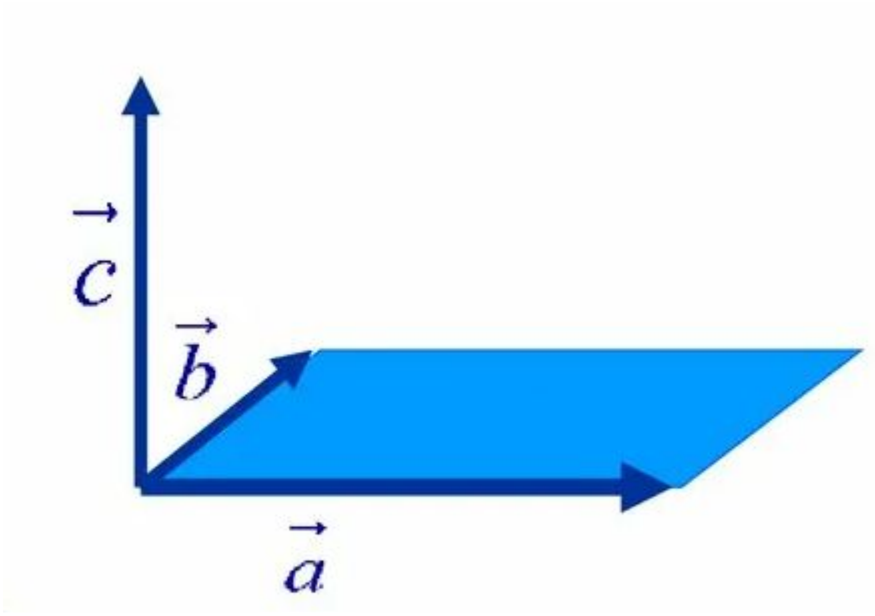
Математика
Лекция 3
Векторы. Уравнения плоскости в пространстве

- Векторы, их линейная независимость
- Базис пространства
- Скалярное, векторное и смешанное произведение векторов
- Уравнения плоскости в $\mathbb{R}^3$



Векторная алгебра

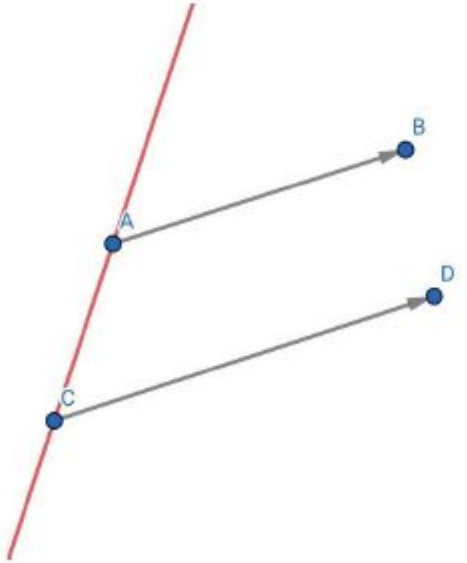
1 Понятие вектора в двумерном пространстве

Опр 1. Направленным отрезком называется упорядоченная пара точек - [AB].

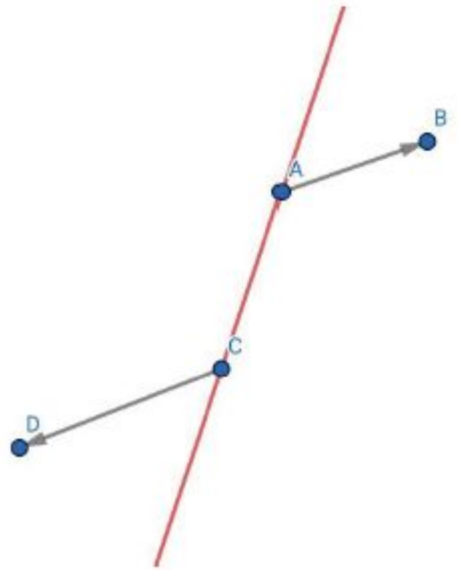
Опр 2. [AB] и [CD] коллинеарны (параллельны), если прямые AB и CD параллельны или совпадают.

Опр 3. Длиной направленного отрезка AB называется длина соответствующего отрезка AB.

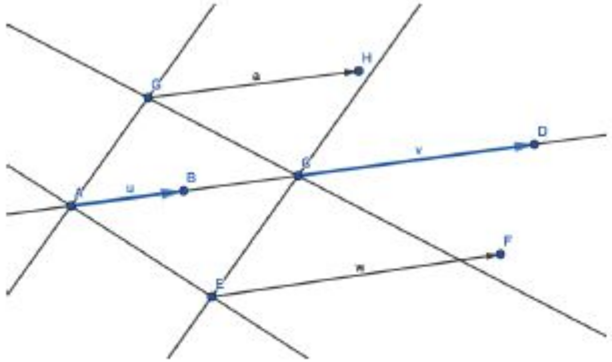
Опр 4. Если [AB] и [CD] коллинеарны и не лежат на одной прямой, то [AB] и [CD] сонаправлены, если B и D лежат по одну сторону от прямой AC (a) и противоположно направлены, если B и D лежат по разные стороны от прямой AC (b).
Если [AB] и [CD] коллинеарны и лежат на одной прямой, то [AB] и [CD] сонаправлены, если они сонаправлены с направленным отрезком, не лежащим на прямой AB (c).



(a)



(b)



(c)

Опр 5. [AB] $\sim$ [CD] если они
1. Сонаправлены
2. Коллинеарны
3. Равной длины

Опр 6. Вектор – класс эквивалентности относительно Опр 5. эквивалентности

Особый случай. Класс эквивалентности [AA] называется нулевым вектором
1. [AA] коллинеарен любому направленному отрезку
2. Сонаправленность у [AA] не определена
3. [AA] $\sim$ [BB] $\forall A, B \in \mathbb{R}^2$

Обозначение векторов: $\overrightarrow{a} = \overrightarrow{AB}$ - класс эквивалентности AB.

Опр 7. Два вектора коллинеарны, если их предстваители коллинеарны. ($\overrightarrow{0}$ коллинеарен любому вектору)

<u>Опр 8.</u> Векторы называются **компланарными**, если существует плоскость, которой они параллельны.

<u>Опр 9.</u> Длиной (модулем) вектора называется расстояние между началом и концом вектора.

<u>Определение.</u> Линейными операциями над векторами называется сложение и умножение на число.

Суммой векторов является вектор - $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$

Произведение - $\vec{b} = \alpha\,\vec{a}$; $\left|\vec{b}\right| = \alpha\left|\vec{a}\right|$, при этом $\vec{a}$ коллинеарен $\vec{b}$.

Вектор $\vec{a}$ сонаправлен с вектором $\vec{b}$ ($\vec{a}\uparrow\uparrow\vec{b}$), если α > 0.

Вектор $\vec{a}$ противоположно направлен с вектором $\vec{b}$ ($\vec{a}\uparrow\downarrow\vec{b}$), если α < 0.

Свойства сложения и умножения

1. $\overrightarrow{a} + \overrightarrow{a} = \overrightarrow{b} + \overrightarrow{a}$ – коммутативность сложения
2. $\overrightarrow{a} + (\overrightarrow{b} + \overrightarrow{c}) = (\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}) + \overrightarrow{c}$ – ассоциативность сложения
3. $\overrightarrow{a} + \overrightarrow{0} = \overrightarrow{a}$ – нейтральный элемент по сложению
4. $\overrightarrow{a} + (-1) \times \overrightarrow{a} = \overrightarrow{0}$ – существования обратного элементы по сложению
5. $(\alpha\beta)\overrightarrow{a} = \alpha(\beta\overrightarrow{a}), \forall\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ – ассоциативность умножения
6. $(\alpha + \beta)\overrightarrow{a} = \alpha\overrightarrow{a} + \beta\overrightarrow{a}, \forall\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ – дистрибутивность умножения относительно сложения
7. $(\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b})\alpha = \alpha\overrightarrow{a} + \alpha\overrightarrow{b}, \forall\alpha \in \mathbb{R}$ – дистрибутивность сложения относительно умножения
8. $1 \times \overrightarrow{a} = \overrightarrow{a}$ – нейтральный элемент по умножению

Определение.

1) **Базисом** в пространстве $\mathbb{R}^3$ называются любые 3 некомпланарных вектора, взятые в определенном порядке.

2) **Базисом** на плоскости называются любые 2 неколлинеарные векторы, взятые в определенном порядке.

3)**Базисом** на прямой называется любой ненулевой вектор.

Определение. Если $\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}$ - базис в пространстве и $\vec{a} = \alpha\overrightarrow{e_1} + \beta\,\overrightarrow{e_2} + \gamma\,\overrightarrow{e_3}$, то числа α, β и γ - называются **компонентами или координатами** вектора $\vec{a}$ в этом базисе.

- при умножении вектора на число его компоненты тоже умножаются на это число,

$$\lambda\vec{a} = \lambda(\alpha\overrightarrow{e_1} + \beta\,\overrightarrow{e_2} + \gamma\,\overrightarrow{e_3}) = (\lambda\alpha)\overrightarrow{e_1} + (\lambda\beta)\,\overrightarrow{e_2} + (\lambda\gamma)\,\overrightarrow{e_3}\ .$$

- при сложении векторов складываются их соответствующие компоненты.

$$\vec{a} = \alpha_1\overrightarrow{e_1} + \alpha_2\overrightarrow{e_2} + \alpha_3\overrightarrow{e_3}\ ; \qquad \vec{b} = \beta_1\overrightarrow{e_1} + \beta_2\overrightarrow{e_2} + \beta_3\overrightarrow{e_3}\ ;$$

$$\vec{a} + \vec{b} = (\alpha_1 + \beta_1)\overrightarrow{e_1} + (\alpha_2 + \beta_2)\overrightarrow{e_2} + (\alpha_3 + \beta_3)\overrightarrow{e_3}\ .$$

Линейная зависимость векторов.

Определение. Векторы $\overrightarrow{a_1},...,\overrightarrow{a_n}$ называются **линейно зависимыми**, если существует такая линейная комбинация $\alpha_1\overrightarrow{a_1}+\alpha_2\overrightarrow{a_2}+...+\alpha_n\overrightarrow{a_n}=0$, при не равных нулю одновременно α_i, т.е. $\alpha_1^2+\alpha_2^2+...+\alpha_n^2\neq 0$.

Если же только при $\alpha_i = 0$ выполняется $\alpha_1\overrightarrow{a_1}+\alpha_2\overrightarrow{a_2}+...+\alpha_n\overrightarrow{a_n}=0$, то векторы называются линейно независимыми.

Свойство 1. Если среди векторов $\overrightarrow{a_i}$ есть нулевой вектор, то эти векторы линейно зависимы.

Свойство 2. Если к системе линейно зависимых векторов добавить один или несколько векторов, то полученная система тоже будет линейно зависима.

<u>Свойство 3.</u> Система векторов линейно зависима тогда и только тогда, когда один из векторов раскладывается в линейную комбинацию остальных векторов.

<u>Свойство 4.</u> Любые 2 коллинеарных вектора линейно зависимы и, наоборот, любые 2 линейно зависимые векторы коллинеарны.

<u>Свойство 5.</u> Любые 3 компланарных вектора линейно зависимы и, наоборот, любые 3 линейно зависимые векторы компланарны.

<u>Свойство 6.</u> Любые 4 вектора линейно зависимы.

Декартова система координат.

Зафиксируем в пространстве точку О и рассмотрим произвольную точку М. Вектор $\overrightarrow{OM}$ назовем радиус- вектором точки М. Если в пространстве задать некоторый базис, то точке М можно сопоставить некоторую тройку чисел – компоненты ее радиус- вектора.

Определение. **Декартовой системой координат** в пространстве называется совокупность точки и базиса. Точка называется **началом координат**. Прямые, проходящие через начало координат называются **осями координат**.

1-я ось – ось **абсцисс**

2-я ось – ось **ординат**

3-я ось – ось **аппликат**

Чтобы найти компоненты вектора нужно из координат его конца вычесть координаты начала.

Если заданы точки $A(x_1, y_1, z_1)$, $B(x_2, y_2, z_2)$, то $\overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$.

<u>Определение.</u> Базис называется **ортонормированным**, если его векторы попарно ортогональны и равны единице.

<u>Определение.</u> Декартова система координат, базис которой ортонормирован называется **декартовой прямоугольной системой координат**.

<u>Пример.</u> Даны векторы $\vec{a}$ (1; 2; 3), $\vec{b}$ (-1; 0; 3), $\vec{c}$ (2; 1; -1) и $\vec{d}$ (3; 2; 2) в некотором базисе. Показать, что векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ образуют базис и найти координаты вектора $\vec{d}$ в этом базисе.

Векторы образуют базис, если они линейно независимы, другими словами, если уравнения, входящие в систему:

$$\begin{cases} \alpha - \beta + 2\gamma = 0 \\ 2\alpha + 0 \cdot \beta + \gamma = 0 \\ 3\alpha + 3\beta - \gamma = 0 \end{cases}$$ линейно независимы.

Тогда $\vec{d} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \gamma\vec{c}$.

Это условие выполняется, если определитель матрицы системы отличен от нуля.

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & 3 & -1 \end{vmatrix} \neq 0$$

$$\begin{cases} \alpha a_1 + \beta b_1 + \gamma c_1 = d_1 \\ \alpha a_2 + \beta b_2 + \gamma c_2 = d_2 \\ \alpha a_3 + \beta b_3 + \gamma c_3 = d_3 \end{cases}$$

Для решения этой системы воспользуемся методом Крамера.

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \end{vmatrix} = 3\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 3(-3) + (-2-2) + 12 = -1.$$

$$\alpha = \frac{\Delta_1}{\Delta} = -1/4;$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & d_1 & c_1 \\ a_2 & d_2 & c_2 \\ a_3 & d_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & -1 \end{vmatrix} = (-2-2) - 3(-2-3) + 2(4-6) = -4 + 15 - 4 = 7;$$

$$\beta = \frac{\Delta_2}{\Delta} = 7/4;$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & 0 & 2 \\ 3 & 3 & 2 \end{vmatrix} = -6 + (4-6) + 18 = 10;$$

$$\gamma = \frac{\Delta_3}{\Delta} = 5/2;$$

Итого, координаты вектора $\vec{d}$ в базисе $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$: $\vec{d}$ { -1/4, 7/4, 5/2}.

Длина вектора в координатах определяется как расстояние между точками начала и конца вектора. Если заданы две точки в пространстве $A(x_1, y_1, z_1)$, $B(x_2, y_2, z_2)$, то $\left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$.

Если точка $M(x, y, z)$ **делит отрезок AB в соотношении λ/μ**, считая от A, то координаты этой точки определяются как:

$$x = \frac{\mu x_1 + \lambda x_2}{\mu + \lambda}; \quad y = \frac{\mu y_1 + \lambda y_2}{\mu + \lambda}; \quad z = \frac{\mu z_1 + \lambda z_2}{\mu + \lambda}.$$

В частном случае координаты **середины отрезка** находятся как:

$$x = (x_1 + x_2)/2; \qquad y = (y_1 + y_2)/2; \qquad z = (z_1 + z_2)/2.$$

<u>Линейные операции над векторами в координатах.</u>

Пусть заданы векторы в прямоугольной системе координат $\vec{a}(x_A, y_A, z_A)$; $\vec{b}(x_B, y_B, z_B)$, тогда линейные операции над ними в координатах имеют вид:

$$\vec{a} + \vec{b} = \vec{c}(x_A + x_B; y_A + y_B; z_A + z_B); \quad \alpha \cdot \vec{a} = (\alpha x_A; \alpha y_A; \alpha z_A)$$

Скалярное произведение векторов.

Определение. Скалярным произведением векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется число, равное произведению длин этих сторон на косинус угла между ними.

$$\boxed{\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\varphi}$$

Свойства скалярного произведения:

1) $\vec{a}\cdot\vec{a} = |\vec{a}|^2$;
2) $\vec{a}\cdot\vec{b} = 0$, если $\vec{a}\perp\vec{b}$ или $\vec{a} = 0$ или $\vec{b} = 0$.
3) $\vec{a}\cdot\vec{b} = \vec{b}\cdot\vec{a}$;
4) $\vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c}) = \vec{a}\cdot\vec{b} + \vec{a}\cdot\vec{c}$;
5) $(m\vec{a})\cdot\vec{b} = \vec{a}\cdot(m\vec{b}) = m(\vec{a}\cdot\vec{b})$; m=const

Если рассматривать векторы $\vec{a}(x_a, y_a, z_a)$; $\vec{b}(x_b, y_b, z_b)$ в декартовой прямоугольной системе координат, то

$$\boxed{\vec{a} \cdot \vec{b} = x_a x_b + y_a y_b + z_a z_b;}$$

Используя полученные равенства, получаем формулу для вычисления угла между векторами:

$$\boxed{\cos\varphi = \frac{x_a x_b + y_a y_b + z_a z_b}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|};}$$

Пример. Найти $(5\vec{a} + 3\vec{b})(2\vec{a} - \vec{b})$, если $|\vec{a}| = 2$, $|\vec{b}| = 3$, $\vec{a} \perp \vec{b}$.

$$10\vec{a}\cdot\vec{a} - 5\vec{a}\cdot\vec{b} + 6\vec{a}\cdot\vec{b} - 3\vec{b}\cdot\vec{b} = 10|\vec{a}|^2 - 3|\vec{b}|^2 = 40 - 27 = 13,$$

т.к. $\vec{a}\cdot\vec{a} = |\vec{a}|^2 = 4$, $\vec{b}\cdot\vec{b} = |\vec{b}|^2 = 9$, $\vec{a}\cdot\vec{b} = 0$.

Пример. Найти угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$, если $\vec{a} = \vec{i} + 2\vec{j} + 3\vec{k}$, $\vec{b} = 6\vec{i} + 4\vec{j} - 2\vec{k}$.

Т.е. $\vec{a} = (1, 2, 3)$, $\vec{b} = (6, 4, -2)$

$\vec{a}\cdot\vec{b} = 6 + 8 - 6 = 8$:

$|\vec{a}| = \sqrt{1+4+9} = \sqrt{14}$; $|\vec{b}| = \sqrt{36+16+4} = \sqrt{56}$.

$$\cos\varphi = \frac{8}{\sqrt{14}\sqrt{56}} = \frac{8}{2\sqrt{14}\sqrt{14}} = \frac{4}{14} = \frac{2}{7};\qquad \varphi = \arccos\frac{2}{7}.$$

Пример. Найти скалярное произведение $(3\vec{a} - 2\vec{b})\cdot(5\vec{a} - 6\vec{b})$, если $|\vec{a}| = 4$, $|\vec{b}| = 6$, $\vec{a}\wedge\vec{b} = \pi/3$.

$$15\vec{a}\cdot\vec{a} - 18\vec{a}\cdot\vec{b} - 10\vec{a}\cdot\vec{b} + 12\vec{b}\cdot\vec{b} = 15|\vec{a}|^2 - 28|\vec{a}||\vec{b}|\cos\frac{\pi}{3} + 12|\vec{b}|^2 = 15\cdot 16 - 28\cdot 4\cdot 6\cdot\frac{1}{2} +$$

$$+ 12\cdot 36 = 240 - 336 + 432 = 672 - 336 = 336.$$

Пример. Найти угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$, если $\vec{a} = 3\vec{i} + 4\vec{j} + 5\vec{k}$, $\vec{b} = 4\vec{i} + 5\vec{j} - 3\vec{k}$.

Т.е. $\vec{a} = (3, 4, 5)$, $\vec{b} = (4, 5, -3)$

$\vec{a}\cdot\vec{b} = 12 + 20 - 15 = 17$:

$|\vec{a}| = \sqrt{9+16+25} = \sqrt{50};$ $|\vec{b}| = \sqrt{16+25+9} = \sqrt{50}$.

$$\cos\varphi = \frac{17}{\sqrt{50}\sqrt{50}} = \frac{17}{50}; \qquad \varphi = \arccos\frac{17}{50}.$$

Векторное произведение векторов.

Определение. Векторным произведением векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется вектор $\vec{c}$, удовлетворяющий следующим условиям:

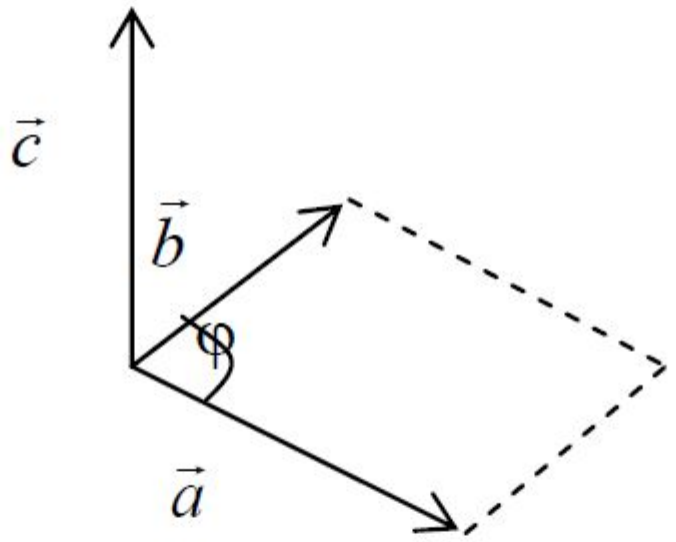
1) $|\vec{c}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \sin\varphi$, где φ - угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$,

$\sin\varphi \geq 0; \quad 0 \leq \varphi \leq \pi$

2) вектор $\vec{c}$ ортогонален векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$

3) $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ образуют правую тройку векторов.

Обозначается: $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$ или $\vec{c} = [\vec{a}, \vec{b}]$.



Геометрическим смыслом векторного произведения векторов является площадь параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

Свойства векторного произведения векторов:

1) $\vec{b}\times\vec{a} = -\vec{a}\times\vec{b}$;

2) $\vec{a}\times\vec{b} = 0$, если $\vec{a}\,||\,\vec{b}$ или $\vec{a} = 0$ или $\vec{b} = 0$;

3) $(m\vec{a})\times\vec{b} = \vec{a}\times(m\vec{b}) = m(\vec{a}\times\vec{b})$;

4) $\vec{a}\times(\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a}\times\vec{b} + \vec{a}\times\vec{c}$;

5) Если заданы векторы $\vec{a}\,(x_a, y_a, z_a)$ и $\vec{b}\,(x_b, y_b, z_b)$ в декартовой прямоугольной системе координат с единичными векторами $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$, то

$$\boxed{\vec{a}\times\vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_a & y_a & z_a \\ x_b & y_b & z_b \end{vmatrix}}$$

Пример. Найти векторное произведение векторов $\vec{a} = 2\vec{i} + 5\vec{j} + \vec{k}$ и $\vec{b} = \vec{i} + 2\vec{j} - 3\vec{k}$.

$\vec{a} = (2, 5, 1)$; $\vec{b} = (1, 2, -3)$

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 5 & 1 \\ 1 & 2 & -3 \end{vmatrix} = \vec{i}\begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} - \vec{j}\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} + \vec{k}\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -17\vec{i} + 7\vec{j} - \vec{k}.$$

Пример. Вычислить площадь треугольника с вершинами A(2, 2, 2), B(4, 0, 3), C(0, 1, 0).

$$\overrightarrow{AC} = (0-2;1-2;0-2) = (-2;-1;-2)$$

$$\overrightarrow{AB} = (4-2;0-2;3-2) = (2;-2;1)$$

$$\overrightarrow{AC} \times \overrightarrow{AB} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -2 & -1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{vmatrix} = \vec{i}\begin{vmatrix} -1 & -2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} - \vec{j}\begin{vmatrix} -2 & -2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + \vec{k}\begin{vmatrix} -2 & -1 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = \vec{i}\,(-1-4) - \vec{j}(-2+4) +$$

$$+\vec{k}(4+2) = -5\vec{i} - 2\vec{j} + 6\vec{k}.$$

$$\left|\overrightarrow{AC} \times \overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{25+4+36} = \sqrt{65}. \qquad S_{\Delta} = \frac{\sqrt{65}}{2}\,(\text{ед}^2).$$

Пример. Доказать, что векторы $\vec{a} = 7\vec{i} - 3\vec{j} + 2\vec{k}$, $\vec{b} = 3\vec{i} - 7\vec{j} + 8\vec{k}$ и $\vec{c} = \vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$ компланарны.

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 3 & -7 & 8 \\ 7 & -3 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & -4 & 5 \\ 0 & 4 & -5 \end{pmatrix},$$ т.к. векторы линейно зависимы, то они компланарны.

Пример. Найти площадь параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a} + 3\vec{b}$; $3\vec{a} + \vec{b}$, если $|\vec{a}| = |\vec{b}| = 1$; $\vec{a} \wedge \vec{b} = 30^0$.

$$(\vec{a} + 3\vec{b}) \times (3\vec{a} + \vec{b}) = 3\vec{a} \times \vec{a} + \vec{a} \times \vec{b} + 9\vec{b} \times \vec{a} + 3\vec{b} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a} + 9\vec{b} \times \vec{a} = 8\vec{b} \times \vec{a}$$

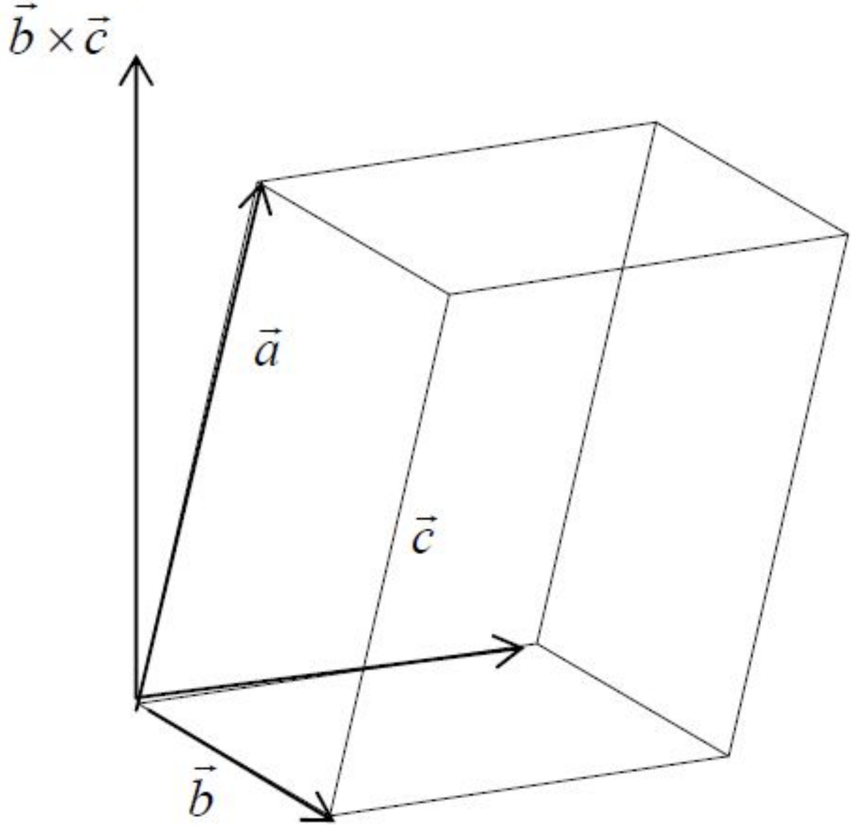
$$S = 8|\vec{b}||\vec{a}|\sin 30^0 = 4 \text{ (ед}^2\text{)}.$$

Смешанное произведение векторов.

Определение. **Смешанным произведением** векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ называется число, равное скалярному произведению вектора $\vec{a}$ на вектор, равный векторному произведению векторов $\vec{b}$ и $\vec{c}$.

Обозначается $\vec{a}\cdot\vec{b}\cdot\vec{c}$ или $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$.

Смешанное произведение $\vec{a}\cdot\vec{b}\cdot\vec{c}$ по модулю равно объему параллелепипеда, построенного на векторах $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$.



Свойства смешанного произведения:

1)Смешанное произведение равно нулю, если:

а) хоть один из векторов равен нулю;

б) два из векторов коллинеарны;

в) векторы компланарны.

2) $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})$

3) $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = (\vec{b}, \vec{c}, \vec{a}) = (\vec{c}, \vec{a}, \vec{b}) = -(\vec{b}, \vec{a}, \vec{c}) = -(\vec{c}, \vec{b}, \vec{a}) = -(\vec{a}, \vec{c}, \vec{b})$

4) $(\lambda\vec{a}_1 + \mu\vec{a}_2, \vec{b}, \vec{c}) = \lambda(\vec{a}_1, \vec{b}, \vec{c}) + \mu(\vec{a}_2, \vec{b}, \vec{c})$

5) Объем треугольной пирамиды, образованной векторами $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$, равен

$$\frac{1}{6}\left|\left(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\right)\right|$$

6)Если $\vec{a} = (x_1, y_1, z_1)$, $\vec{b} = (x_2, y_2, z_2)$, $\vec{c} = (x_3, y_3, z_3)$, то

$$(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}$$

Пример. Доказать, что точки A(5; 7; 2), B(3; 1; -1), C(9; 4; -4), D(1; 5; 0) лежат в одной плоскости.

Найдем координаты векторов:

$$\overrightarrow{AB} = (-2;-6;1)$$

$$\overrightarrow{AC} = (4;-3;-2)$$

$$\overrightarrow{AD} = (-4;-2;2)$$

Найдем смешанное произведение полученных векторов:

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AD} = \begin{vmatrix} -2 & -6 & 1 \\ 4 & -3 & -2 \\ -4 & -2 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & -6 & 1 \\ 0 & -15 & 0 \\ 0 & 10 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -6 & 1 \\ 0 & -15 & 0 \\ 0 & 10 & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

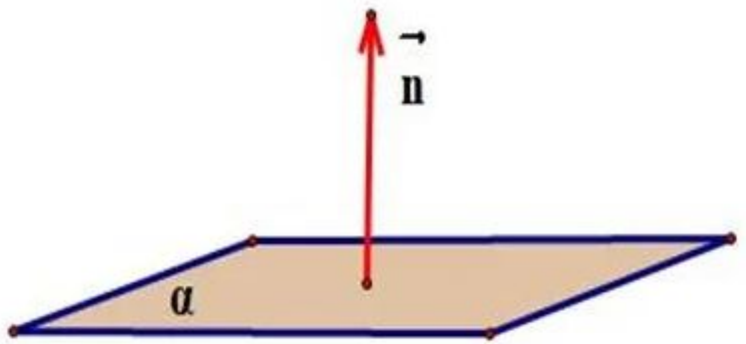
Таким образом, полученные выше векторы компланарны, следовательно точки A, B, C и D лежат в одной плоскости.

Общее уравнение плоскости.

Определение. **Плоскостью** называется поверхность, все точки которой удовлетворяют общему уравнению:

$$\boxed{Ax + By + Cz + D = 0,}$$

где A, B, C – координаты вектора $\overrightarrow{N} = A\vec{i} + B\vec{j} + C\vec{k}$ -вектор **нормали** к плоскости.



$A = 0$ – плоскость параллельна оси Ox
$B = 0$ – плоскость параллельна оси Oy
$C = 0$ – плоскость параллельна оси Oz
$D = 0$ – плоскость проходит через начало координат
$A = B = 0$ – плоскость параллельна плоскости xOy
$A = C = 0$ – плоскость параллельна плоскости xOz
$B = C = 0$ – плоскость параллельна плоскости yOz
$A = D = 0$ – плоскость проходит через ось Ox
$B = D = 0$ – плоскость проходит через ось Oy
$C = D = 0$ – плоскость проходит через ось Oz
$A = B = D = 0$ – плоскость совпадает с плоскостью xOy
$A = C = D = 0$ – плоскость совпадает с плоскостью xOz
$B = C = D = 0$ – плоскость совпадает с плоскостью yOz

Уравнение плоскости, проходящей через три точки.

Для того, чтобы через три какие- либо точки пространства можно было провести единственную плоскость, необходимо, чтобы эти точки не лежали на одной прямой.

Рассмотрим точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$, $M_3(x_3, y_3, z_3)$ в общей декартовой системе координат.

Для того, чтобы произвольная точка $M(x, y, z)$ лежала в одной плоскости с точками M_1, M_2, M_3 необходимо, чтобы векторы $\overrightarrow{M_1M_2}, \overrightarrow{M_1M_3}, \overrightarrow{M_1M}$ были компланарны.

$$(\overrightarrow{M_1M_2}, \overrightarrow{M_1M_3}, \overrightarrow{M_1M}) = 0$$

$$\overrightarrow{M_1M} = \{x - x_1; y - y_1; z - z_1\}$$

Таким образом,

$$\overrightarrow{M_1M_2} = \{x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1\}$$

$$\overrightarrow{M_1M_3} = \{x_3 - x_1; y_3 - y_1; z_3 - z_1\}$$

Уравнение плоскости, проходящей через три точки:

$$\boxed{\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0}$$

Уравнение плоскости по двум точкам и вектору, коллинеарному плоскости.

Пусть заданы точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$ и вектор $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$. Составим уравнение плоскости, проходящей через данные точки M_1 и M_2 и произвольную точку $M(x, y, z)$ параллельно вектору $\vec{a}$.

Векторы $\overrightarrow{M_1M} = \{x - x_1; y - y_1; z - z_1\}$, $\overrightarrow{M_1M_2} = \{x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1\}$ и вектор $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ должны быть компланарны, т.е.

$$(\overrightarrow{M_1M}, \overrightarrow{M_1M_2}, \vec{a}) = 0$$

Уравнение плоскости:

$$\boxed{\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ a_1 & a_2 & a_3 \end{vmatrix} = 0}$$

Уравнение плоскости по одной точке и двум векторам, коллинеарным плоскости.

Пусть заданы два вектора $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ и $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$, коллинеарные плоскости. Тогда для произвольной точки M(x, y, z), принадлежащей плоскости, векторы $\vec{a}, \vec{b}, \overrightarrow{MM_1}$ должны быть компланарны.

Уравнение плоскости:

$$\boxed{\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = 0}$$

Уравнение плоскости по точке и вектору нормали.

Теорема. *Если в пространстве задана точка $M_0(x_0, y_0, z_0)$, то уравнение плоскости, проходящей через точку M_0 перпендикулярно вектору нормали $\vec{N}(A, B, C)$ имеет вид:*

$$\boxed{A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0.}$$

Доказательство. Для произвольной точки M(x, y, z), принадлежащей плоскости, составим вектор $\overrightarrow{M_0M}=(x-x_0, y-y_0, z-z_0)$. Т.к. вектор $\vec{N}$ - вектор нормали, то он перпендикулярен плоскости, а, следовательно, перпендикулярен и вектору $\overrightarrow{M_0M}$. Тогда скалярное произведение

$$\overrightarrow{M_0M}\cdot\vec{N}=0$$

Таким образом, получаем уравнение плоскости

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$$

Уравнение плоскости в отрезках.

Если в общем уравнении Ax + By + Cz + D = 0 поделить обе части на (-D)

$$-\frac{A}{D}x-\frac{B}{D}y-\frac{C}{D}z-1=0,$$

заменив $-\frac{D}{A}=a,\quad -\frac{D}{B}=b,\quad -\frac{D}{C}=c$, получим уравнение плоскости в отрезках:

$$\boxed{\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1}$$

Числа a, b, c являются точками пересечения плоскости соответственно с осями x, y, z.

Уравнение плоскости в векторной форме.

$$\boxed{\vec{r} \cdot \vec{n} = p,}\ \text{где}$$

$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ - радиус- вектор текущей точки M(x, y, z),

$\vec{n} = \vec{i}\cos\alpha + \vec{j}\cos\beta + \vec{k}\cos\gamma$ - единичный вектор, имеющий направление, перпендикуляра, опущенного на плоскость из начала координат.

α, β и γ - углы, образованные этим вектором с осями x, y, z.
p – длина этого перпендикуляра.

В координатах это уравнение имеет вид:

$$\boxed{x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma - p = 0.}$$

Расстояние от точки до плоскости.

Расстояние от произвольной точки $M_0(x_0, y_0, z_0)$ до плоскости $Ax+By+Cz+D=0$ равно:

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

Пример. Найти уравнение плоскости, зная, что точка P(4; -3; 12) – основание перпендикуляра, опущенного из начала координат на эту плоскость.

$$\overrightarrow{OP} = (4;-3;12); \qquad |\overrightarrow{OP}| = \sqrt{16+9+144} = \sqrt{169} = 13$$

$$\vec{N} = (\frac{4}{13};-\frac{3}{13};\frac{12}{13})$$

Таким образом, A = 4/13; B = -3/13;   C = 12/13, воспользуемся формулой:

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0.$$

$$\frac{4}{13}(x-4) - \frac{3}{13}(y+3) + \frac{12}{13}(z-12) = 0$$

$$\frac{4}{13}x - \frac{16}{13} - \frac{3}{13}y - \frac{9}{13} + \frac{12}{13}z - \frac{144}{13} = 0$$

$$\frac{4}{13}x - \frac{3}{13}y + \frac{12}{13}z - \frac{169}{13} = 0$$

$$4x - 3y + 12z - 169 = 0.$$

Пример. Найти уравнение плоскости, проходящей через две точки P(2; 0; -1) и Q(1; -1; 3) перпендикулярно плоскости 3x + 2y – z + 5 = 0.

Вектор нормали к плоскости 3x + 2y – z + 5 = 0 $\overrightarrow{N} = (3;2;-1)$ параллелен искомой плоскости.

Получаем:

$$\begin{vmatrix} x-2 & y-0 & z+1 \\ 1-2 & -1-0 & 3+1 \\ 3 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{vmatrix} x-2 & y & z+1 \\ -1 & -1 & 4 \\ 3 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 0$$

$$(x-2)(1-8) - y(1-12) + (z+1)(-2+3) = 0$$

$$-7(x-2) + 11y + (z+1) = 0$$

$$-7x + 11y + z + 15 = 0$$

Пример. Даны координаты вершин пирамиды $A_1(1; 0; 3)$, $A_2(2; -1; 3)$, $A_3(2; 1; 1)$, $A_4(1; 2; 5)$.

1) Найти длину ребра A_1A_2.

$\overrightarrow{A_1A_2} = \{2-1; -1-0; 3-3\} = \{1; -1; 0\}$; $\left|\overrightarrow{A_1A_2}\right| = \sqrt{1+1+0} = \sqrt{2}\,(ед)$.

2) Найти угол между ребрами A_1A_2 и A_1A_4.

$\overrightarrow{A_1A_4} = \{1-1; 2-0; 5-3\} = \{0; 2; 2\}$

$\left|\overrightarrow{A_1A_4}\right| = 2\sqrt{2}\,(ед)$

$\overrightarrow{A_1A_2} \cdot \overrightarrow{A_1A_4} = (1; -1; 0)(0; 2; 2) = -2$

$\overrightarrow{A_1A_2} \cdot \overrightarrow{A_1A_4} = \left|\overrightarrow{A_1A_2}\right|\left|\overrightarrow{A_1A_4}\right| \cos\alpha = 2\sqrt{2}\sqrt{2}\cos\alpha = 4\cos\alpha$

$\cos\alpha = \dfrac{\overrightarrow{A_1A_2} \cdot \overrightarrow{A_1A_4}}{\left|\overrightarrow{A_1A_2}\right|\left|\overrightarrow{A_1A_4}\right|} = -\dfrac{2}{4} = -\dfrac{1}{2}$; $\alpha = 120^0$

3) Найти угол между ребром A_1A_4 и гранью $A_1A_2A_3$.

Сначала найдем вектор нормали к грани $A_1A_2A_3$ $\vec{N}$ как векторное произведение векторов $\overrightarrow{A_1A_3}$ и $\overrightarrow{A_1A_2}$.

$\overrightarrow{A_1A_3}$ = (2-1; 1-0; 1-3) = (1; 1; -2);

$$\vec{N} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = \vec{i}(0-2) - \vec{j}(0+2) + \vec{k}(-1-1) = -2\vec{i} - 2\vec{j} - 2\vec{k}; \qquad \vec{N} = (-2;-2;-2)$$

$$|\vec{N}| = 2\sqrt{3}$$

Найдем угол между вектором нормали и вектором $\overrightarrow{A_1A_4}$.

$$\vec{N} \cdot \overrightarrow{A_1A_4} = |\vec{N}| \cdot |\overrightarrow{A_1A_4}| \cos\beta = 2\sqrt{3} \cdot 2\sqrt{2}\cos\beta$$

$$\vec{N} \cdot \overrightarrow{A_1A_4} = -4 - 4 = -8.$$

Искомый угол γ между вектором и плоскостью будет равен $\gamma = 90^0 - \beta$.

$$\sin\gamma = \cos\beta = \frac{|-8|}{4\sqrt{6}} = \frac{2}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6}}{3}. \qquad \gamma = \arcsin\frac{\sqrt{6}}{3}$$

4) Найти площадь грани $A_1A_2A_3$.

$$S = \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{A_1A_2} \times \overrightarrow{A_1A_3}\right| = \frac{1}{2}\left|\vec{N}\right| = \sqrt{3}(e\partial^2)$$

5) Найти объем пирамиды.

$$V = \frac{1}{6}\left|\ ((\overrightarrow{A_1A_2} \times \overrightarrow{A_1A_3}) \cdot \overrightarrow{A_1A_4})\ \right| = \left|\ \frac{1}{6}\vec{N} \cdot \overrightarrow{A_1A_4}\ \right| = \frac{4}{3}\ (\text{ед}^3).$$

6) Найти уравнение плоскости $A_1A_2A_3$.

Воспользуемся формулой уравнения плоскости, проходящей через три точки.

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-0 & z-3 \\ 2-1 & -1-0 & 3-3 \\ 2-1 & 1-0 & 1-3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x-1 & y & z-3 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 \end{vmatrix} = (x-1)\cdot 2 - y(-2) + (z-3)(1+1) =$$

$$= 2x - 2 + 2y + 2z - 6 = 0$$

$$2x + 2y + 2z - 8 = 0$$

$$x + y + z - 4 = 0;$$