A bright yellow sticky note is partially visible on the left side of the image, overlapping the white card.

Математическое моделирование

Основные положения
Погрешности измерений

ОСНОВНЫЕ ПОЛОЖЕНИЯ

Наука — сфера человеческой деятельности, направленной на выработку и систематизацию достоверных знаний о действительности [1].

Цель научного исследования — выявление новых закономерностей того или иного процесса (получение неизвестных до этого зависимостей между величинами, характеризующие исследуемый процесс), в конечном итоге - получение новых знаний о действительности.

ОСНОВНЫЕ ПОЛОЖЕНИЯ

Как получить достоверные знания?

- *пассивно-созерцательная теория Дидро [2] (главное это ощущения);*
- *идеализм Гегеля (истина существует сама по себе - высший разум, космос);*
- *агностицизм Д. Юма и И. Канта (замена знания верой);*
- *скептицизм (наши чувства нас обманывают и доверять им нельзя. Рассказывают шутливую историю о Пирроне. Когда он умер, на его могиле, якобы, его оппоненты поставили эпитафию: «Умер ли ты, Пиррон? - "Не знаю!"»*
- *Известная фраза Рене Декарта - **Cogito, ergo sum** (я мыслю, значит я существую)*

Основные положения

Настоящая революция в методологии научных исследований произошла лишь тогда, когда роль критерия истинности знания безоговорочно была отдана *практике*.

Можно выделить три основных этапа познания:

- *сбор эмпирической информации об объекте исследования;*
- *систематизация и анализ информации, разработка теории;*
- *проверка теории на практике.*

Достоверными могут считаться лишь знания, которые *подтверждаются практикой*.

Эксперимент

Эксперимент может проводиться с *целью*:

— определить, какие величины и насколько влияют на исследуемый объект (процесс) — такой эксперимент называется *отсеивающим*;

— *установить зависимости* между входными и выходными величинами, характеризующими исследуемый объект (процесс) — такие зависимости называются *эмпирическими*;

— *проверить* (подтвердить или опровергнуть) результаты теоретических исследований — установить *адекватность* (соответствие) теоретических положений и моделей действительности;

— выполнить *оптимизацию* исследуемого объекта (процесса), т.е. найти такие значения параметров, при которых объект функционирует наилучшим образом.

Эксперимент

Теория эксперимента — наука, занимающаяся вопросами правильной организации экспериментальных исследований — включает три основных направления:

1. *Моделирование и подобие* — определяет, как должен проводиться эксперимент, какие величины, характеризующие исследуемый объект или процесс, должны измеряться при экспериментальных исследованиях, и как обрабатывать результаты исследований, чтобы полученные закономерности были справедливы как для данного объекта (процесса), так и для группы ему подобных.

2. *Планирование эксперимента* — совокупность методов и процедур, применение которых при организации и проведении эксперимента позволяет получить искомые зависимости с минимальными временными и материальными затратами.

3. *Статистическая обработка* экспериментальных данных — совокупность методик, позволяющих получить достоверные результаты на основе данных, содержащих погрешности.

Эксперимент

Исследование машины или процесса начинается с разработки физической модели, а затем, на ее основании, строится математическая модель.

Производится решение математической модели и анализ полученных результатов.

Проверяется адекватность, т.е. соответствие этой модели действительной картине процесса.

Физическая модель процесса или системы представляет собой ее абстрагированное символическое описание.

Для примера рассмотрим на рис. 1 МАТЕМАТИЧЕСКИЙ МАЯТНИК (тело небольших размеров, подвешенное на тонкой нерастяжимой нити, масса которой пренебрежимо мала по сравнению с массой тела).

Эксперимент

Математическая модель процесса представляет собой аналитическое описание связей между отдельными элементами физической модели.

В положении равновесия, когда маятник висит по отвесу, сила тяжести уравнивается силой натяжения нити. При отклонении маятника из положения равновесия на некоторый угол φ появляется касательная составляющая силы тяжести $F_{\tau} = -mg \sin \varphi$ (рис. 1).

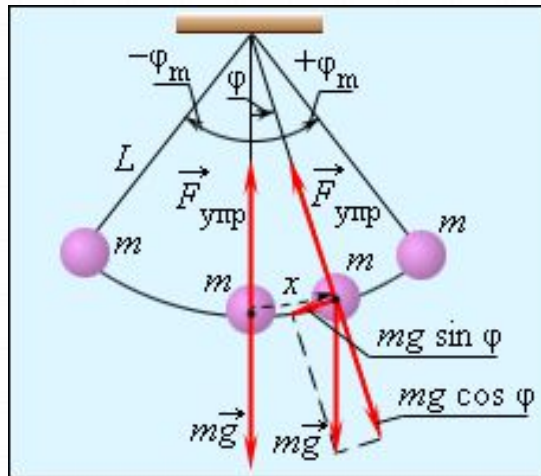


Рисунок 1.

Математический маятник. φ –
угловое отклонение маятника
от положения равновесия, $x = l\varphi$
– смещение маятника по дуге

Эксперимент

0 Если обозначить через x линейное смещение маятника от положения равновесия по дуге окружности радиуса l , то его угловое смещение будет равно $\varphi = x / l$. Второй закон Ньютона, записанный для проекций векторов ускорения и силы на направление касательной, дает:

$$ma_{\tau} = -mg \sin \frac{x}{l}$$

В случае *малых колебаний*, когда приближенно $\sin \frac{x}{l}$ можно заменить на $\frac{x}{l}$, математический маятник является **гармоническим осциллятором**, т. е. системой, способной совершать гармонические колебания. Практически такое приближение справедливо для углов порядка $15-20^{\circ}$; при этом величина отличается от не более чем на 2 %.

Колебания маятника при больших амплитудах не являются гармоническими.

Эксперимент

0 Для малых колебаний математического маятника второй закон Ньютона записывается в виде

$$ma_{\tau} = -mg \frac{x}{l}$$

Таким образом, тангенциальное ускорение a_{τ} маятника пропорционально его смещению x , взятому с обратным знаком. Это как раз то условие, при котором система является гармоническим осциллятором. По общему правилу для всех систем, способных совершать свободные гармонические колебания, модуль коэффициента пропорциональности между ускорением и смещением из положения равновесия равен квадрату круговой частоты:

$$\omega_0^2 = \frac{g}{l}, \omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}$$

Эксперимент

0 Эта формула выражает *собственную частоту малых колебаний математического маятника*.

Следовательно,

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$$

Для проверки адекватности модели, можно провести натурный эксперимент замера периода колебаний и сравнить известное значение постоянной ускорения свободного падения с полученными данными.

$$g = l \left(\frac{2\pi}{T} \right)^2$$

Практическое занятие №1

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПРЕДЕЛЬНОЙ ОТНОСИТЕЛЬНОЙ ОШИБКИ ФУНКЦИИ

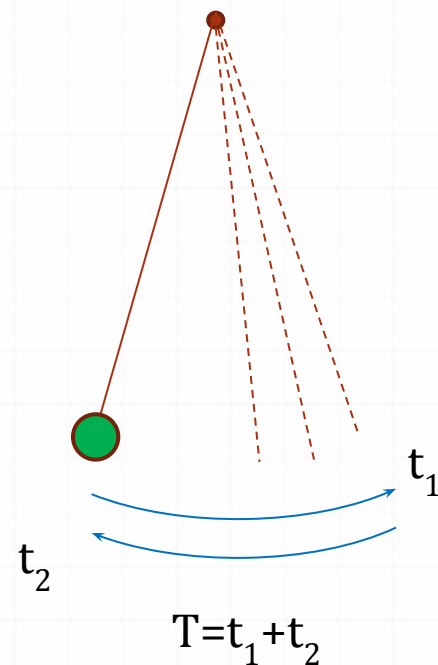
Для выполнения работы используются:

1. Измерительная линейка с пределом измерений до 1000 мм, с допустимой инструментальной погрешностью 0,2 мм.
2. Электронный секундомер с ценой деления 0,01 с. Инструментальная погрешность секундомера мала и ее можно не учитывать при измерениях.

Практическое занятие №1

маятник №1

Примем длину нити маятника около 500 мм. Отклонив маятник на угол 15-20 градусов от положения равновесия, отпустим его и, по прошествии нескольких колебаний, в момент прохождения маятником крайнего положения включим секундомер. Остановим его при прохождении того же крайнего положения. Указанные измерения провести $n = 50$ раз, данные занести в таблицу 1. Вычисления производить в электронной таблице *Microsoft Office Excel*.



Практическое занятие №1

маятник №1

Таблица 1 Результаты 50 измерений

Маятник №1, $l=500$ мм			
i	t_i , с	$t_i - t_{cp}$	$(t_i - t_{cp})^2$
1			
2			
...			
50			
n	t_{cp}		Σ

Практическое занятие №1

маятник №2

Уменьшите длину маятника до 450 мм. Провести измерения *один раз*.

Таблица 2 Результаты 1 измерения

Маятник №2, $l=450$ мм	
i	t_p , с
1	

Практическое занятие №1

маятник №3

Уменьшите длину маятника до 400 мм. Провести измерения *пять* раз.

Таблица 3 Результаты 5 измерений

Маятник №3, $l=400$ мм			
i	t_i , с	$t_i - t_{cp}$	$(t_i - t_{cp})^2$
1			
2			
...			
5			
n	t_{cp}		Σ

Практическое занятие №1

маятник №4

Уменьшите длину маятника до 350 мм. Провести измерения *пятнадцать* раз.

Таблица 4 Результаты 15 измерений

Маятник №4, $l=350$ мм			
i	$t_i, \text{с}$	$t_i - t_{\text{cp}}$	$(t_i - t_{\text{cp}})^2$
1			
2			
...			
15			
n	t_{cp}		Σ

Погрешности результатов измерений

0 Результаты опытов обычно не являются точными. По различным причинам результаты любых двух параллельных опытов отличаются друг от друга, за исключением случайных совпадений.

Под точностью эксперимента понимают близость полученных результатов к истинному значению искомой величины. Точность эксперимента тем выше, чем меньше его погрешность.

Абсолютная погрешность – это разность Δ между результатом эксперимента x и истинным значением искомой величины x^* :

$$\Delta = |x - x^*|$$

Погрешности результатов измерений

0 Относительная погрешность

$$\Delta^* = \frac{|x - x^*|}{x^*} 100 \% = \frac{\Delta}{x^*} 100 \%$$

Следует заметить, что истинное значение величины, определяемой в результате эксперимента, всегда остается неизвестным, поэтому и погрешности эксперимента могут быть оценены лишь приближенно.

При проведении эксперимента его погрешности принято условно разделять на систематические, случайные и грубые (промахи).

Погрешности результатов измерений

Систематической называется погрешность, которая при повторных экспериментах остается постоянной или изменяется закономерно. Наличие систематических погрешностей может быть обнаружено путем анализа условий измерения одного и того же значения измеряемой величины разными методами или приборами. **Систематические погрешности нельзя уменьшить увеличением числа параллельных опытов. Должны устраняться вызывающие их причины.** Общим методом выявления причин систематических погрешностей является калибровка (поверка), которая представляет собой поверку прибора во всем диапазоне измеряемой величины с помощью известного эталона.

Погрешности результатов измерений

Случайной называется погрешность, обусловленная действием ряда причин, меняющихся случайным образом от эксперимента к эксперименту. Значение этой погрешности не может быть определено в каждом эксперименте и на нее невозможно оказать влияние. К случайным относятся непостоянные погрешности, причины возникновения которых неизвестны. Таким образом, **случайные погрешности представляют собой беспорядочные флуктуации показаний прибора относительно истинного значения измеряемой величины.** Для исследования случайных погрешностей, возникающих при проведении эксперимента, широко используются математическая статистика и теория вероятностей.

Погрешности результатов измерений

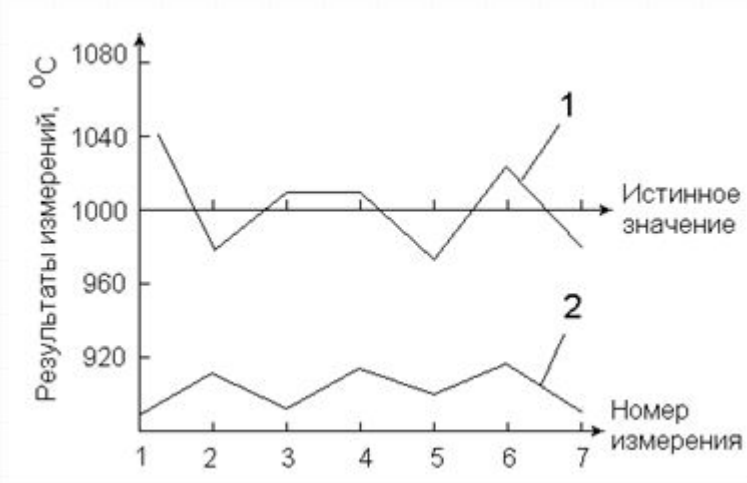


Рис. Пример данных, иллюстрирующий различие между случайной и систематическими погрешностями: 1 – измерения характеризуются наличием случайной погрешности; 2 – измерения характеризуются наличием систематической погрешности.

Погрешности результатов измерений

инструментальные (приборные или аппаратурные) погрешности средств измерений называются такие, которые принадлежат данному средству измерений, они могут быть определены при его испытаниях и занесены в его паспорт. Принято различать основную погрешность средств измерений, т.е. погрешность в условиях, принятых за нормальные, и дополнительную погрешность, вызванную отклонением влияющих параметров за пределы области нормальных значений (вибрации, влажности среды, инерцией и т.п.);

Погрешности результатов измерений

методические погрешности – это погрешности, которые не могут быть приписаны данному прибору, не смогут быть указаны в его паспорте, т.е. связаны не с самим прибором, а с методикой проведения измерений. Очень часто причиной возникновения методической погрешности является то, что организуя измерения, измеряют или вынуждены измерять не ту величину, которую в принципе требуется измерять, а некоторую другую, близкую, но не равную ей.

Отличительной особенностью методических погрешностей является то, что они могут быть определены лишь путем создания математической модели исследуемого объекта и не смогут быть найдены сколь угодно тщательным исследованием лишь самого измерительного прибора.

Погрешности результатов измерений

субъективные погрешности, обусловленные особенностями исследователя.

Следует иметь в виду, что полностью исключить систематические погрешности невозможно, так как методы и средства, с помощью которых обнаруживаются и оцениваются систематические погрешности, сами имеют свои погрешности.

Грубые погрешности (промахи) возникают вследствие непредвиденного изменения условий эксперимента, качества измерений, поломок прибора, неправильной записи в рабочих журналах, механических ударах прибора, неправильном отчете показаний прибора, отключении источника питания и т.п. Результат, содержащий грубую ошибку, резко отличается по величине от остальных измерений. Такие результаты должны быть исключены из рассмотрения до математической обработки результатов эксперимента.

Законы распределения вероятностей случайных величин

Случайные величины бывают *дискретными* и *непрерывными*.

Дискретные величины способны принимать лишь ограниченное число значений, известных заранее, например количество успешных опытов или каких-либо объектов, выражаемое целым числом, лежащем в заданном интервале.

Непрерывные величины могут принимать любое значение в некотором интервале. В большинстве случаев результаты опытов являются непрерывными случайными величинами.

Предположим, какая-либо случайная величина измеряется бесконечное число раз. Полученное в результате множество, которое содержит в себе *любые значения* величины, которые можно получить при реальном эксперименте, называется *гипотетической генеральной совокупностью*.

Законы распределения вероятностей случайных величин

Исследователь при постановке опытов делает конечное, обычно небольшое, количество измерений. Их можно рассматривать как *случайную выборку* из гипотетической генеральной совокупности.

Задача обработки сводится к определению по данным выборки показателей, оценивающих параметры генеральной совокупности.

Для правильного решения этой задачи необходимо знать *закон распределения вероятностей случайной величины* — зависимость, связывающую значения случайной величины и вероятность появления этих значений.

Законы распределения вероятностей случайных величин

Для *дискретных случайных величин* закон распределения вероятностей может быть задан:

1. В *табличной форме*:

Значение величины X	x_1	x_2	x_3	...	x_i	...	x_n
Вероятность	P_1	P_2	P_3	...	P_i	...	P_n

где x_i – значения случайной величины X (заглавными литерами принято обозначать сами случайные величины, а прописными — их значения); P_i – вероятность, с которой случайная величина примет соответствующее значение.

Законы распределения вероятностей случайных величин

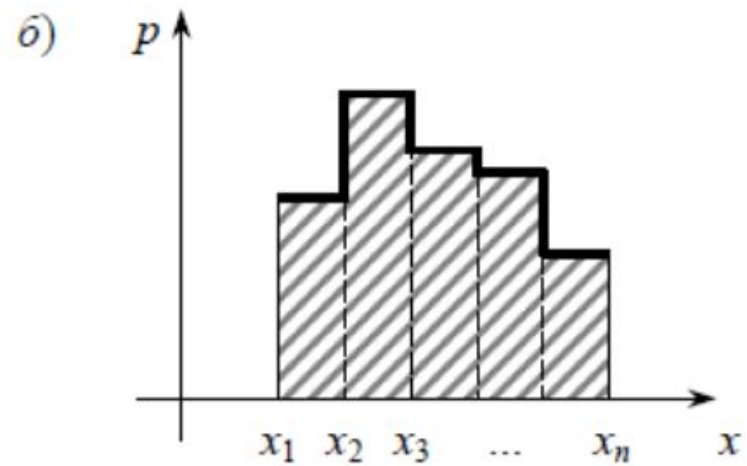
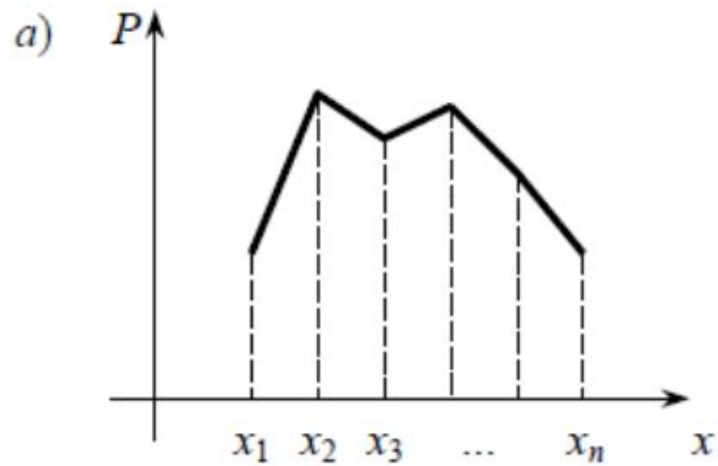
2. В *графической форме* — в виде полигона распределения вероятностей или гистограммы. Отличие заключается в том, что в полигоне по оси ординат откладывается вероятность P_i , а в гистограмме — *плотность распределения вероятностей* — отношение вероятности к величине интервала Δx между значениями:

$$p_i = P_i / \Delta x$$

Тогда вероятность $P_i = p_i \Delta x$ есть площадь соответствующего столбца.

3. В *аналитической форме* — в виде некоторой функции, отражающей зависимость вероятности от значения случайной величины.

Полигон и гистограмма



Практическое занятие №1

Построить полигон распределения времени колебаний для маятника № 1.

Для этого в таблице *Excel* скопировать столбец с t_i и сделать его сортировку по-возрастанию. Определить границы полигона по наименьшему и наибольшему значению периода колебаний, округляя их до 0,5 с. Сформировать новый столбец с шагом 0,5 с и в соседние столбцы записать середины интервалов и количество попаданий текущего периода колебаний в каждый интервал (пример табл.).

Практическое занятие №1

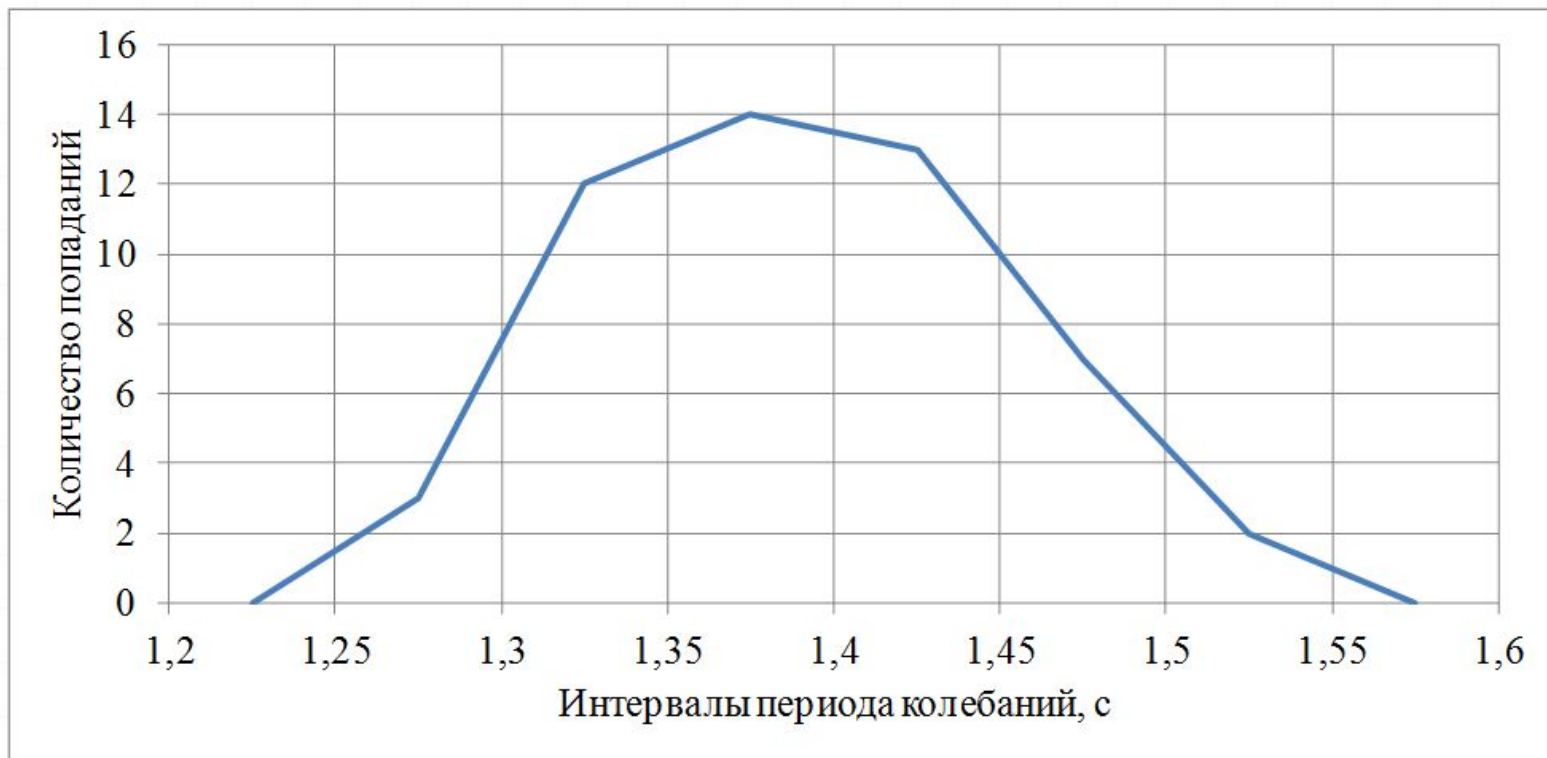
Таблица Построение полигона распределения времени колебаний маятника

Интервал, с	Середины интервалов, с	Число попаданий
1,2	1,225	0
1,25	1,275	3
1,3	1,325	12
1,35	1,375	14
1,4	1,425	13
1,45	1,475	7
1,5	1,525	2
1,55	1,575	0

В случае, когда t_i совпадает с границами интервалов, распределить их поровну между ними.

Практическое занятие №1

Построить точечную ломаную диаграмму - полигон



Список литературы

1. Бойко Н. Г. Основы научных исследований. Курс лекций //Н. Г. Бойко, О. В. Федоров - Донецк : ДонНТУ, 2007. – 76 с.
2. Философия о познаваемости мира, человека и его бытия. Код доступа:
<http://poisk-istini.com/literatura/osnovy-filosofii-strjukovskij/filosofiya-o-poznavaemosti-mira-cheloveka-i-ego-bitiya>
3. Открытый колледж. Физика. Код доступа:
<https://physics.ru/>