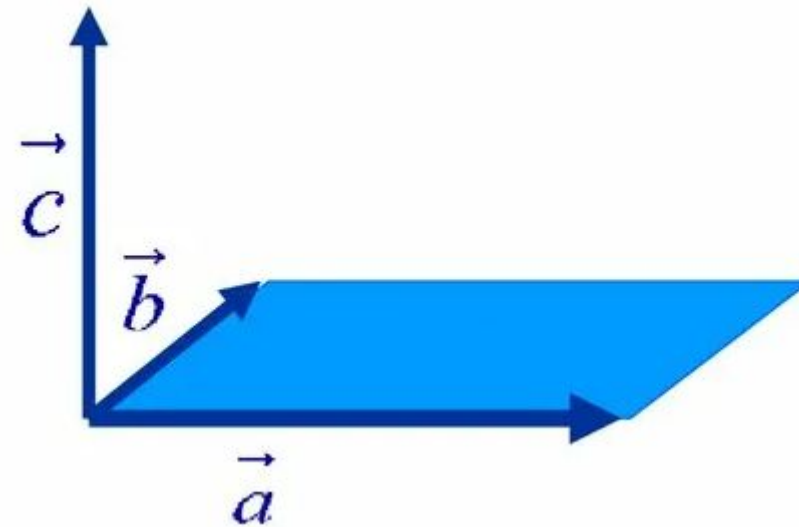


Математика

Лекция 3

Векторы. Уравнения плоскости в пространстве

- Векторы, их линейная независимость
- Базис пространства
- Скалярное, векторное и смешанное произведение векторов
- Уравнения плоскости в \mathbb{R}^3



Векторная алгебра

1 Понятие вектора в двумерном пространстве

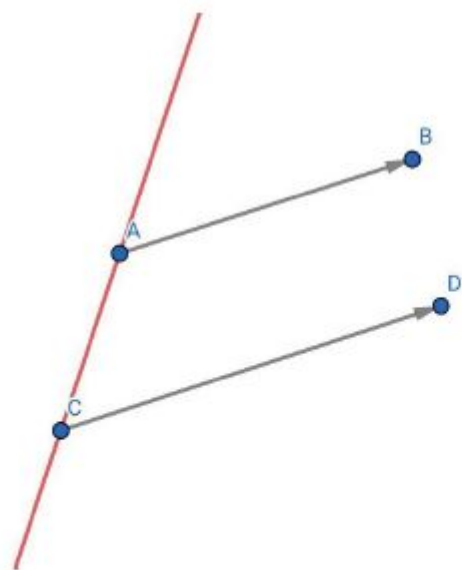
Опр 1. Направленным отрезком называется упорядоченная пара точек - $[AB]$.

Опр 2. $[AB]$ и $[CD]$ коллинеарны (параллельны), если прямые AB и CD параллельны или совпадают.

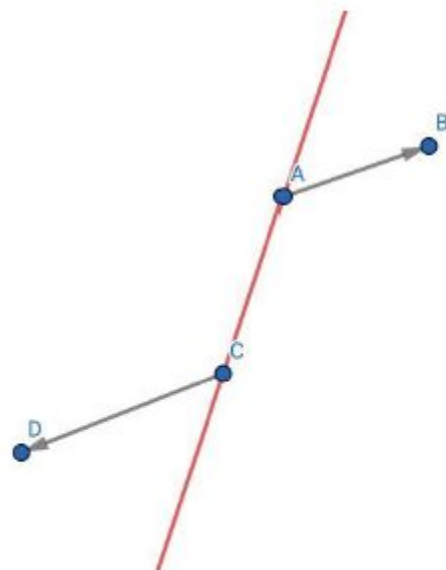
Опр 3. Длиной направленного отрезка AB называется длина соответствующего отрезка AB .

Опр 4. Если $[AB]$ и $[CD]$ коллинеарны и не лежат на одной прямой, то $[AB]$ и $[CD]$ сонаправлены, если B и D лежат по одну сторону от прямой AC (а) и противоположно направлены, если B и D лежат по разные стороны от прямой AC (б).

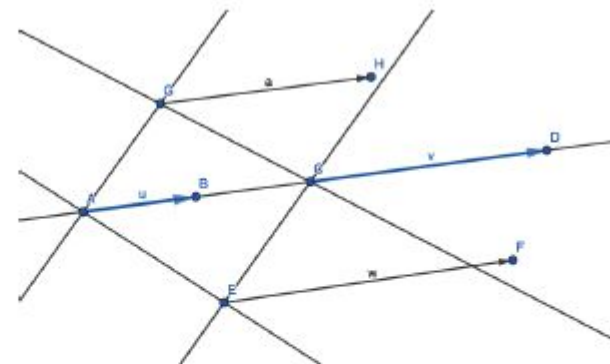
Если $[AB]$ и $[CD]$ коллинеарны и лежат на одной прямой, то $[AB]$ и $[CD]$ сонаправлены, если они сонаправлены с направленным отрезком, не лежащим на прямой AB (с).



(a)



(b)



(c)

Опр 5. $[AB] \sim [CD]$ если они

1. Сонаправлены
2. Коллинеарны
3. Равной длины

Опр 6. Вектор – класс эквивалентности относительно Опр 5. эквивалентности

Особый случай. Класс эквивалентности $[AA]$ называется нулевым вектором

1. $[AA]$ коллинеарен любому направленному отрезку
2. Сонаправленность у $[AA]$ не определена
3. $[AA] \sim [BB] \forall A, B \in \mathbb{R}^2$

Обозначение векторов: $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ - класс эквивалентности AB .

Опр 7. Два вектора коллинеарны, если их предствaitели коллинеарны. ($\vec{0}$ коллинеарен любому вектору)

Опр 8. Векторы называются **компланарными**, если существует плоскость, которой они параллельны.

Опр 9. **Длиной (модулем)** вектора называется расстояние между началом и концом вектора.

Определение. **Линейными операциями** над векторами называется сложение и умножение на число.

Суммой векторов является вектор - $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$

Произведение - $\vec{b} = \alpha \vec{a}$; $|\vec{b}| = \alpha |\vec{a}|$, при этом \vec{a} коллинеарен \vec{b} .

Вектор \vec{a} сонаправлен с вектором \vec{b} ($\vec{a} \uparrow \uparrow \vec{b}$), если $\alpha > 0$.

Вектор \vec{a} противоположно направлен с вектором \vec{b} ($\vec{a} \uparrow \downarrow \vec{b}$), если $\alpha < 0$.

Свойства сложения и умножения

1. $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$ – коммутативность сложения
2. $\vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) = (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c}$ – ассоциативность сложения
3. $\vec{a} + \vec{0} = \vec{a}$ – нейтральный элемент по сложению
4. $\vec{a} + (-1) \times \vec{a} = \vec{0}$ – существования обратного элемента по сложению
5. $(\alpha\beta)\vec{a} = \alpha(\beta\vec{a}), \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ – ассоциативность умножения
6. $(\alpha + \beta)\vec{a} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{a}, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ – дистрибутивность умножения относительно сложения
7. $(\vec{a} + \vec{b})\alpha = \alpha\vec{a} + \alpha\vec{b}, \forall \alpha \in \mathbb{R}$ – дистрибутивность сложения относительно умножения
8. $1 \times \vec{a} = \vec{a}$ – нейтральный элемент по умножению

Определение.

1) **Базисом** в пространстве \mathbb{R}^3 называются любые 3 некопланарных вектора, взятые в определенном порядке.

2) **Базисом** на плоскости называются любые 2 неколлинеарные векторы, взятые в определенном порядке.

3) **Базисом** на прямой называется любой ненулевой вектор.

Определение. Если $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ - базис в пространстве и $\vec{a} = \alpha \vec{e}_1 + \beta \vec{e}_2 + \gamma \vec{e}_3$, то числа α, β и γ - называются **компонентами** или **координатами** вектора \vec{a} в этом базисе.

- при умножении вектора на число его компоненты тоже умножаются на это число,

$$\lambda \vec{a} = \lambda(\alpha \vec{e}_1 + \beta \vec{e}_2 + \gamma \vec{e}_3) = (\lambda\alpha) \vec{e}_1 + (\lambda\beta) \vec{e}_2 + (\lambda\gamma) \vec{e}_3.$$

- при сложении векторов складываются их соответствующие компоненты.

$$\vec{a} = \alpha_1 \vec{e}_1 + \alpha_2 \vec{e}_2 + \alpha_3 \vec{e}_3; \quad \vec{b} = \beta_1 \vec{e}_1 + \beta_2 \vec{e}_2 + \beta_3 \vec{e}_3;$$

$$\vec{a} + \vec{b} = (\alpha_1 + \beta_1) \vec{e}_1 + (\alpha_2 + \beta_2) \vec{e}_2 + (\alpha_3 + \beta_3) \vec{e}_3.$$

Линейная зависимость векторов.

Определение. Векторы $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n$ называются **линейно зависимыми**, если существует такая линейная комбинация $\alpha_1 \vec{a}_1 + \alpha_2 \vec{a}_2 + \dots + \alpha_n \vec{a}_n = 0$, при не равных нулю одновременно α_i , т.е. $\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \dots + \alpha_n^2 \neq 0$.

Если же только при $\alpha_i = 0$ выполняется $\alpha_1 \vec{a}_1 + \alpha_2 \vec{a}_2 + \dots + \alpha_n \vec{a}_n = 0$, то векторы называются **линейно независимыми**.

Свойство 1. Если среди векторов \vec{a}_i есть нулевой вектор, то эти векторы линейно зависимы.

Свойство 2. Если к системе линейно зависимых векторов добавить один или несколько векторов, то полученная система тоже будет линейно зависима.

Свойство 3. Система векторов линейно зависима тогда и только тогда, когда один из векторов раскладывается в линейную комбинацию остальных векторов.

Свойство 4. Любые 2 коллинеарных вектора линейно зависимы и, наоборот, любые 2 линейно зависимые векторы коллинеарны.

Свойство 5. Любые 3 компланарных вектора линейно зависимы и, наоборот, любые 3 линейно зависимые векторы компланарны.

Свойство 6. Любые 4 вектора линейно зависимы.

Декартова система координат.

Зафиксируем в пространстве точку O и рассмотрим произвольную точку M .

Вектор \overrightarrow{OM} назовем радиус- вектором точки M . Если в пространстве задать некоторый базис, то точке M можно сопоставить некоторую тройку чисел – компоненты ее радиус- вектора.

Определение. Декартовой системой координат в пространстве называется совокупность точки и базиса. Точка называется **началом координат**. Прямые, проходящие через начало координат называются **осями координат**.

1-я ось – ось **абсцисс**

2-я ось – ось **ординат**

3-я ось – ось **апplikат**

Чтобы найти компоненты вектора нужно из координат его конца вычесть координаты начала.

Если заданы точки $A(x_1, y_1, z_1)$, $B(x_2, y_2, z_2)$, то $\overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$.

Определение. Базис называется **ортонормированным**, если его векторы попарно ортогональны и равны единице.

Определение. Декартова система координат, базис которой ортонормирован называется **декартовой прямоугольной системой координат**.

Пример. Даны векторы \vec{a} (1; 2; 3), \vec{b} (-1; 0; 3), \vec{c} (2; 1; -1) и \vec{d} (3; 2; 2) в некотором базисе. Показать, что векторы \vec{a} , \vec{b} и \vec{c} образуют базис и найти координаты вектора \vec{d} в этом базисе.

Векторы образуют базис, если они линейно независимы, другими словами, если уравнения, входящие в систему:

$$\begin{cases} \alpha - \beta + 2\gamma = 0 \\ 2\alpha + 0 \cdot \beta + \gamma = 0 \\ 3\alpha + 3\beta - \gamma = 0 \end{cases} \quad \text{линейно независимы.}$$

Тогда $\vec{d} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \gamma\vec{c}$.

Это условие выполняется, если определитель матрицы системы отличен от нуля.

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & 3 & -1 \end{vmatrix} \neq 0$$

$$\begin{cases} \alpha a_1 + \beta b_1 + \gamma c_1 = d_1 \\ \alpha a_2 + \beta b_2 + \gamma c_2 = d_2 \\ \alpha a_3 + \beta b_3 + \gamma c_3 = d_3 \end{cases} \quad \text{Для решения этой системы воспользуемся методом Крамера.}$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \end{vmatrix} = 3 \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 3(-3) + (-2 - 2) + 12 = -1.$$

$$\alpha = \frac{\Delta_1}{\Delta} = -1/4;$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & d_1 & c_1 \\ a_2 & d_2 & c_2 \\ a_3 & d_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & -1 \end{vmatrix} = (-2 - 2) - 3(-2 - 3) + 2(4 - 6) = -4 + 15 - 4 = 7;$$

$$\beta = \frac{\Delta_2}{\Delta} = 7/4;$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & 0 & 2 \\ 3 & 3 & 2 \end{vmatrix} = -6 + (4 - 6) + 18 = 10;$$

$$\gamma = \frac{\Delta_3}{\Delta} = 5/2;$$

Итого, координаты вектора \vec{d} в базисе \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} : $\vec{d} \{ -1/4, 7/4, 5/2 \}$.

Длина вектора в координатах определяется как расстояние между точками начала и конца вектора. Если заданы две точки в пространстве $A(x_1, y_1, z_1)$, $B(x_2, y_2, z_2)$, то $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$.

Если точка $M(x, y, z)$ делит отрезок AB в соотношении λ/μ , считая от A , то координаты этой точки определяются как:

$$x = \frac{\mu x_1 + \lambda x_2}{\mu + \lambda}; \quad y = \frac{\mu y_1 + \lambda y_2}{\mu + \lambda}; \quad z = \frac{\mu z_1 + \lambda z_2}{\mu + \lambda}.$$

В частном случае координаты **середины отрезка** находятся как:

$$x = (x_1 + x_2)/2; \quad y = (y_1 + y_2)/2; \quad z = (z_1 + z_2)/2.$$

Линейные операции над векторами в координатах.

Пусть заданы векторы в прямоугольной системе координат $\vec{a}(x_A, y_A, z_A)$; $\vec{b}(x_B, y_B, z_B)$, тогда линейные операции над ними в координатах имеют вид:

$$\vec{a} + \vec{b} = \vec{c}(x_A + x_B; y_A + y_B; z_A + z_B); \quad \alpha \cdot \vec{a} = (\alpha x_A; \alpha y_A; \alpha z_A)$$

Скалярное произведение векторов.

Определение. Скалярным произведением векторов \vec{a} и \vec{b} называется число, равное произведению длин этих сторон на косинус угла между ними.

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \varphi$$

Свойства скалярного произведения:

- 1) $\vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}|^2$;
- 2) $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$, если $\vec{a} \perp \vec{b}$ или $\vec{a} = 0$ или $\vec{b} = 0$.
- 3) $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$;
- 4) $\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}$;
- 5) $(m\vec{a}) \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot (m\vec{b}) = m(\vec{a} \cdot \vec{b})$; $m = \text{const}$

Если рассматривать векторы $\vec{a}(x_a, y_a, z_a)$; $\vec{b}(x_b, y_b, z_b)$ в декартовой прямоугольной системе координат, то

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = x_a x_b + y_a y_b + z_a z_b;$$

Используя полученные равенства, получаем формулу для вычисления угла между векторами:

$$\cos \varphi = \frac{x_a x_b + y_a y_b + z_a z_b}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|};$$

Пример. Найти $(5\vec{a} + 3\vec{b})(2\vec{a} - \vec{b})$, если $|\vec{a}| = 2$, $|\vec{b}| = 3$, $\vec{a} \perp \vec{b}$.

$$10\vec{a} \cdot \vec{a} - 5\vec{a} \cdot \vec{b} + 6\vec{a} \cdot \vec{b} - 3\vec{b} \cdot \vec{b} = 10|\vec{a}|^2 - 3|\vec{b}|^2 = 40 - 27 = 13,$$

$$\text{т.к. } \vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}|^2 = 4, \quad \vec{b} \cdot \vec{b} = |\vec{b}|^2 = 9, \quad \vec{a} \cdot \vec{b} = 0.$$

Пример. Найти угол между векторами \vec{a} и \vec{b} , если $\vec{a} = \vec{i} + 2\vec{j} + 3\vec{k}$,
 $\vec{b} = 6\vec{i} + 4\vec{j} - 2\vec{k}$.

$$\text{т.е. } \vec{a} = (1, 2, 3), \quad \vec{b} = (6, 4, -2)$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 6 + 8 - 6 = 8:$$

$$|\vec{a}| = \sqrt{1 + 4 + 9} = \sqrt{14}; \quad |\vec{b}| = \sqrt{36 + 16 + 4} = \sqrt{56}.$$

$$\cos \varphi = \frac{8}{\sqrt{14}\sqrt{56}} = \frac{8}{2\sqrt{14}\sqrt{14}} = \frac{4}{14} = \frac{2}{7}; \quad \varphi = \arccos \frac{2}{7}.$$

Пример. Найти скалярное произведение $(3\vec{a} - 2\vec{b}) \cdot (5\vec{a} - 6\vec{b})$, если $|\vec{a}| = 4$, $|\vec{b}| = 6$, $\vec{a} \wedge \vec{b} = \pi/3$.

$$15\vec{a} \cdot \vec{a} - 18\vec{a} \cdot \vec{b} - 10\vec{a} \cdot \vec{b} + 12\vec{b} \cdot \vec{b} = 15|\vec{a}|^2 - 28|\vec{a}||\vec{b}|\cos\frac{\pi}{3} + 12|\vec{b}|^2 = 15 \cdot 16 - 28 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \frac{1}{2} + 12 \cdot 36 = 240 - 336 + 432 = 672 - 336 = 336.$$

Пример. Найти угол между векторами \vec{a} и \vec{b} , если $\vec{a} = 3\vec{i} + 4\vec{j} + 5\vec{k}$, $\vec{b} = 4\vec{i} + 5\vec{j} - 3\vec{k}$.

Т.е. $\vec{a} = (3, 4, 5)$, $\vec{b} = (4, 5, -3)$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 12 + 20 - 15 = 17 :$$

$$|\vec{a}| = \sqrt{9 + 16 + 25} = \sqrt{50}; \quad |\vec{b}| = \sqrt{16 + 25 + 9} = \sqrt{50}.$$

$$\cos\varphi = \frac{17}{\sqrt{50}\sqrt{50}} = \frac{17}{50}; \quad \varphi = \arccos\frac{17}{50}.$$

Векторное произведение векторов.

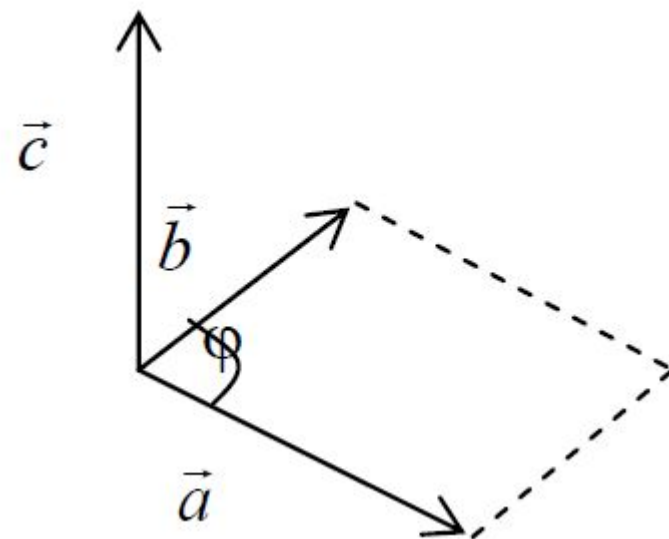
Определение. Векторным произведением векторов \vec{a} и \vec{b} называется вектор \vec{c} , удовлетворяющий следующим условиям:

1) $|\vec{c}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \sin \varphi$, где φ - угол между векторами \vec{a} и \vec{b} ,
 $\sin \varphi \geq 0; \quad 0 \leq \varphi \leq \pi$

2) вектор \vec{c} ортогонален векторам \vec{a} и \vec{b}

3) \vec{a} , \vec{b} и \vec{c} образуют правую тройку векторов.

Обозначается: $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$ или $\vec{c} = [\vec{a}, \vec{b}]$.



Геометрическим смыслом векторного произведения векторов является площадь параллелограмма, построенного на векторах \vec{a} и \vec{b} .

Свойства векторного произведения векторов:

1) $\vec{b} \times \vec{a} = -\vec{a} \times \vec{b}$;

2) $\vec{a} \times \vec{b} = 0$, если $\vec{a} \parallel \vec{b}$ или $\vec{a} = 0$ или $\vec{b} = 0$;

3) $(m\vec{a}) \times \vec{b} = \vec{a} \times (m\vec{b}) = m(\vec{a} \times \vec{b})$;

4) $\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}$;

5) Если заданы векторы $\vec{a} (x_a, y_a, z_a)$ и $\vec{b} (x_b, y_b, z_b)$ в декартовой прямоугольной системе координат с единичными векторами $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$, то

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_a & y_a & z_a \\ x_b & y_b & z_b \end{vmatrix}$$

Пример. Найти векторное произведение векторов $\vec{a} = 2\vec{i} + 5\vec{j} + \vec{k}$ и $\vec{b} = \vec{i} + 2\vec{j} - 3\vec{k}$.

$$\vec{a} = (2, 5, 1); \quad \vec{b} = (1, 2, -3)$$

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 5 & 1 \\ 1 & 2 & -3 \end{vmatrix} = \vec{i} \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} - \vec{j} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} + \vec{k} \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -17\vec{i} + 7\vec{j} - \vec{k}.$$

Пример. Вычислить площадь треугольника с вершинами $A(2, 2, 2)$, $B(4, 0, 3)$, $C(0, 1, 0)$.

$$\overrightarrow{AC} = (0 - 2; 1 - 2; 0 - 2) = (-2; -1; -2)$$

$$\overrightarrow{AB} = (4 - 2; 0 - 2; 3 - 2) = (2; -2; 1)$$

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AC} \times \overrightarrow{AB} &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -2 & -1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{vmatrix} = \vec{i} \begin{vmatrix} -1 & -2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} - \vec{j} \begin{vmatrix} -2 & -2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + \vec{k} \begin{vmatrix} -2 & -1 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = \vec{i}(-1 - 4) - \vec{j}(-2 + 4) + \\ &+ \vec{k}(4 + 2) = -5\vec{i} - 2\vec{j} + 6\vec{k}. \end{aligned}$$

$$|\overrightarrow{AC} \times \overrightarrow{AB}| = \sqrt{25 + 4 + 36} = \sqrt{65}.$$

$$S_{\Delta} = \frac{\sqrt{65}}{2} \text{ (ед}^2\text{)}.$$

Пример. Доказать, что векторы $\vec{a} = 7\vec{i} - 3\vec{j} + 2\vec{k}$, $\vec{b} = 3\vec{i} - 7\vec{j} + 8\vec{k}$ и $\vec{c} = \vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$

компланарны.

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 3 & -7 & 8 \\ 7 & -3 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & -4 & 5 \\ 0 & 4 & -5 \end{pmatrix}, \quad \text{т.к. векторы линейно зависимы, то они}$$

компланарны.

Пример. Найти площадь параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a} + 3\vec{b}$; $3\vec{a} + \vec{b}$, если $|\vec{a}| = |\vec{b}| = 1$; $\vec{a} \wedge \vec{b} = 30^\circ$.

$$(\vec{a} + 3\vec{b}) \times (3\vec{a} + \vec{b}) = 3\vec{a} \times \vec{a} + \vec{a} \times \vec{b} + 9\vec{b} \times \vec{a} + 3\vec{b} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a} + 9\vec{b} \times \vec{a} = 8\vec{b} \times \vec{a}$$

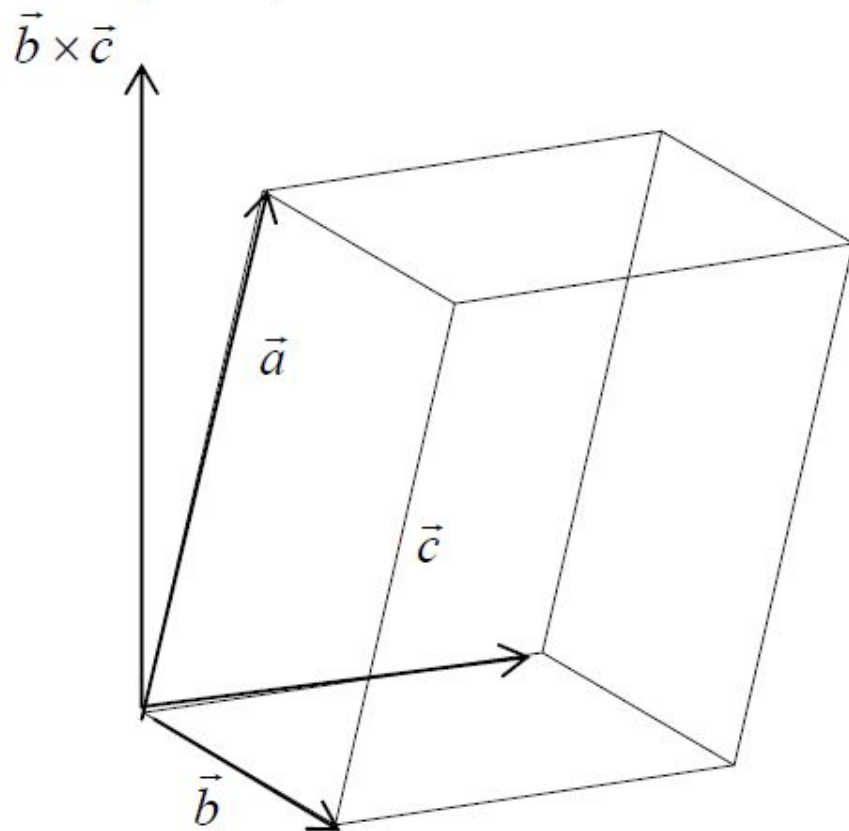
$$S = 8|\vec{b}||\vec{a}| \sin 30^\circ = 4 \text{ (ед}^2\text{)}.$$

Смешанное произведение векторов.

Определение. Смешанным произведением векторов \vec{a} , \vec{b} и \vec{c} называется число, равное скалярному произведению вектора \vec{a} на вектор, равный векторному произведению векторов \vec{b} и \vec{c} .

Обозначается $\vec{a} \cdot \vec{b} \cdot \vec{c}$ или $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$.

Смешанное произведение $\vec{a} \cdot \vec{b} \cdot \vec{c}$ по модулю равно объему параллелепипеда, построенного на векторах \vec{a} , \vec{b} и \vec{c} .



Свойства смешанного произведения:

1) Смешанное произведение равно нулю, если:

- а) хоть один из векторов равен нулю;
- б) два из векторов коллинеарны;
- в) векторы компланарны.

$$2) (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})$$

$$3) (\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = (\vec{b}, \vec{c}, \vec{a}) = (\vec{c}, \vec{a}, \vec{b}) = -(\vec{b}, \vec{a}, \vec{c}) = -(\vec{c}, \vec{b}, \vec{a}) = -(\vec{a}, \vec{c}, \vec{b})$$

$$4) (\lambda \vec{a}_1 + \mu \vec{a}_2, \vec{b}, \vec{c}) = \lambda (\vec{a}_1, \vec{b}, \vec{c}) + \mu (\vec{a}_2, \vec{b}, \vec{c})$$

5) Объем треугольной пирамиды, образованной векторами \vec{a} , \vec{b} и \vec{c} , равен

$$\frac{1}{6} |(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})|$$

6) Если $\vec{a} = (x_1, y_1, z_1)$, $\vec{b} = (x_2, y_2, z_2)$, $\vec{c} = (x_3, y_3, z_3)$, то

$$(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}$$

Пример. Доказать, что точки $A(5; 7; 2)$, $B(3; 1; -1)$, $C(9; 4; -4)$, $D(1; 5; 0)$ лежат в одной плоскости.

$$\overrightarrow{AB} = (-2; -6; 1)$$

Найдем координаты векторов: $\overrightarrow{AC} = (4; -3; -2)$

$$\overrightarrow{AD} = (-4; -2; 2)$$

Найдем смешанное произведение полученных векторов:

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AD} = \begin{vmatrix} -2 & -6 & 1 \\ 4 & -3 & -2 \\ -4 & -2 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & -6 & 1 \\ 0 & -15 & 0 \\ 0 & 10 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -6 & 1 \\ 0 & -15 & 0 \\ 0 & 10 & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

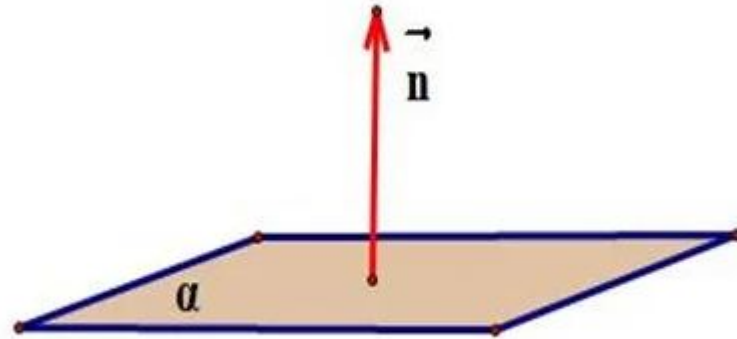
Таким образом, полученные выше векторы компланарны, следовательно точки A , B , C и D лежат в одной плоскости.

Общее уравнение плоскости.

Определение. **Плоскостью** называется поверхность, все точки которой удовлетворяют общему уравнению:

$$Ax + By + Cz + D = 0,$$

где A, B, C – координаты вектора $\vec{N} = A\vec{i} + B\vec{j} + C\vec{k}$ -вектор **нормали** к плоскости.



$A = 0$ – плоскость параллельна оси Ox

$B = 0$ – плоскость параллельна оси Oy

$C = 0$ – плоскость параллельна оси Oz

$D = 0$ – плоскость проходит через начало координат

$A = B = 0$ – плоскость параллельна плоскости xOy

$A = C = 0$ – плоскость параллельна плоскости xOz

$B = C = 0$ – плоскость параллельна плоскости yOz

$A = D = 0$ – плоскость проходит через ось Ox

$B = D = 0$ – плоскость проходит через ось Oy

$C = D = 0$ – плоскость проходит через ось Oz

$A = B = D = 0$ – плоскость совпадает с плоскостью xOy

$A = C = D = 0$ – плоскость совпадает с плоскостью xOz

$B = C = D = 0$ – плоскость совпадает с плоскостью yOz

Уравнение плоскости, проходящей через три точки.

Для того, чтобы через три какие-либо точки пространства можно было провести единственную плоскость, необходимо, чтобы эти точки не лежали на одной прямой.

Рассмотрим точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$, $M_3(x_3, y_3, z_3)$ в общей декартовой системе координат.

Для того, чтобы произвольная точка $M(x, y, z)$ лежала в одной плоскости с точками M_1 , M_2 , M_3 необходимо, чтобы векторы $\overrightarrow{M_1M_2}, \overrightarrow{M_1M_3}, \overrightarrow{M_1M}$ были компланарны.

$$(\overrightarrow{M_1M_2}, \overrightarrow{M_1M_3}, \overrightarrow{M_1M}) = 0$$

$$\overrightarrow{M_1M} = \{x - x_1; y - y_1; z - z_1\}$$

$$\overrightarrow{M_1M_2} = \{x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1\}$$

$$\overrightarrow{M_1M_3} = \{x_3 - x_1; y_3 - y_1; z_3 - z_1\}$$

Таким образом,

Уравнение плоскости, проходящей через три точки:

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0$$

Уравнение плоскости по двум точкам и вектору, коллинеарному плоскости.

Пусть заданы точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$ и вектор $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$.

Составим уравнение плоскости, проходящей через данные точки M_1 и M_2 и произвольную точку $M(x, y, z)$ параллельно вектору \vec{a} .

Векторы $\overrightarrow{M_1M} = \{x - x_1; y - y_1; z - z_1\}$ и вектор $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ должны быть
 $\overrightarrow{M_1M_2} = \{x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1\}$

компланарны, т.е.

$$(\overrightarrow{M_1M}, \overrightarrow{M_1M_2}, \vec{a}) = 0$$

Уравнение плоскости:

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ a_1 & a_2 & a_3 \end{vmatrix} = 0$$

Уравнение плоскости по одной точке и двум векторам,
коллинеарным плоскости.

Пусть заданы два вектора $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ и $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$, коллинеарные плоскости. Тогда для произвольной точки $M(x, y, z)$, принадлежащей плоскости, векторы $\vec{a}, \vec{b}, \overrightarrow{MM_1}$ должны быть компланарны.

Уравнение плоскости:

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = 0$$

Уравнение плоскости по точке и вектору нормали.

Теорема. Если в пространстве задана точка $M_0(x_0, y_0, z_0)$, то уравнение плоскости, проходящей через точку M_0 перпендикулярно вектору нормали $\vec{N}(A, B, C)$ имеет вид:

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0.$$

Доказательство. Для произвольной точки $M(x, y, z)$, принадлежащей плоскости, составим вектор $\overrightarrow{M_0M} = (x - x_0, y - y_0, z - z_0)$. Т.к. вектор \vec{N} - вектор нормали, то он перпендикулярен плоскости, а, следовательно, перпендикулярен и вектору $\overrightarrow{M_0M}$. Тогда скалярное произведение

$$\overrightarrow{M_0M} \cdot \vec{N} = 0$$

Таким образом, получаем уравнение плоскости

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$$

Уравнение плоскости в отрезках.

Если в общем уравнении $Ax + By + Cz + D = 0$ поделить обе части на $(-D)$

$$-\frac{A}{D}x - \frac{B}{D}y - \frac{C}{D}z - 1 = 0,$$

заменив $-\frac{D}{A} = a$, $-\frac{D}{B} = b$, $-\frac{D}{C} = c$, получим уравнение плоскости в отрезках:

$$\boxed{\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1}$$

Числа a , b , c являются точками пересечения плоскости соответственно с осями x , y , z .

Уравнение плоскости в векторной форме.

$$\vec{r} \cdot \vec{n} = p, \text{ где}$$

$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ - радиус- вектор текущей точки $M(x, y, z)$,

$\vec{n} = \vec{i} \cos \alpha + \vec{j} \cos \beta + \vec{k} \cos \gamma$ - единичный вектор, имеющий направление, перпендикуляра, опущенного на плоскость из начала координат.

α, β и γ - углы, образованные этим вектором с осями x, y, z .

p – длина этого перпендикуляра.

В координатах это уравнение имеет вид:

$$x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma - p = 0.$$

Расстояние от точки до плоскости.

Расстояние от произвольной точки $M_0(x_0, y_0, z_0)$ до плоскости $Ax+By+Cz+D=0$ равно:

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

Пример. Найти уравнение плоскости, зная, что точка $P(4; -3; 12)$ – основание перпендикуляра, опущенного из начала координат на эту плоскость.

$$\overrightarrow{OP} = (4; -3; 12); \quad |\overrightarrow{OP}| = \sqrt{16 + 9 + 144} = \sqrt{169} = 13$$

$$\vec{N} = \left(\frac{4}{13}; -\frac{3}{13}; \frac{12}{13} \right)$$

Таким образом, $A = 4/13$; $B = -3/13$; $C = 12/13$, воспользуемся формулой:

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0.$$

$$\frac{4}{13}(x - 4) - \frac{3}{13}(y + 3) + \frac{12}{13}(z - 12) = 0$$

$$\frac{4}{13}x - \frac{16}{13} - \frac{3}{13}y - \frac{9}{13} + \frac{12}{13}z - \frac{144}{13} = 0$$

$$\frac{4}{13}x - \frac{3}{13}y + \frac{12}{13}z - \frac{169}{13} = 0$$

$$4x - 3y + 12z - 169 = 0.$$

Пример. Найти уравнение плоскости, проходящей через две точки $P(2; 0; -1)$ и $Q(1; -1; 3)$ перпендикулярно плоскости $3x + 2y - z + 5 = 0$.

Вектор нормали к плоскости $3x + 2y - z + 5 = 0$ $\vec{N} = (3; 2; -1)$ параллелен искомой плоскости.

Получаем:

$$\begin{vmatrix} x-2 & y-0 & z+1 \\ 1-2 & -1-0 & 3+1 \\ 3 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{vmatrix} x-2 & y & z+1 \\ -1 & -1 & 4 \\ 3 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 0$$

$$(x-2)(1-8) - y(1-12) + (z+1)(-2+3) = 0$$

$$-7(x-2) + 11y + (z+1) = 0$$

$$-7x + 11y + z + 15 = 0$$

Пример. Даны координаты вершин пирамиды $A_1(1; 0; 3)$, $A_2(2; -1; 3)$, $A_3(2; 1; 1)$, $A_4(1; 2; 5)$.

1) Найти длину ребра A_1A_2 .

$$\overrightarrow{A_1A_2} = \{2 - 1; -1 - 0; 3 - 3\} = \{1; -1; 0\}; \quad \left| \overrightarrow{A_1A_2} \right| = \sqrt{1 + 1 + 0} = \sqrt{2} (ed).$$

2) Найти угол между ребрами A_1A_2 и A_1A_4 .

$$\overrightarrow{A_1A_4} = \{1 - 1; 2 - 0; 5 - 3\} = \{0; 2; 2\}$$

$$\left| \overrightarrow{A_1A_4} \right| = 2\sqrt{2} (ed)$$

$$\overrightarrow{A_1A_2} \cdot \overrightarrow{A_1A_4} = (1; -1; 0)(0; 2; 2) = -2$$

$$\overrightarrow{A_1A_2} \cdot \overrightarrow{A_1A_4} = \left| \overrightarrow{A_1A_2} \right| \left| \overrightarrow{A_1A_4} \right| \cos \alpha = 2\sqrt{2} \sqrt{2} \cos \alpha = 4 \cos \alpha$$

$$\cos \alpha = \frac{\overrightarrow{A_1A_2} \cdot \overrightarrow{A_1A_4}}{\left| \overrightarrow{A_1A_2} \right| \left| \overrightarrow{A_1A_4} \right|} = -\frac{2}{4} = -\frac{1}{2}; \quad \alpha = 120^\circ$$

3) Найти угол между ребром A_1A_4 и гранью $A_1A_2A_3$.

Сначала найдем вектор нормали к грани $A_1A_2A_3$ \vec{N} как векторное произведение векторов $\overrightarrow{A_1A_3}$ и $\overrightarrow{A_1A_2}$.

$$\overrightarrow{A_1A_3} = (2-1; 1-0; 1-3) = (1; 1; -2);$$

$$\vec{N} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = \vec{i}(0-2) - \vec{j}(0+2) + \vec{k}(-1-1) = -2\vec{i} - 2\vec{j} - 2\vec{k}; \quad \vec{N} = (-2; -2; -2)$$

$$|\vec{N}| = 2\sqrt{3}$$

Найдем угол между вектором нормали и вектором $\overrightarrow{A_1A_4}$.

$$\vec{N} \cdot \overrightarrow{A_1A_4} = |\vec{N}| \cdot |\overrightarrow{A_1A_4}| \cos \beta = 2\sqrt{3} \cdot 2\sqrt{2} \cos \beta$$

$$\vec{N} \cdot \overrightarrow{A_1A_4} = -4 - 4 = -8.$$

Искомый угол γ между вектором и плоскостью будет равен $\gamma = 90^\circ - \beta$.

$$\sin \gamma = \cos \beta = \frac{|-8|}{4\sqrt{6}} = \frac{2}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6}}{3}. \quad \gamma = \arcsin \frac{\sqrt{6}}{3}$$

4) Найти площадь грани $A_1A_2A_3$.

$$S = \frac{1}{2} \left| \overrightarrow{A_1A_2} \times \overrightarrow{A_1A_3} \right| = \frac{1}{2} |\vec{N}| = \sqrt{3}(e\partial^2)$$

5) Найти объем пирамиды.

$$V = \frac{1}{6} \left| ((\overrightarrow{A_1A_2} \times \overrightarrow{A_1A_3}) \cdot \overrightarrow{A_1A_4}) \right| = \left| \frac{1}{6} \vec{N} \cdot \overrightarrow{A_1A_4} \right| = \frac{4}{3} (\text{ед}^3).$$

6) Найти уравнение плоскости $A_1A_2A_3$.

Воспользуемся формулой уравнения плоскости, проходящей через три точки.

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-0 & z-3 \\ 2-1 & -1-0 & 3-3 \\ 2-1 & 1-0 & 1-3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x-1 & y & z-3 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 \end{vmatrix} = (x-1) \cdot 2 - y(-2) + (z-3)(1+1) = \\ = 2x - 2 + 2y + 2z - 6 = 0$$

$$2x + 2y + 2z - 8 = 0$$

$$x + y + z - 4 = 0;$$