

*** Логарифмические
неравенства**

** Простейшими логарифмическими неравенствами* называют неравенства вида $\log_a f(x) > \log_a u(x)$, где $a \neq 1$; $a > 0$; $f(x)$, $u(x)$ - выражения, содержащие x .

** Если в неравенствах неизвестное находится под знаком логарифма, то неравенства относят к*

логарифмическим неравенствам.

Свойства логарифмов, выраженные неравенствами

1. Сравнение логарифмов:

А) Если $a > 1$, то $\log_a x > \log_a y \Leftrightarrow \begin{cases} x > y, \\ y > 0; \end{cases} \Leftrightarrow 0 < y < x ;$

Б) Если $0 < a < 1$, то $\log_a x > \log_a y \Leftrightarrow \begin{cases} x < y, \\ x > 0; \end{cases} \Leftrightarrow 0 < x < y .$

2. Сравнение логарифма с числом:

А) Если $a > 1$, то $\log_a x > z \Leftrightarrow x > a^z ;$

Б) Если $0 < a < 1$, то $\log_a x > z \Leftrightarrow 0 < x < a^z .$

* *Свойства монотонности логарифмов

* 1) Если $a > 1$, то $\log_a u < c \Leftrightarrow 0 < u < a^c \Leftrightarrow \begin{cases} u > 0, \\ u < a^c \end{cases}$ и $\log_a u > c \Leftrightarrow u > a^c$.

* 2) Если $0 < a < 1$, то $\log_a u < c \Leftrightarrow u > a^c$ и $\log_a u > c \Leftrightarrow 0 < u < a^c \Leftrightarrow \begin{cases} u > 0, \\ u < a^c. \end{cases}$

* 3) Если $a > 1$, то $\log_a u > 0 \Leftrightarrow u - 1 > 0$.

* 4) Если $0 < a < 1$, то $\log_a u > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 1 - u > 0, \\ u > 0. \end{cases}$

* 5) Если $a > 1$, то $\log_a u < \log_a v \Leftrightarrow 0 < u < v \Leftrightarrow \begin{cases} u > 0, \\ u < v \end{cases}$ и $\log_a u - \log_a v < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} u - v < 0, \\ u > 0. \end{cases}$

*6) Если $0 < a < 1$, то $\log_a u < \log_a v \Leftrightarrow \begin{cases} v > 0, \\ u > v \end{cases}$ и

$$\log_a u - \log_a v < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} u - v < 0, \\ v > 0. \end{cases}$$

*7) Если основание a логарифма – переменная величина,

$$\text{то } \log_a u \leq \log_a v \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{u-v}{a-1} \leq 0, \\ u > 0; v > 0; a > 0; a \neq 1. \end{cases}$$

** Методы решения логарифмических неравенств*

** 1. Метод потенцирования.*

** 2. Применение простейших свойств
логарифмов.*

** 3. Метод разложения на множители.*

** 4. Метод замены переменной.*

** 5. Применение свойств*

** логарифмической функции.*

* * Решение логарифмических неравенств

* № 1. Решите неравенство

$$* 1 + \log_6(4 - x) \leq \log_6(16 - x^2) .$$

* *Решение.*

* 1) Находим область определения данного неравенства

$$* \begin{cases} 4 - x > 0, \\ 16 - x^2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 4, \\ x \in (-4; 4) \end{cases} \Leftrightarrow x \in (-4; 4) .$$

* 2) Преобразуем данное неравенство

$$* \log_6(16 - x^2) \geq \log_6(4 - x) + \log_6 6 \Leftrightarrow$$

$$\log_6(16 - x^2) \geq \log_6(6(4 - x)) \Leftrightarrow 6 > 1, \text{ следовательно,}$$

$$16 - x^2 \geq 6(4 - x) \Leftrightarrow x^2 - 6x + 8 \leq 0 \Leftrightarrow (x - 2)(x - 4) \leq 0$$

$$\Leftrightarrow x \in [2; 4] .$$

*3) Учитывая, что $x \in (-4; 4)$, получаем $x \in [2; 4)$.

**Ответ.* $[2; 4)$.

*№ 2. Решите неравенство

$$*\log_3 \frac{1}{x} + \log_3(x^2 + 3x - 9) \leq \log_3 \left(x^2 + 3x + \frac{1}{x} - 10\right).$$

**Решение.*

*1) Находим область определения данного неравенства

$$*\begin{cases} \frac{1}{x} > 0, \\ x^2 + 3x - 9 > 0, \\ x^2 + 3x + \frac{1}{x} - 10 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0, \\ x \in \left(-\infty; \frac{-3-3\sqrt{5}}{2}\right) \cup \left(\frac{-3+3\sqrt{5}}{2}; +\infty\right), \\ \frac{x^3+3x^2-10x+1}{x} > 0. \end{cases}$$

* Из первых двух неравенств:

$$* x \in \left(\frac{-3+3\sqrt{5}}{2}; +\infty \right).$$

* Прикидываем $\frac{-3+3\sqrt{5}}{2} \approx 1,85$.

* Рассмотрим неравенство $\frac{x^3+3x^2-10x+1}{x} > 0$.

* Должно выполняться условие:

$$* x \neq 0.$$

* Если $x \geq 2$, то $x^3 + 3x^2 - 10x + 1 > 0$, тогда

$$* \frac{x^3+3x^2-10x+1}{x} > 0.$$

*2) Преобразуем данное неравенство

$$* \log_3 \left(\frac{1}{x} (x^2 + 3x - 9) \right) \leq \log_3 \left(x^2 + 3x + \frac{1}{x} - 10 \right) \Leftrightarrow$$

$$\log_3 \left(x + 3 - \frac{9}{x} \right) \leq \log_3 \left(x^2 + 3x + \frac{1}{x} - 10 \right) \Leftrightarrow 3 > 1,$$

$$\text{следовательно, } x + 3 - \frac{9}{x} \leq x^2 + 3x + \frac{1}{x} - 10 \Leftrightarrow$$

$$\frac{x^3 + 2x^2 - 13x + 10}{x} \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 0, \\ x^3 + 2x^2 - 13x + 10 = 0. \end{cases}$$

* Решаем уравнение $x^3 + 2x^2 - 13x + 10 = 0$.

* Сумма коэффициентов $1 + 2 - 13 + 10 = 0$, следовательно один из корней $x = 1$.

* Разделим четырёхчлен $(x^3 + 2x^2 - 13x + 10)$ на двучлен $(x - 1)$, получаем

$$*(x^3 + 2x^2 - 13x + 10) : (x - 1) = x^2 + 3x - 10 = (x - 2)(x + 5).$$

* Тогда $x^3 + 2x^2 - 13x + 10 = (x - 1)(x - 2)(x + 5)$,

* следовательно, $\frac{(x-1)(x-2)(x+5)}{x} \geq 0$, решая методом

* интервалов данное неравенство, определяем

* $x \in (-\infty; -5] \cup (0; 1] \cup [2; +\infty)$.

* Учитывая, что $x > \frac{-3+3\sqrt{5}}{2}$, находим значения неизвестной величины $x \in [2; +\infty)$.

* *Ответ.* $[2; +\infty)$.

*№ 3. Решите неравенство

$$* 3^{\log_2 x^2} + 2 \cdot |x|^{\log_2 9} \leq 3 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{\log_{0,5}(2x+3)} .$$

*Решение.

*1) Преобразуем $|x|^{\log_2 9} = |x|^{2 \log_2 3} = (|x|^2)^{\log_2 3} =$

$$* (x^2)^{\log_2 3} = 3^{\log_2 x^2} .$$

*2) Данное неравенство принимает вид:

$$* 3^{\log_2 x^2} + 2 \cdot 3^{\log_2 x^2} \leq 3 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{\log_{0,5}(2x+3)} \Leftrightarrow$$

$$* 3 \cdot 3^{\log_2 x^2} \leq 3 \cdot (3)^{\log_2(2x+3)} \Leftrightarrow 3^{\log_2 x^2} \leq (3)^{\log_2(2x+3)} \Leftrightarrow 3 >$$

$$1 \text{ и } \log_2 x^2 \leq \log_2(2x+3) \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 > 0, \\ x^2 \leq 2x+3 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x \in (-\infty; 0) \cup (0; +\infty), \\ (x-3)(x+1) \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in (-\infty; 0) \cup (0; +\infty), \\ x \in [-1; 3] \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$* x \in [-1; 0) \cup (0; 3] .$$

$$* \text{Ответ. } [-1; 0) \cup (0; 3] .$$

* № 4. Решите неравенство

$$* \log_{\log_x 2x}(5x - 2) \geq 0 .$$

* Решение.

* 1) Преобразовываем данное уравнение

$$* \log_{\log_x 2x}(5x - 2) \geq 0 \Leftrightarrow \log_{\log_x 2x}(5x - 2) \geq \log_{\log_x 2x} 1 .$$

* 2) Неравенство равносильно системе неравенств:

$$* \begin{cases} 5x - 2 > 0, \\ \log_x 2x > 0, \\ \frac{1 - (5x - 2)}{\log_x 2x - 1} \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0,4, \\ \log_x 2 + \log_x x > 0, \\ \frac{3 - 5x}{\log_x 2 + \log_x x - 1} \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0,4, \\ \log_x x^{-1} < \log_x 2, \\ \frac{3 - 5x}{\log_x 2} \leq 0. \end{cases}$$

*3) Решаем неравенство

$$\begin{aligned} * \log_x x^{-1} < \log_x 2 &\Leftrightarrow \begin{cases} x^{-1} > 0, \\ x > 0, \\ \frac{x^{-1}-2}{x-1} < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0, \\ \frac{1-2x}{x(x-1)} < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \\ \begin{cases} x > 0, \\ x \in \left(0; \frac{1}{2}\right) \cup (1; +\infty) \end{cases} &\Leftrightarrow x \in (0; 0,5) \cup (1; +\infty) . \end{aligned}$$

*4) Рассматриваем систему и решаем её

$$\begin{cases} x > 0,4, \\ x \in (0; 0,5) \cup (1; +\infty) \end{cases} \Leftrightarrow x \in (0,4; 0,5) \cup (1; +\infty) .$$

*5) Решаем неравенство $\frac{3-5x}{\log_x 2} \leq 0$.

*а) Если $x \in (1; +\infty)$, то $(3 - 5x) < 0$, следовательно,

$$* \log_x 2 > 0 \Leftrightarrow \log_x 2 > \log_x 1 \Leftrightarrow$$

$$* \begin{cases} \frac{1-2}{x-1} < 0, \\ x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{1-x} < 0, \\ x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1-x < 0, \\ x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \in (1; +\infty) .$$

* $x \in (1; +\infty)$ – решение неравенства.

* б) Если $x \in (0,4; 0,5)$, то $(3 - 5x) > 0$, следовательно,

$$* \log_x 2 < 0 \Leftrightarrow \log_x 2 < \log_x 1 \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{2-1}{x-1} < 0, \\ x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{x-1} < 0, \\ x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$* \begin{cases} x - 1 < 0, \\ x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \in (0; 1) .$$

Учитывая, что рассматривали $x \in (0,4; 0,5)$, получаем $x \in (0,4; 0,5)$ – решение неравенства.

$$6) \text{ Получаем } \begin{cases} x \in (1; +\infty), \\ x \in (0,4; 0,5) \end{cases} \Leftrightarrow x \in (0,4; 0,5) \cup (1; +\infty) .$$

Ответ. $(0,4; 0,5) \cup (1; +\infty)$.

*№ 5. Решите неравенство

$$* \log_{8x^2-23x+15}(2x-2) \leq 0.$$

*Решение.

*1) Преобразовываем данное неравенство

$$* \log_{8x^2-23x+15}(2x-2) \leq \log_{8x^2-23x+15} 1$$

*2) Неравенство равносильно системе неравенств:

$$* \begin{cases} \frac{(2x-2)-1}{8x^2-23x+15-1} \leq 0, \\ 2x-2 > 0, \\ 8x^2-23x+15 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{2x-3}{8x^2-23x+14} \leq 0, \\ x > 1, \\ 8(x-1)\left(x-\frac{15}{8}\right) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$* \begin{cases} \frac{2\left(x-\frac{3}{2}\right)}{8\left(x-\frac{7}{8}\right)(x-2)} \leq 0, \\ x > 1, \\ x \in (-\infty; 1) \cup \left(\frac{15}{8}; +\infty\right) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in \left(-\infty; \frac{7}{8}\right) \cup \left[\frac{3}{2}; 2\right), \\ x > 1, \\ x \in (-\infty; 1) \cup \left(\frac{15}{8}; +\infty\right) \end{cases} \Leftrightarrow$$

* $x \in \left(\frac{15}{8}; 2\right)$.

* *Ответ.* $\left(\frac{15}{8}; 2\right)$.

* № 6. Решите неравенство

* $2 \log_{(x^2-4x+5)^2}(4x^2 + 1) \leq \log_{x^2-4x+5}(3x^2 + 4x + 1)$.

* *Решение.*

* 1) Преобразовываем данное неравенство

* $\frac{2}{2} \log_{x^2-4x+5}(4x^2 + 1) \leq \log_{x^2-4x+5}(3x^2 + 4x + 1)$

* $\Leftrightarrow \log_{x^2-4x+5}(4x^2 + 1) \leq \log_{x^2-4x+5}(3x^2 + 4x + 1)$.

* 2) Учитывая преобразования неравенства, данное неравенство равносильно системе неравенств:

$$\begin{cases}
 * \frac{(4x^2+1)-(3x^2+4x+1)}{(x^2-4x+5)-1} \leq 0, \\
 * \begin{cases}
 4x^2 + 1 > 0, \\
 3x^2 + 4x + 1 > 0, \\
 x^2 - 4x + 5 > 0, \\
 (x^2 - 4x + 5)^2 > 0
 \end{cases}
 \end{cases}
 \Leftrightarrow
 \begin{cases}
 \frac{x^2-4x}{x^2-4x+4} \leq 0, \\
 x \in (-\infty; +\infty), \\
 3(x+1)\left(x+\frac{1}{3}\right) > 0, \\
 x \in (-\infty; +\infty), \\
 x \in (-\infty; +\infty)
 \end{cases}
 \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases}
 * \frac{x(x-4)}{(x-2)^2} \leq 0, \\
 x \in (-\infty; +\infty), \\
 x \in (-\infty; -1) \cup \left(-\frac{1}{3}; +\infty\right)
 \end{cases}
 \Leftrightarrow
 \begin{cases}
 x \in [0; 2) \cup (2; 4], \\
 x \in (-\infty; -1) \cup \left(-\frac{1}{3}; +\infty\right)
 \end{cases}$$

$$* \Leftrightarrow x \in [0; 2) \cup (2; 4] .$$

* *Ответ.* $[0; 2) \cup (2; 4]$.

* № 7. Решите неравенство

$$* \log_{1,5x+1}(3x+7) \cdot \log_{1+\frac{3x}{2}} \frac{24x+56}{(3x+2)^3} \leq -2.$$

* *Решение.*

* 1) Находим область определения данного неравенства:

$$* \begin{cases} 3x+7 > 0, \\ 1,5x+1 > 0, \\ 1,5x+1 \neq 1, \\ \frac{24x+56}{(3x+2)^3} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > -\frac{7}{3}, \\ x > -\frac{2}{3}, \\ x \neq 0, \\ \frac{8(3x+7)}{(3x+2)^3} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in \left(-\frac{2}{3}; 0\right) \cup (0; +\infty), \\ x \in \left(-\infty; -\frac{7}{3}\right) \cup \left(-\frac{2}{3}; +\infty\right) \end{cases}$$

$$* \Leftrightarrow x \in \left(-\frac{2}{3}; 0\right) \cup (0; +\infty).$$

*2) Преобразовываем данное неравенство

$$* \log_{1,5x+1}(3x+7) \cdot (\log_{1+1,5x}(24x+56) - \log_{1+1,5x}(3x+2)^3) + 2 \leq 0$$

$$* \Leftrightarrow \log_{1,5x+1}(3x+7) \cdot (\log_{1+1,5x}(8(3x+7)) - \log_{1+1,5x}(2(1,5x+1))^3) + 2 \leq 0$$

$$* \Leftrightarrow \log_{1,5x+1}(3x+7) \cdot (\log_{1+1,5x} 8 + \log_{1+1,5x}(3x+7) - \log_{1+1,5x}(8(1,5x+1)^3)) + 2 \leq 0 \Leftrightarrow$$

$$* \log_{1,5x+1}(3x+7) \cdot (\log_{1+1,5x}(3x+7) - \log_{1+1,5x}(1,5x+1)^3) + 2 \leq 0 \Leftrightarrow$$

$$* \log_{1,5x+1}(3x+7) \cdot (\log_{1+1,5x}(3x+7) - 3) + 2 \leq 0 \Leftrightarrow$$

$$* (\log_{1,5x+1}(3x+7))^2 - 3 \log_{1+1,5x}(3x+7) + 2 \leq 0 .$$

*3) Применяем метод замены переменной.

* Пусть $\log_{1,5x+1}(3x+7) = a$, тогда неравенство можно

* представить в виде:

$$* a^2 - 3a + 2 \leq 0 \Leftrightarrow (a-1)(a-2) \leq 0 \Leftrightarrow a \in [1; 2] .$$

*4) Выполним обратную замену:

$$* 1 \leq \log_{1,5x+1}(3x+7) \leq 2 \Leftrightarrow$$

$$* \begin{cases} \log_{1,5x+1}(3x + 7) \geq 1, \\ \log_{1,5x+1}(3x + 7) \leq 2. \end{cases}$$

* 5) Решаем неравенство $\log_{1,5x+1}(3x + 7) \geq 1$

$$* \Leftrightarrow \log_{1,5x+1}(3x + 7) \geq \log_{1,5x+1}(1,5x + 1) \Leftrightarrow$$

$$* \begin{cases} \frac{1,5x+1-(3x+7)}{1,5x+1-1} \leq 0, \\ 1,5x + 1 > 0, \\ 3x + 7 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{-1,5x-6}{1,5x} \leq 0, \\ x > -\frac{2}{3}, \\ x > -\frac{7}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{-1,5(x+4)}{1,5x} \leq 0, \\ x > -\frac{2}{3} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$* \begin{cases} \frac{x+4}{x} \geq 0, \\ x > -\frac{2}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in (-\infty; -4] \cup (0; +\infty), \\ x > -\frac{2}{3} \end{cases} \Leftrightarrow x \in (0; +\infty) .$$

*6) Решаем неравенство $\log_{1,5x+1}(3x + 7) \leq 2$

$$\Leftrightarrow \log_{1,5x+1}(3x + 7) \leq \log_{1,5x+1}(1,5x + 1)^2 \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} \frac{(3x+7)-(1,5x+1)^2}{1,5x+1-1} \leq 0, \\ 3x + 7 > 0, \\ 1,5x + 1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{3x+7-2,25x^2-3x-1}{1,5x} \leq 0, \\ x > -\frac{7}{3}, \\ x > -\frac{2}{3} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$* \begin{cases} \frac{-2,25x^2+6}{1,5x} \leq 0, \\ x > -\frac{2}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{-1,5(1,5x^2-4)}{1,5x} \leq 0, \\ x > -\frac{2}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1,5x^2-4}{x} \geq 0, \\ x > -\frac{2}{3} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$* \begin{cases} \frac{1,5\left(x+\frac{2\sqrt{6}}{3}\right)\left(x-\frac{2\sqrt{6}}{3}\right)}{x} \geq 0, \\ x > -\frac{2}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in \left[-\frac{2\sqrt{6}}{3}; 0\right) \cup \left[\frac{2\sqrt{6}}{3}; +\infty\right), \\ x > -\frac{2}{3} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$* x \in \left[\frac{2\sqrt{6}}{3}; +\infty \right) .$$

$$* 7) \text{ Получаем систему неравенств } \begin{cases} x \in (0; +\infty), \\ x \in \left[\frac{2\sqrt{6}}{3}; +\infty \right) \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$* x \in \left[\frac{2\sqrt{6}}{3}; +\infty \right) .$$

$$* \text{ Ответ. } \left[\frac{2\sqrt{6}}{3}; +\infty \right) .$$