Логарифмические неравенства

* ***Простейшими логарифмическими неравенствами*** называют неравенства вида $\log_a f(x) > \log_a u(x)$, где $a \neq 1$; $a > 0$; $f(x)$, $u(x)$ - выражения, содержащие x.

* ***Если в неравенствах неизвестное находится под знаком логарифма, то неравенства относят к***

логарифмическим неравенствам.

Свойства логарифмов, выраженные неравенствами

1. Сравнение логарифмов:

А) Если $a > 1$, то $\log_a x > \log_a y \Leftrightarrow \begin{cases} x > y, \\ y > 0; \end{cases} \Leftrightarrow 0 < y < x$;

Б) Если $0 < a < 1$, то $\log_a x > \log_a y \Leftrightarrow \begin{cases} x < y, \\ x > 0; \end{cases} \Leftrightarrow 0 < x < y$.

2. Сравнение логарифма с числом:

А) Если $a > 1$, то $\log_a x > z \Leftrightarrow x > a^z$;

Б) Если $0 < a < 1$, то $\log_a x > z \Leftrightarrow 0 < x < a^z$.

Свойства монотонности логарифмов

* 1) Если $a > 1$, то $log_a u < c \Leftrightarrow 0 < u < a^c \Leftrightarrow \begin{cases} u > 0, \\ u < a^c \end{cases}$ и $log_a u > c \Leftrightarrow u > a^c$.

* 2) Если $0 < a < 1$, то $log_a u < c \Leftrightarrow u > a^c$ и $log_a u > c \Leftrightarrow 0 < u < a^c \Leftrightarrow \begin{cases} u > 0, \\ u < a^c. \end{cases}$

* 3) Если $a > 1$, то $log_a u > 0 \Leftrightarrow u - 1 > 0$.

* 4) Если $0 < a < 1$, то $log_a u > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 1 - u > 0, \\ u > 0. \end{cases}$

* 5) Если $a > 1$, то $log_a u < log_a v \Leftrightarrow 0 < u < v \Leftrightarrow \begin{cases} u > 0, \\ u < v \end{cases}$ и $log_a u - log_a v < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} u - v < 0, \\ u > 0. \end{cases}$

* 6) Если $0 < a < 1$, то $log_a u < log_a v \Leftrightarrow \begin{cases} v > 0, \\ u > v \end{cases}$ и $log_a u - log_a v < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} u - v < 0, \\ v > 0. \end{cases}$
* 7) Если основание a логарифма – переменная величина, то $log_a u \le log_a v \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{u-v}{a-1} \le 0, \\ u > 0; v > 0; a > 0; a \ne 1. \end{cases}$

* Методы решения логарифмических неравенств

* 1. Метод потенцирования.
* 2. Применение простейших свойств
* логарифмов.
* 3. Метод разложения на множители.
* 4. Метод замены переменной.
* 5. Применение свойств
* логарифмической функции.

Решение логарифмических неравенств

№ 1. Решите неравенство

$$\mathbf{1 + log_6(4 - x) \le log_6(16 - x^2)}\ .$$

Решение.

1) Находим область определения данного неравенства

$$\begin{cases} 4 - x > 0, \\ 16 - x^2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 4, \\ x \in (-4; 4) \end{cases} \Leftrightarrow x \in (-4; 4)\ .$$

2) Преобразуем данное неравенство

$log_6(16 - x^2) \ge log_6(4 - x) + log_6 6 \Leftrightarrow$ $log_6(16 - x^2) \ge log_6(6(4 - x)) \Leftrightarrow 6 > 1$, следовательно, $16 - x^2 \ge 6(4 - x) \Leftrightarrow x^2 - 6x + 8 \le 0 \Leftrightarrow (x - 2)(x - 4) \le 0$ $\Leftrightarrow x \in [2; 4]$.

* 3) Учитывая, что $x \in (-4; 4)$, получаем $x \in [2; 4)$.
* *Ответ*. $[2; 4)$.

* № 2. Решите неравенство
  * $\log_3 \frac{1}{x} + \boldsymbol{log_3(x^2 + 3x - 9) \le log_3\left(x^2 + 3x + \frac{1}{x} - 10\right)}$.
* *Решение.*
* 1) Находим область определения данного неравенства
* $$\begin{cases} \frac{1}{x} > 0, \\ x^2 + 3x - 9 > 0, \\ x^2 + 3x + \frac{1}{x} - 10 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0, \\ x \in \left(-\infty; \frac{-3-3\sqrt{5}}{2}\right) \cup \left(\frac{-3+3\sqrt{5}}{2}; +\infty\right), \\ \frac{x^3+3x^2-10x+1}{x} > 0. \end{cases}$$

* Из первых двух неравенств:
* $x \in \left(\frac{-3+3\sqrt{5}}{2}; +\infty \right)$.
* Прикидываем $\frac{-3+3\sqrt{5}}{2} \approx 1{,}85$.
* Рассмотрим неравенство $\frac{x^3+3x^2-10x+1}{x} > 0$.
* Должно выполняться условие:
* $x \neq 0$.
* Если $x \geq 2$, то $x^3 + 3x^2 - 10x + 1 > 0$, тогда
* $\frac{x^3+3x^2-10x+1}{x} > 0$.

* 2) Преобразуем данное неравенство
* $log_3\left(\frac{1}{x}(x^2+3x-9)\right) \le log_3\left(x^2+3x+\frac{1}{x}-10\right) \Leftrightarrow$
  $log_3\left(x+3-\frac{9}{x}\right) \le log_3\left(x^2+3x+\frac{1}{x}-10\right) \Leftrightarrow 3>1,$
  следовательно, $x+3-\frac{9}{x} \le x^2+3x+\frac{1}{x}-10 \Leftrightarrow$
  $\frac{x^3+2x^2-13x+10}{x} \ge 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \ne 0, \\ x^3+2x^2-13x+10=0. \end{cases}$
* Решаем уравнение $x^3+2x^2-13x+10=0$.
* Сумма коэффициентов $1+2-13+10=0$, следовательно один из корней $x=1$.
* Разделим четырёхчлен $(x^3+2x^2-13x+10)$ на двучлен $(x-1)$, получаем
* $(x^3+2x^2-13x+10):(x-1)=x^2+3x-10=(x-2)(x+5)$.

* Тогда $x^3 + 2x^2 - 13x + 10 = (x-1)(x-2)(x+5)$,

$=$

* следовательно, $\frac{(x-1)(x-2)(x+5)}{x} \geq 0$, решая методом
* интервалов данное неравенство, определяем
* $x \in (-\infty; -5] \cup (0; 1] \cup [2; +\infty)$.
* Учитывая, что $x > \frac{-3+3\sqrt{5}}{2}$, находим значения неизвестной величины $x \in [2; +\infty)$.
* *Ответ*. $[2; +\infty)$.

* № 3. Решите неравенство

* $$3^{\log_2 x^2} + 2 \cdot |x|^{\log_2 9} \leq 3 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{\log_{0,5}(2x+3)}.$$

* *Решение.*
* 1) Преобразуем $|x|^{\log_2 9} = |x|^{2\log_2 3} = (|x|^2)^{\log_2 3} =$
* $(x^2)^{\log_2 3} = 3^{\log_2 x^2}$.
* 2) Данное неравенство принимает вид:
* $3^{\log_2 x^2} + 2 \cdot 3^{\log_2 x^2} \leq 3 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{\log_{0,5}(2x+3)} \Leftrightarrow$
* $3 \cdot 3^{\log_2 x^2} \leq 3 \cdot (3)^{\log_2(2x+3)} \Leftrightarrow 3^{\log_2 x^2} \leq (3)^{\log_2(2x+3)} \Leftrightarrow 3 >$

1 и $\log_2 x^2 \leq \log_2(2x+3) \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 > 0, \\ x^2 \leq 2x+3 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\begin{cases} x \in (-\infty; 0) \cup (0; +\infty), \\ (x-3)(x+1) \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in (-\infty; 0) \cup (0; +\infty), \\ x \in [-1; 3] \end{cases} \Leftrightarrow$

* $x \in [-1; 0) \cup (0; 3]$.
* *Ответ*. $[-1; 0) \cup (0; 3]$.

* № 4. Решите неравенство

  * $\boldsymbol{log_{log_x 2x}(5x-2) \geq 0.}$

* *Решение.*
* 1) Преобразовываем данное уравнение
* $log_{log_x 2x}(5x-2) \geq 0 \Leftrightarrow log_{log_x 2x}(5x-2) \geq log_{log_x 2x} 1$.
* 2) Неравенство равносильно системе неравенств:

* $$\begin{cases} 5x-2>0, \\ log_x 2x>0, \\ \frac{1-(5x-2)}{log_x 2x-1} \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>0{,}4, \\ log_x 2+log_x x>0, \\ \frac{3-5x}{log_x 2+log_x x-1} \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>0{,}4, \\ log_x x^{-1}<log_x 2, \\ \frac{3-5x}{log_x 2} \leq 0. \end{cases}$$

* 3) Решаем неравенство

* $$\log_x x^{-1} < \log_x 2 \Leftrightarrow \begin{cases} x^{-1} > 0, \\ x > 0, \\ \frac{x^{-1}-2}{x-1} < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0, \\ \frac{1-2x}{x(x-1)} < 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x > 0, \\ x \in \left(0; \frac{1}{2}\right) \cup (1; +\infty) \end{cases} \Leftrightarrow x \in (0; 0{,}5) \cup (1; +\infty) \ .$$

* 4) Рассматриваем систему и решаем её

* $$\begin{cases} x > 0{,}4, \\ x \in (0; 0{,}5) \cup (1; +\infty) \end{cases} \Leftrightarrow x \in (0{,}4; 0{,}5) \cup (1; +\infty) \ .$$

* 5) Решаем неравенство $\frac{3-5x}{\log_x 2} \leq 0.$

* *а*) Если $x \in (1; +\infty)$, то $(3-5x) < 0$, следовательно,

* $\log_x 2 > 0 \Leftrightarrow \log_x 2 > \log_x 1 \Leftrightarrow$

* $\begin{cases} \frac{1-2}{x-1} < 0, \\ x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{1-x} < 0, \\ x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 - x < 0, \\ x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \in (1; +\infty)$.
* $x \in (1; +\infty)$ – решение неравенства.
* *б)* Если $x \in (0{,}4; 0{,}5)$, то $(3 - 5x) > 0$, следовательно,
* $\log_x 2 < 0 \Leftrightarrow \log_x 2 < \log_x 1 \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{2-1}{x-1} < 0, \\ x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{x-1} < 0, \\ x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow$
* $\begin{cases} x - 1 < 0, \\ x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \in (0; 1)$.

Учитывая, что рассматривали $x \in (0{,}4; 0{,}5)$, получаем $x \in (0{,}4; 0{,}5)$ – решение неравенства.

6) Получаем $\left[\begin{array}{l} x \in (1; +\infty), \\ x \in (0{,}4; 0{,}5) \end{array}\right. \Leftrightarrow x \in (0{,}4; 0{,}5) \cup (1; +\infty)$.

Ответ. $(0{,}4; 0{,}5) \cup (1; +\infty)$.

*№ 5. Решите неравенство

$$\boldsymbol{log_{8x^2-23x+15}(2x-2) \le 0} .$$

Решение.

1) Преобразовываем данное неравенство

$$log_{8x^2-23x+15}(2x-2) \le log_{8x^2-23x+15} 1$$

2) Неравенство равносильно системе неравенств:

$$\begin{cases} \dfrac{(2x-2)-1}{8x^2-23x+15-1} \le 0, \\ 2x-2>0, \\ 8x^2-23x+15>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{2x-3}{8x^2-23x+14} \le 0, \\ x>1, \\ 8(x-1)\left(x-\frac{15}{8}\right)>0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} \dfrac{2\left(x-\frac{3}{2}\right)}{8\left(x-\frac{7}{8}\right)(x-2)} \le 0, \\ x>1, \\ x \in (-\infty; 1\ ) \cup \left(\frac{15}{8}; +\infty\right) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in \left(-\infty; \frac{7}{8}\right) \cup \left[\frac{3}{2}; 2\right), \\ x>1, \\ x \in (-\infty; 1) \cup \left(\frac{15}{8}; +\infty\right) \end{cases} \Leftrightarrow$$

* $x \in \left(\frac{15}{8}; 2\right)$.
* *Ответ.* $\left(\frac{15}{8}; 2\right)$.

* № 6. Решите неравенство
  * $\boldsymbol{2\, log_{(x^2-4x+5)^2}\left(4x^2+1\right) \le log_{x^2-4x+5}\left(3x^2+4x+1\right)}$.
* *Решение.*
* 1) Преобразовываем данное неравенство
* $\frac{2}{2}\, log_{x^2-4x+5}(4x^2+1) \le log_{x^2-4x+5}(3x^2+4x+1)$
* $\Leftrightarrow log_{x^2-4x+5}(4x^2+1) \le log_{x^2-4x+5}(3x^2+4x+1)$.
* 2) Учитывая преобразования неравенства, данное неравенство равносильно системе неравенств:

* $$\begin{cases} \dfrac{(4x^2+1)-(3x^2+4x+1)}{(x^2-4x+5)-1} \le 0, \\ 4x^2+1>0, \\ 3x^2+4x+1>0, \\ x^2-4x+5>0, \\ (x^2-4x+5)^2>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{x^2-4x}{x^2-4x+4} \le 0, \\ x \in (-\infty; +\infty), \\ 3(x+1)\left(x+\frac{1}{3}\right)>0, \\ x \in (-\infty; +\infty), \\ x \in (-\infty; +\infty) \end{cases} \Leftrightarrow$$

* $$\begin{cases} \dfrac{x(x-4)}{(x-2)^2} \le 0, \\ x \in (-\infty; +\infty), \\ x \in (-\infty; -1) \cup \left(-\frac{1}{3}; +\infty\right) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in [0; 2) \cup (2; 4], \\ x \in (-\infty; -1) \cup \left(-\frac{1}{3}; +\infty\right) \end{cases}$$

* $\Leftrightarrow x \in [0; 2) \cup (2; 4]$.

* *Ответ*. $[0; 2) \cup (2; 4]$.

* № 7. Решите неравенство

* $$\log_{1,5x+1}(3x+7)\cdot\log_{1+\frac{3x}{2}}\frac{24x+56}{(3x+2)^3}\le -2\ .$$

* *Решение.*

* 1) Находим область определения данного неравенства:

* $$\begin{cases}3x+7>0,\\ 1{,}5x+1>0,\\ 1{,}5x+1\ne 1,\\ \frac{24x+56}{(3x+2)^3}>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x>-\frac{7}{3},\\ x>-\frac{2}{3},\\ x\ne 0,\\ \frac{8(3x+7)}{(3x+2)^3}>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\in\left(-\frac{2}{3};0\right)\cup(0;+\infty),\\ x\in\left(-\infty;-\frac{7}{3}\right)\cup\left(-\frac{2}{3};+\infty\right)\end{cases}$$

* $$\Leftrightarrow x\in\left(-\frac{2}{3};0\right)\cup(0;+\infty)\ .$$

* 2) Преобразовываем данное неравенство
* $log_{1,5x+1}(3x+7)\cdot\left(log_{1+1,5x}(24x+56)-log_{1+1,5x}(3x+2)^3\right)+2\le 0$

* $\Leftrightarrow log_{1,5x+1}(3x+7)\cdot\left(log_{1+1,5x}(8(3x+7))-log_{1+1,5x}\left(2(1,5x+1)\right)^3\right)+2\le 0$
* $\Leftrightarrow log_{1,5x+1}(3x+7)\cdot\left(log_{1+1,5x}8+log_{1+1,5x}(3x+7)-log_{1+1,5x}(8(1,5x+1)^3)\right)+2\le 0 \Leftrightarrow$
* $log_{1,5x+1}(3x+7)\cdot\left(log_{1+1,5x}(3x+7)-log_{1+1,5x}(1,5x+1)^3\right)+2\le 0 \Leftrightarrow$
* $log_{1,5x+1}(3x+7)\cdot\left(log_{1+1,5x}(3x+7)-3\right)+2\le 0 \Leftrightarrow$
* $\left(log_{1,5x+1}(3x+7)\right)^2-3\,log_{1+1,5x}(3x+7)+2\le 0$.
* 3) Применяем метод замены переменной.
* Пусть $log_{1,5x+1}(3x+7)=a$, тогда неравенство можно
* представить в виде:
* $a^2-3a+2\le 0 \Leftrightarrow (a-1)(a-2)\le 0 \Leftrightarrow a\in[1;2]$.
* 4) Выполним обратную замену:
* $1\le log_{1,5x+1}(3x+7)\le 2 \Leftrightarrow$

* $\begin{cases} log_{1,5x+1}(3x+7) \geq 1, \\ log_{1,5x+1}(3x+7) \leq 2. \end{cases}$

* 5) Решаем неравенство $log_{1,5x+1}(3x+7) \geq 1$

* $\Leftrightarrow log_{1,5x+1}(3x+7) \geq log_{1,5x+1}(1,5x+1) \Leftrightarrow$

* $\begin{cases} \frac{1,5x+1-(3x+7)}{1,5x+1-1} \leq 0, \\ 1,5x+1 > 0, \\ 3x+7 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{-1,5x-6}{1,5x} \leq 0, \\ x > -\frac{2}{3}, \\ x > -\frac{7}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{-1,5(x+4)}{1,5x} \leq 0, \\ x > -\frac{2}{3} \end{cases} \Leftrightarrow$

* $\begin{cases} \frac{x+4}{x} \geq 0, \\ x > -\frac{2}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in (-\infty; -4] \cup (0; +\infty), \\ x > -\frac{2}{3} \end{cases} \Leftrightarrow x \in (0; +\infty)$.

* 6) Решаем неравенство $log_{1,5x+1}(3x+7) \le 2$

$$\Leftrightarrow log_{1,5x+1}(3x+7) \le log_{1,5x+1}(1,5x+1)^2 \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} \frac{(3x+7)-(1,5x+1)^2}{1,5x+1-1} \le 0, \\ 3x+7>0, \\ 1,5x+1>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{3x+7-2,25x^2-3x-1}{1,5x} \le 0, \\ x > -\frac{7}{3}, \\ x > -\frac{2}{3} \end{cases} \Leftrightarrow$$

* $$\begin{cases} \frac{-2,25x^2+6}{1,5x} \le 0, \\ x > -\frac{2}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{-1,5(1,5x^2-4)}{1,5x} \le 0, \\ x > -\frac{2}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1,5x^2-4}{x} \ge 0, \\ x > -\frac{2}{3} \end{cases} \Leftrightarrow$$

* $$\begin{cases} \frac{1,5\left(x+\frac{2\sqrt{6}}{3}\right)\left(x-\frac{2\sqrt{6}}{3}\right)}{x} \ge 0, \\ x > -\frac{2}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in \left[-\frac{2\sqrt{6}}{3}; 0\right) \cup \left[\frac{2\sqrt{6}}{3}; +\infty\right), \\ x > -\frac{2}{3} \end{cases} \Leftrightarrow$$

* $x \in \left[\frac{2\sqrt{6}}{3}; +\infty\right)$.

* 7) Получаем систему неравенств $\begin{cases} x \in (0; +\infty), \\ x \in \left[\frac{2\sqrt{6}}{3}; +\infty\right) \end{cases} \Leftrightarrow$

* $x \in \left[\frac{2\sqrt{6}}{3}; +\infty\right)$.

* *Ответ.* $\left[\frac{2\sqrt{6}}{3}; +\infty\right)$.