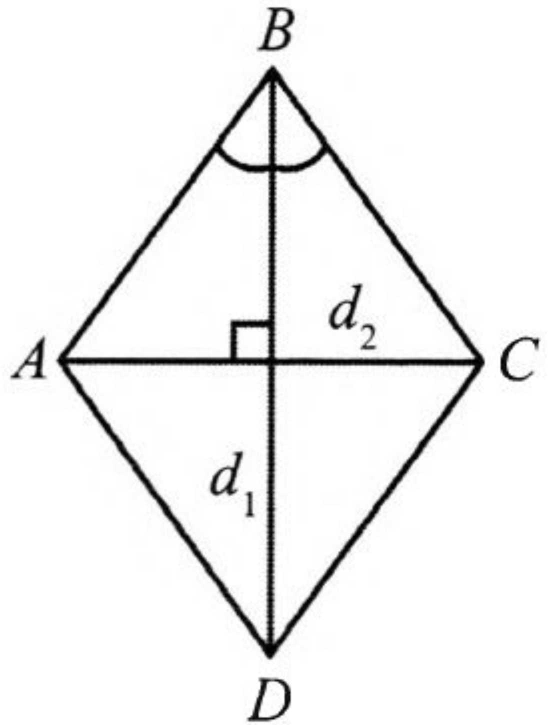
Противоположные углы параллелограмма равны.

Сумма углов, прилежащих к одной стороне параллелограмма, равна 180°.

Диагонали параллелограмма в точке пересечения делятся пополам.

Площадь параллелограмма:

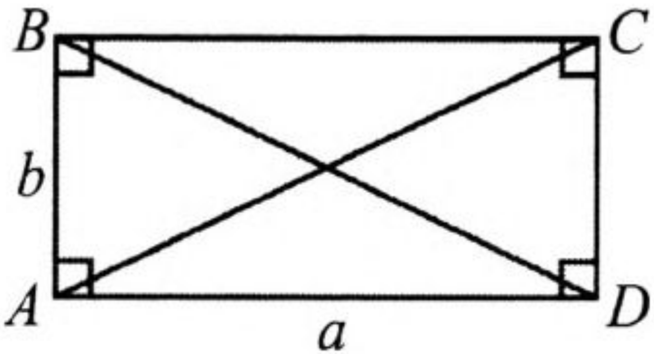
$$S = ab\sin\angle A = ah.$$



Ромб — это параллелограмм, у которого все стороны равны.

Диагонали ромба перпендикулярны и являются биссектрисами углов ромба.

Площадь ромба: $S = \frac{1}{2} d_1 d_2$.

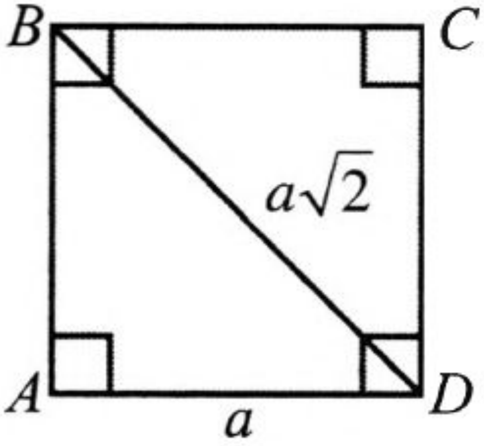


$AC = BD$

Прямоугольник — это параллелограмм, у которого все углы прямые.

Диагонали прямоугольника равны.

Площадь прямоугольника: $S = ab$.



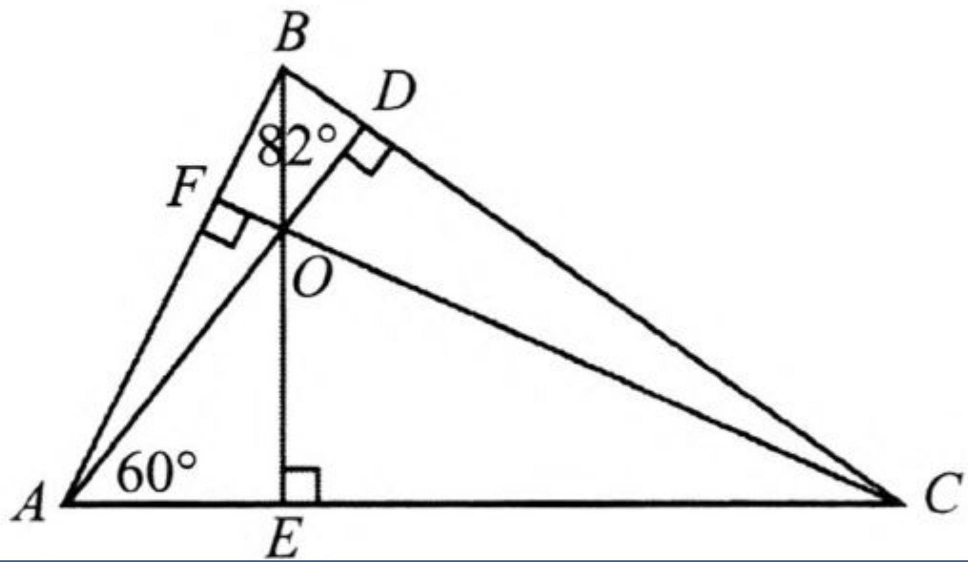
Квадрат — это прямоугольник, у которого все стороны равны.

Другими словами, это ромб с прямыми углами.

Площадь квадрата: $S = a^2$.

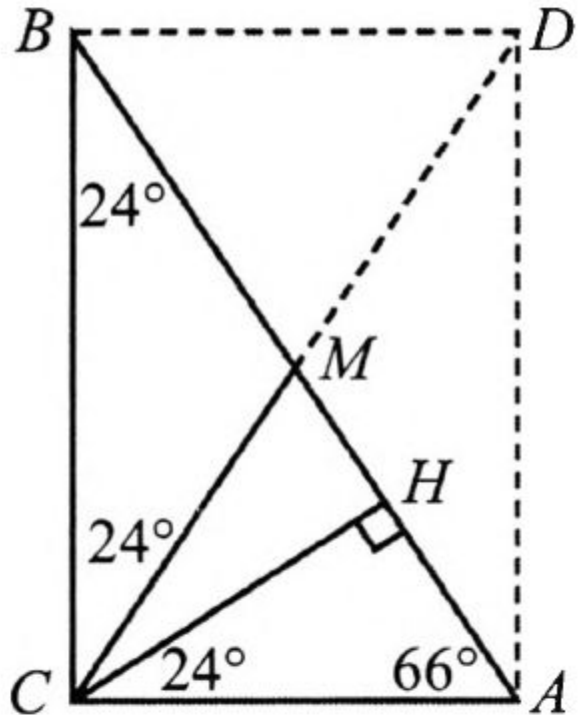
Сумма углов выпуклого четырехугольника равна 360°.

11. В треугольнике ABC угол A равен 60°, угол B равен 82°. AD, BE и CF — высоты, пересекающиеся в точке O. Найдите угол AOF. Ответ дайте в градусах.

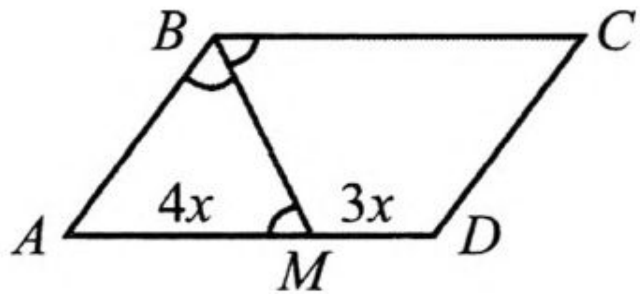


В прямоугольном треугольнике медиана, проведенная к гипотенузе, равна половине гипотенузы.

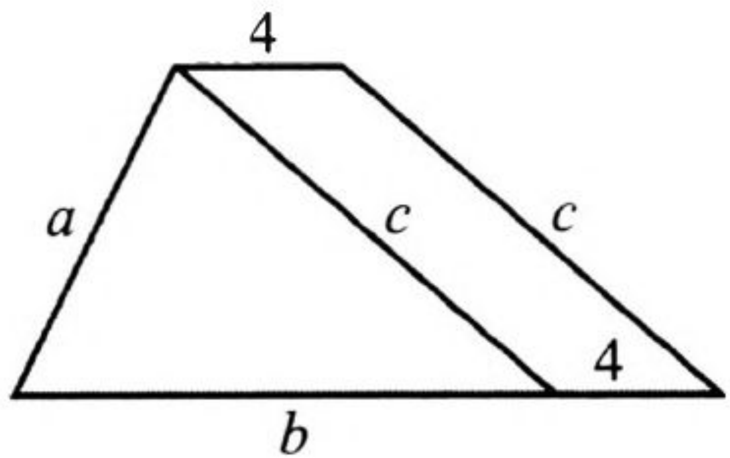
12. Острые углы прямоугольного треугольника равны 24° и 66°. Найдите угол между высотой и медианой, проведенными из вершины прямого угла. Ответ дайте в градусах.



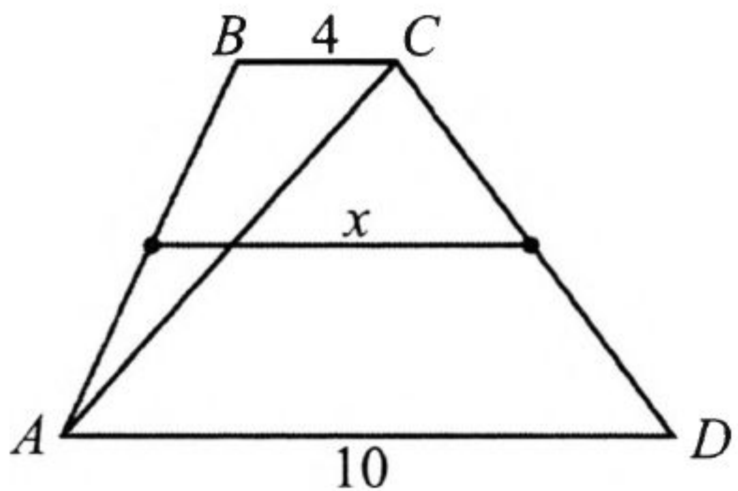
13. Биссектриса тупого угла параллелограмма делит противоположную сторону в отношении 3:4, считая от вершины тупого угла. Найдите большую сторону параллелограмма, если его периметр равен 88.



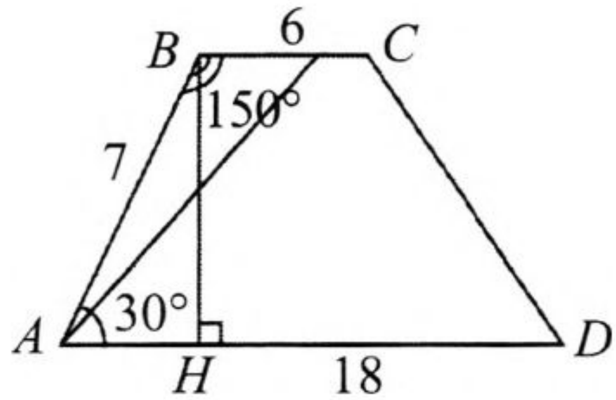
14. Прямая, проведенная параллельно боковой стороне трапеции через конец меньшего основания, равного 4, отсекает треугольник, периметр которого равен 15. Найдите периметр трапеции.



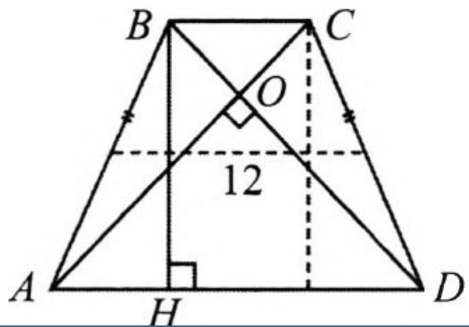
17. Основания трапеции равны 4 и 10. Найдите больший из отрезков, на которые делит среднюю линию этой трапеции одна из ее диагоналей.



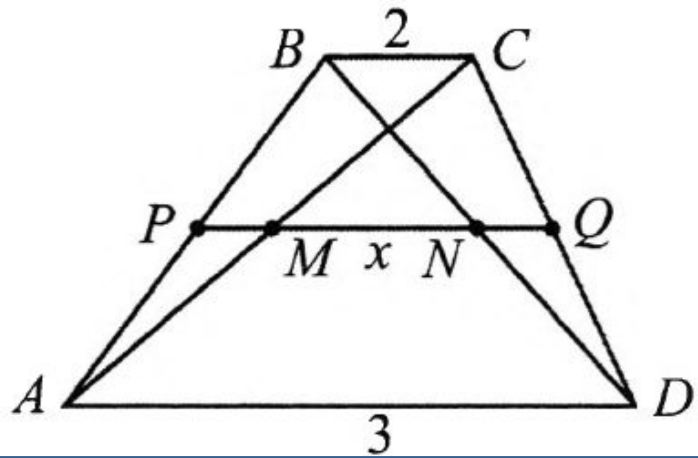
18. Основания трапеции равны 18 и 6, боковая сторона, равная 7, образует с одним из оснований трапеции угол 150°. Найдите площадь трапеции.



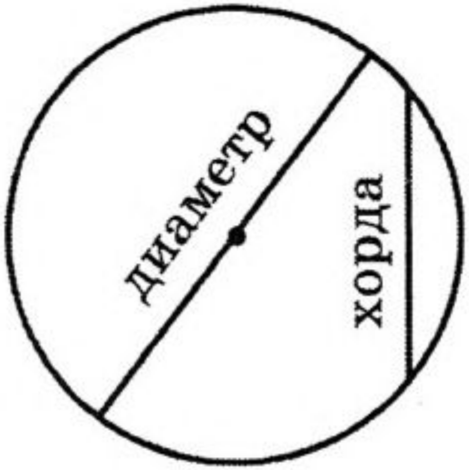
20. В равнобедренной трапеции диагонали перпендикулярны. Высота трапеции равна 12. Найдите ее среднюю линию.



22. Основания трапеции равны 3 и 2. Найдите отрезок, соединяющий середины диагоналей трапеции.

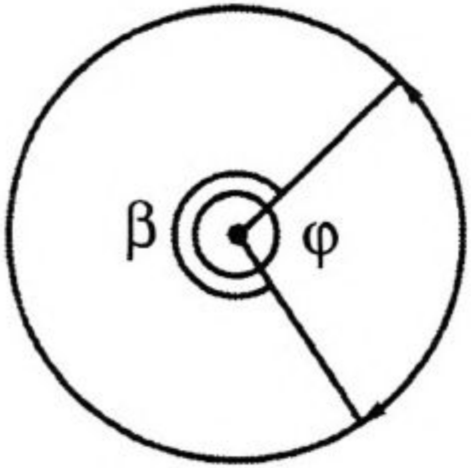



ОКРУЖНОСТЬ

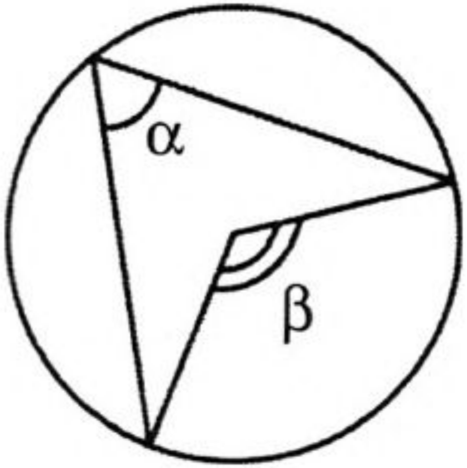


Отрезок, соединяющий две точки на окружности, называется **хорда**.

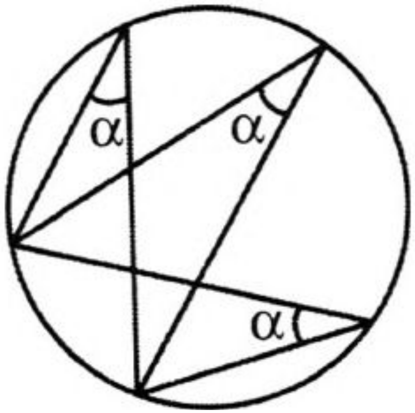
Самая большая хорда проходит через центр окружности и называется **диаметр**.



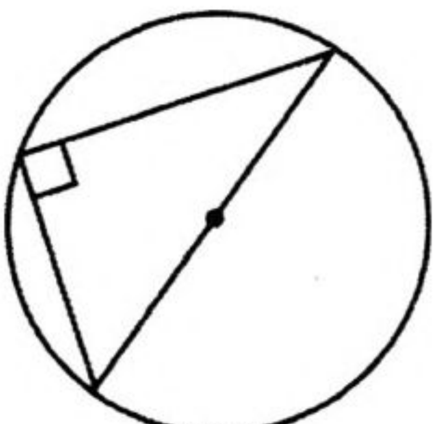
Угол, вершина которого лежит в центре окружности, называется **центральным**. Величина центрального угла равна угловой величине дуги, на которую он опирается. Угол β тоже называется центральным. Только он опирается на дугу, которая больше 180°.



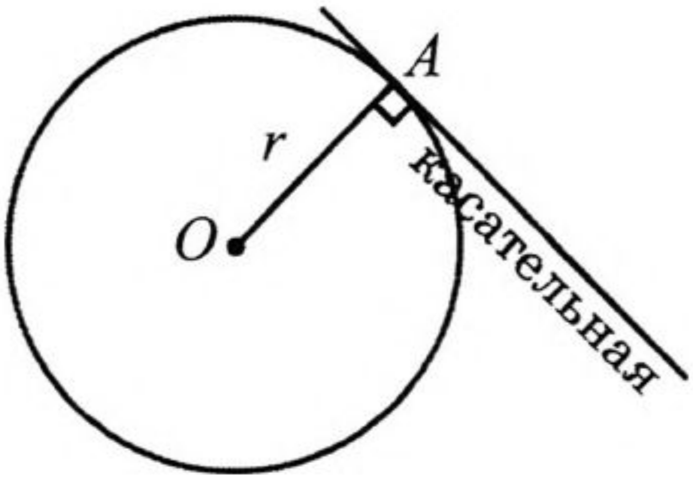
Угол, вершина которого лежит на окружности, а стороны пересекают окружность, называется **вписанным**. Величина вписанного угла равна половине центрального угла, опирающегося на ту же дугу, $\alpha = \frac{\beta}{2}$.



Вписанные углы, опирающиеся на одну и ту же дугу, равны.

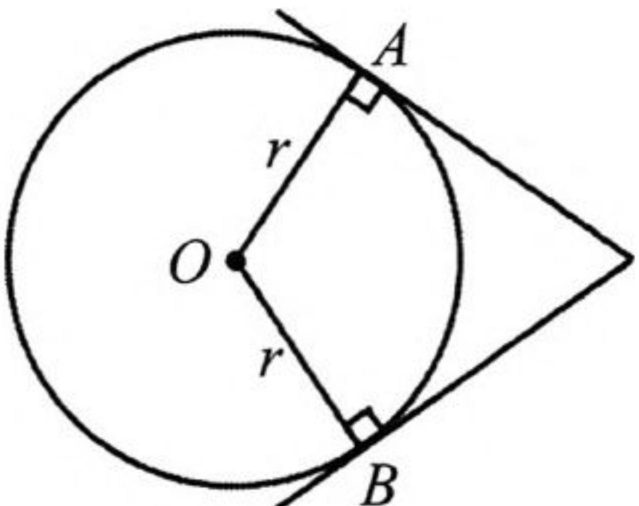


Вписанный угол, опирающийся на диаметр, — прямой.

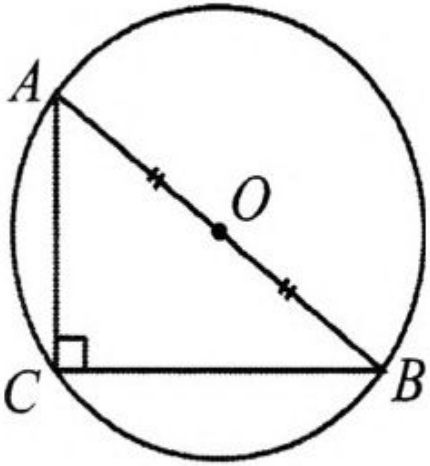


Прямая, имеющая с окружностью только одну общую точку, называется **касательной**.

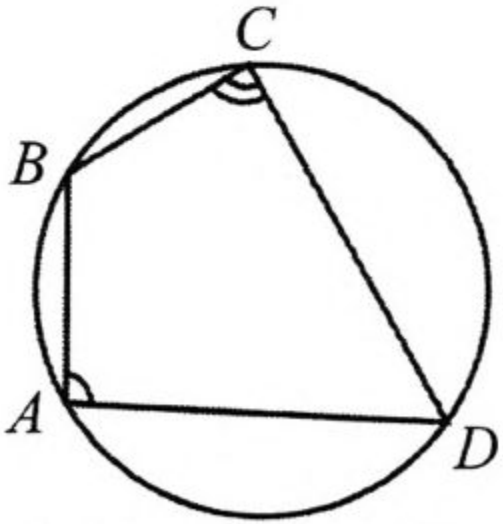
Касательная к окружности перпендикулярна радиусу, проведенному в точку касания.



Отрезки касательных, проведенных из одной точки, равны.

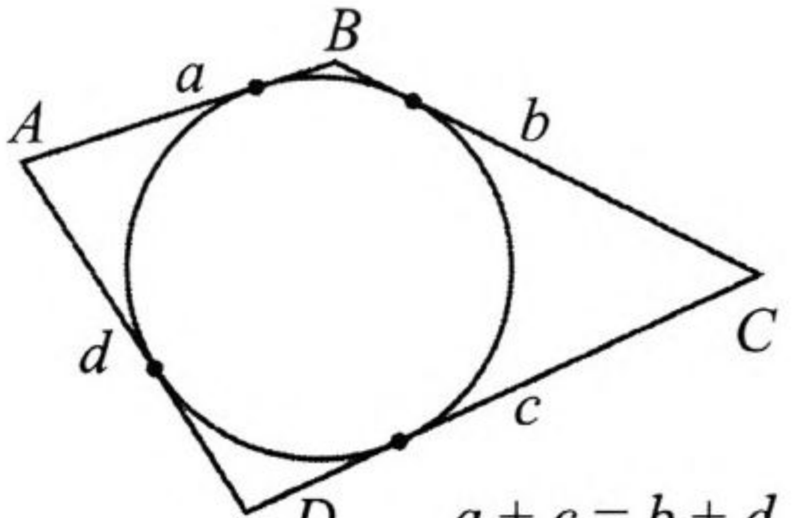


У прямоугольного треугольника центр описанной окружности лежит на середине гипотенузы.



$\angle A + \angle C = 180°$

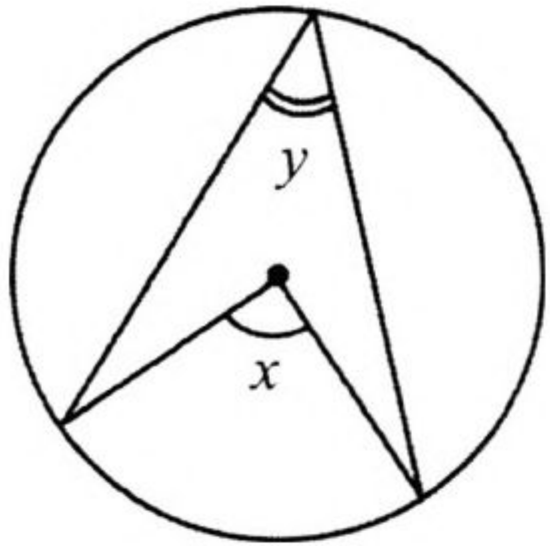
Четырехугольник можно **вписать** в окружность тогда и только тогда, когда суммы его противоположных углов равны 180°.



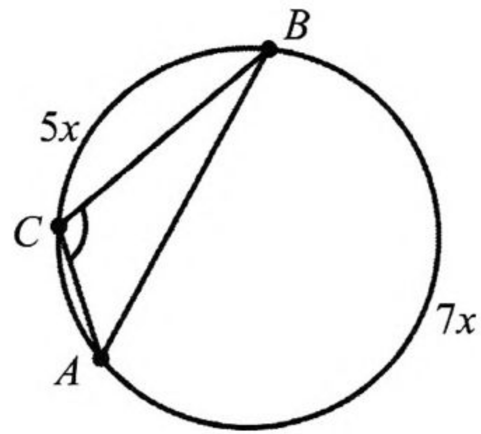
$a + c = b + d.$

Четырехугольник можно **описать** вокруг окружности тогда и только тогда, когда суммы длин его противоположных сторон равны.

2. Центральный угол на 36° больше острого вписанного угла, опирающегося на ту же дугу окружности. Найдите вписанный угол. Ответ дайте в градусах.



4. Хорда AB делит окружность на две части, градусные величины которых относятся как 5:7. Под каким углом видна эта хорда из точки C, принадлежащей меньшей дуге окружности? Ответ дайте в градусах.



Очевидно, что нужно найти угол ACB.

Сумма двух дуг, на которые хорда AB делит окружность, равна 360°, то есть $5x + 7x = 360°$.

Отсюда $x = 30°$, и тогда вписанный угол ACB опирается на дугу, равную 210°.

Величина вписанного угла равна половине угловой величины дуги, на которую он опирается, значит, угол ACB равен 105°.

Ответ: 105.

5. Четырехугольник *ABCD* вписан в окружность. Угол *ABC* равен 110°, угол *ABD* равен 70°. Найдите угол *CAD*. Ответ дайте в градусах.