ЭКОНОМЕТРИКА

Временные ряды

Элементы временного ряда

- $$\{y_1, y_2, \dots, y_n\} = \{y_t | t = \overline{1, \dots, n}\}$$

Регулярные (систематические) компоненты ВР:

- U_t – тренд (основная тенденция ряда)
- V_t – сезонная компонента
- C_t – циклическая компонента

Случайная (нерегулярная) компонента ВР:

- ε_t – остаточная компонента

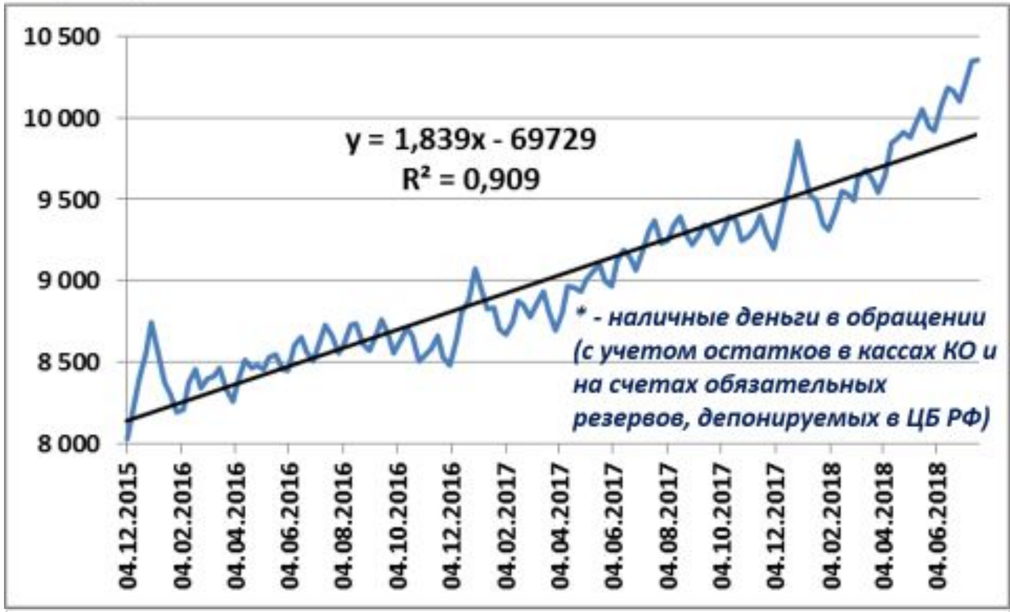
Временной ряд с аддитивной структурой:

$$y_t = U_t + V_t + C_t + \varepsilon_t$$

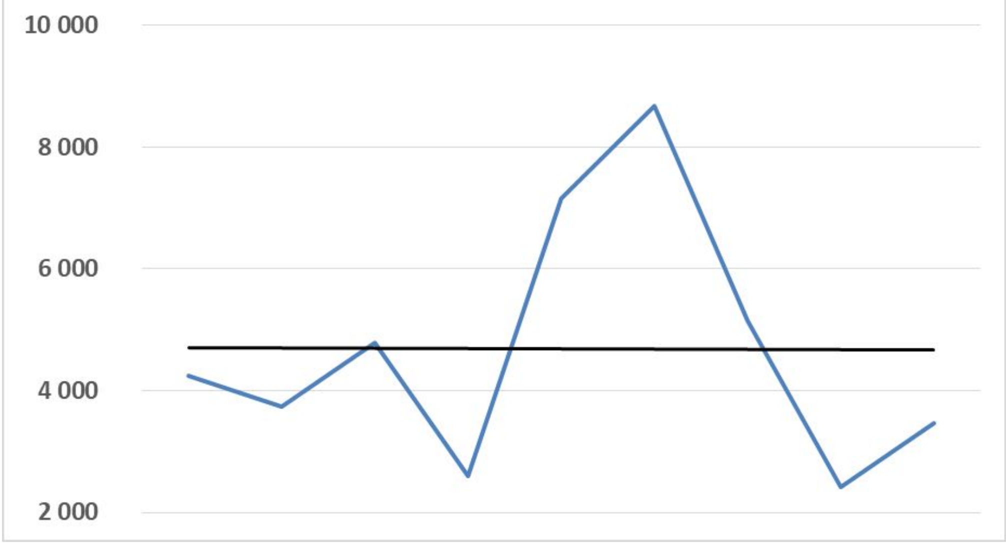
Примеры ВР:

- **Денежная база – ВР с четко выраженной тенденцией роста, сезонными и циклическими колебаниями**
- **Объем долговых ценных бумаг – отсутствие тенденции во временном ряду**

Денежная база, млрд. руб.*
(по данным ЦБ РФ, с 04.12.2015 по 20.07.2018)



Объем долговых ценных бумаг в собственности российских банков, переданных по сделкам РЕПО с Банком России с 01.12.2017 по 01.08.2018), млн.руб.



Предварительный анализ ВР

- **Выявление и устранение аномалий**
- **Аномальным считается уровень ряда, не отвечающий потенциальным возможностям исследуемой системы (процесса)**
  - **аномалии (ошибки) I рода – технические ошибки, сбои в программе и т.д. (подлежат устранению)**
  - **ошибки II рода – неустранимые**
- **Проверка гипотезы о наличии (отсутствии) тренда (тенденции) в целом**
- **Предварительный анализ проводится как графическим, так и аналитическим**

Выявление аномалий: метод Ирвина

- **Значения статистики Ирвина:**

$$\lambda_t = \frac{|y_t - y_{t-1}|}{\sigma_y}, t = 1, \dots, n, \text{ где}$$

$$\sigma_y = \sqrt{\frac{\sum_{t=1}^{n}(y_t - \overline{y})^2}{n-1}}, \overline{y} = \frac{\sum_{t=1}^{n} y_t}{n}$$

- **Сравнение с критическим значением (*α=0,05*):**

n	2	3	10	20	30	50	100
$\lambda_{крит.}$	2,8	2,3	1,5	1,3	1,2	1,1	1,0

- **Определение аномальных уровней**

Пример: динамика цен на целлюлозу

Дата	Цена, долл. США/т	λ_t
13.03.01	638,36	
20.03.01	632,16	0,2243
27.03.01	624,90	0,2626
03.04.01	618,40	0,2351
10.04.01	601,00	0,6295
17.04.01	586,50	0,5245
24.04.01	580,40	0,2207
01.05.01	578,00	0,0868
08.05.01	572,00	0,2171
15.05.01	560,20	0,4269

- **Для n = 10 и α = 0,05 критическое значение λ = 1,5**
- **Согласно критерию Ирвина на уровне значимости α = 0,05 во временном ряду аномалий нет**
- **Проверим ВР на наличие**

Проверка равенства дисперсий

- **ВР разбивается на две части**
- **Проверяется статистическая гипотеза о равенстве дисперсий:** $\boldsymbol{F = \frac{\sigma_i^2}{\sigma_j^2}}$, где $\boldsymbol{\sigma_i > \sigma_j;\ i,j = 1,2}$

	Переменная 1	*Переменная 2*
Среднее	*622,964*	*575,42*
Дисперсия	*207,14968*	*99,392*
Наблюдения	*5*	*5*
Df	*4*	*4*
F	***2,084168545***	
P(F<=f) одностороннее	*0,2472144*	
F критическое одностороннее	***6,388233942***	

- **Значение статистики Фишера *F* = 2,084 < 6,388, поэтому нет оснований отвергать гипотезу о равенстве дисперсий**

Проверка разности средних уровней ВР

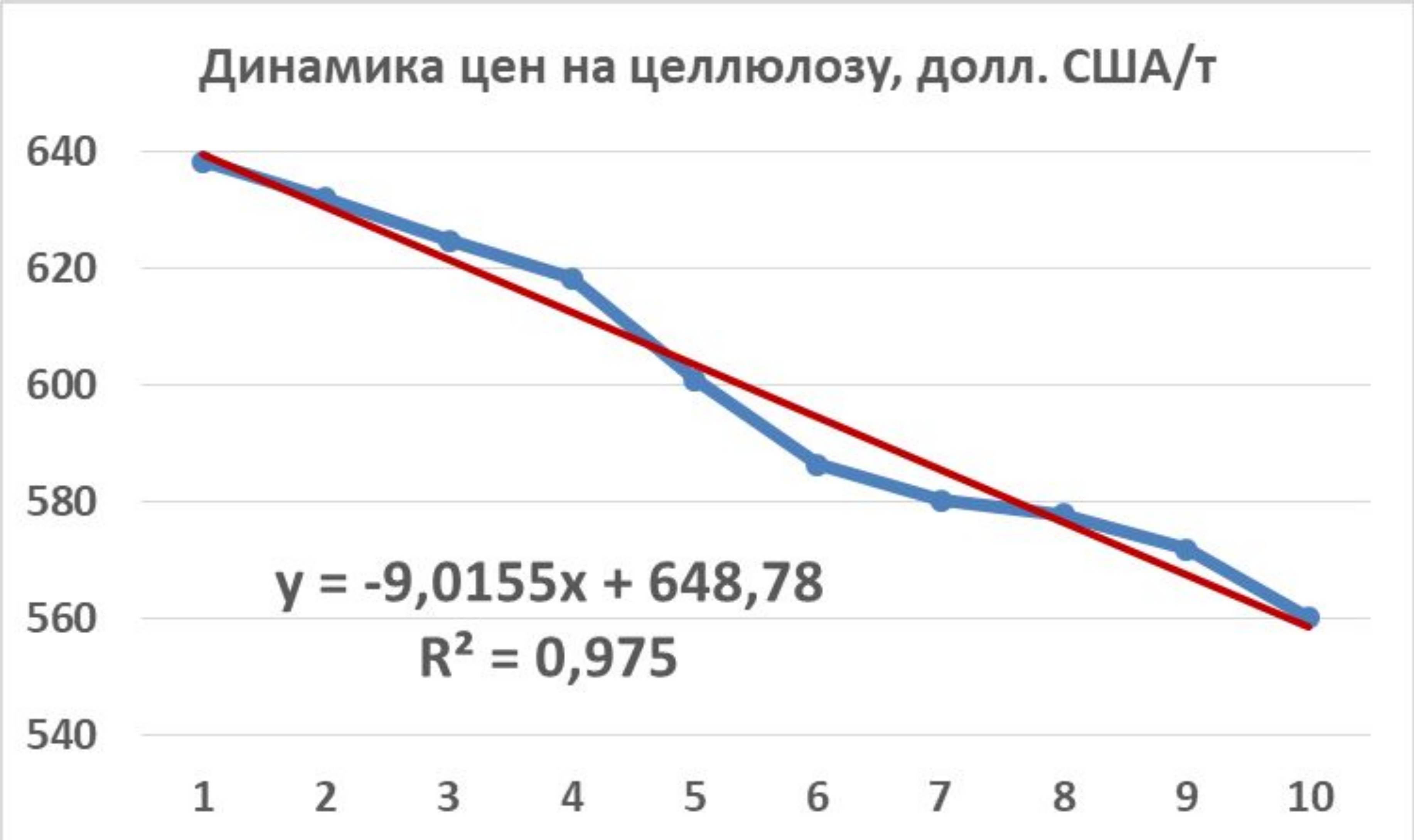
- **Значение статистики Стьюдента:**

$$t = \frac{|\bar{y}_1 - \bar{y}_2|}{\sigma \cdot \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}}, \text{где } \sigma = \sqrt{\frac{(n_1 - 1) \cdot \sigma_1^2 + (n_2 - 1) \cdot \sigma_2^2}{n - 2}}$$

	Переменная 1	*Переменная 2*
Среднее	*622,964*	*575,42*
Дисперсия	*207,14968*	*99,392*
Наблюдения	*5*	*5*
Объединенная дисперсия	*153,27084*	
Гипотетическая разность средних	*0*	
Df	*8*	
t-статистика	***6,072058581***	
P(T<=t) одностороннее	*0,000149268*	
t критическое одностороннее	*1,85954832*	
P(T<=t) двухстороннее	*0,000298537*	
t критическое двухстороннее	***2,306005626***	

- **Гипотеза о равенстве средних отвергается, т.к. t = 6,072 > 2,306**
- **Есть тенденция в среднем (тренд)**

Линейный тренд ВР



Прогнозирование

- Расчет $\widehat{y}_{t+L}$, где L – период упреждения
- Стандартная ошибка показателя:

$$S = \sqrt{\frac{\sum_{t=1}^{n} \varepsilon_t^2}{n-k}}, k \ - \text{число параметров}$$

- Доверительный интервал прогноза (для линейного тренда):

$$\widehat{y}_{n+L} \pm t_\alpha \cdot S \cdot \sqrt{1 + \frac{1}{n} + \frac{3 \cdot (n + 2L - 1)^2}{n(n^2 - 1)}}$$

В нашем примере:

- $\hat{y}_{11} = 549,61; S = 4,633$
- Прогнозный интервал: $549,61 \pm 7,84$, т.е. от 541,77 до 557,45 долл. США/т
- Фактическое значение показателя в прогнозируемом периоде составило 545,20 долл. США/т, что попадает в доверительный интервал.
- Таким образом, полученный прогноз может быть верифицирован

Метод характеристик прироста

- Предварительное сглаживание кривой методом простой скользящей средней
- Первые средние приросты:

$$\bar{u}_t = \frac{y_{t+1} - y_{t-1}}{2}, t = 2, \dots, n-1$$

- Вторые средние приросты:

$$\overline{u_t^{(2)}} = \frac{\bar{u}_{t+1} - \bar{u}_{t-1}}{2}, t = 3, \dots, n-2$$

- Вспомогательные величины:

$$\frac{\bar{u}_t}{y_t}, log\bar{u}_t, log\frac{\bar{u}_t}{y_t}, log\frac{\bar{u}_t}{y_t^2}$$

Какую кривую выбрать?

Показатель	Характер изменения	Вид кривой
	Постоянный	Прямая
	Линейный	Квадратичная парабола
	Линейный	Кубическая парабола
	Постоянный	Простая экспонента
	Линейный	Модифицированная экспонента
	Линейный	Кривая Гомперца
	Линейный	Логистическая кривая

Примеры *S*-образных кривых

- Модель роста населения Швеции с 1850 по 1950 гг.* (Г. Тинтнер, 1965 г.):

$$y = \frac{10328806}{1 + 2,117 \cdot e^{-0,14t}}$$

(логистическая кривая)

* - в 2005 г. численность населения Швеции составила 9 млн. чел.

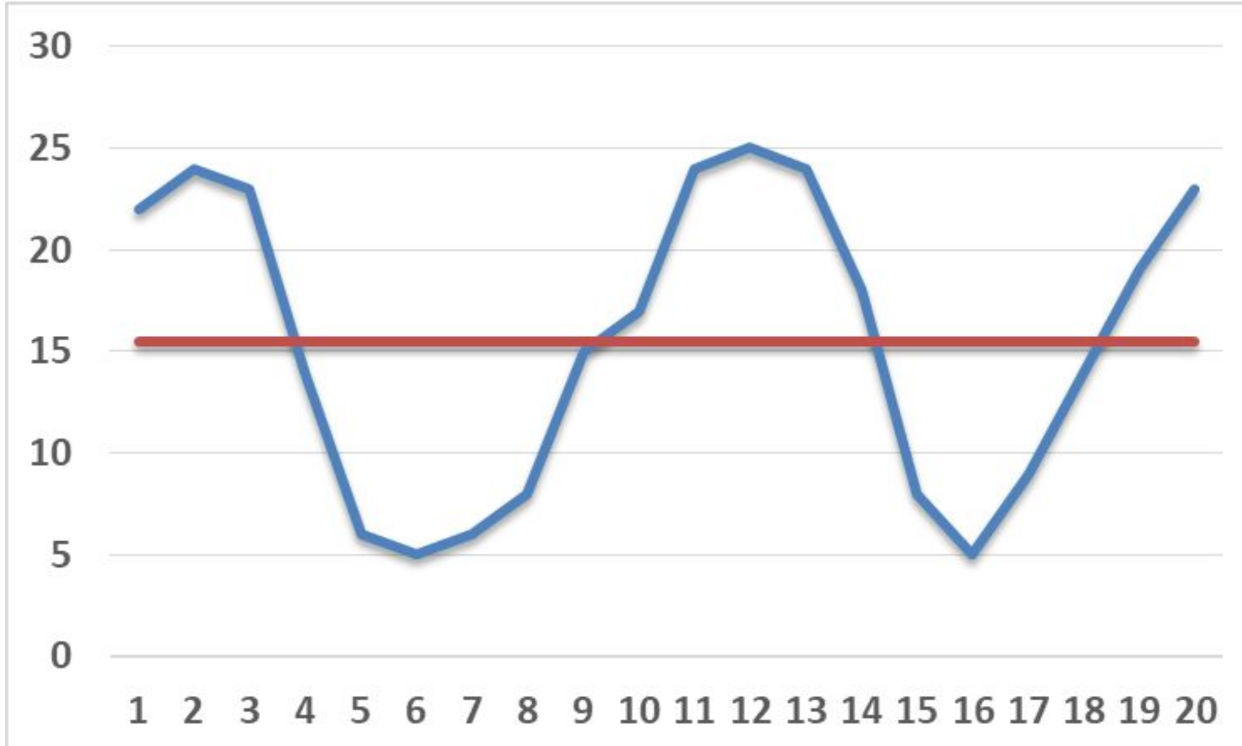
- Затраты на строительство автомобильных дорог (К. Льюис, 1986 г.):

$$y = 4644,5 \cdot 0,0961435^{0,93176^{t}}$$

(кривая Гомперца)

Периодические колебания

№ месяца	Объем пр-ва
1	22
2	24
3	23
4	14
5	6
6	5
7	6
8	8
9	15
10	17
11	24
12	25
13	24
14	18
15	8
16	5
17	9
18	14
19	19
20	23



- **Стационарный динамический ряд (тенденция отсутствует)**

$$N = 20;\ \bar{y} = 15,45;\ \sigma_y^2 = 52,1475$$

$$y_t = \bar{y} + A\cos W(t - \Phi)$$, где A – амплитуда,

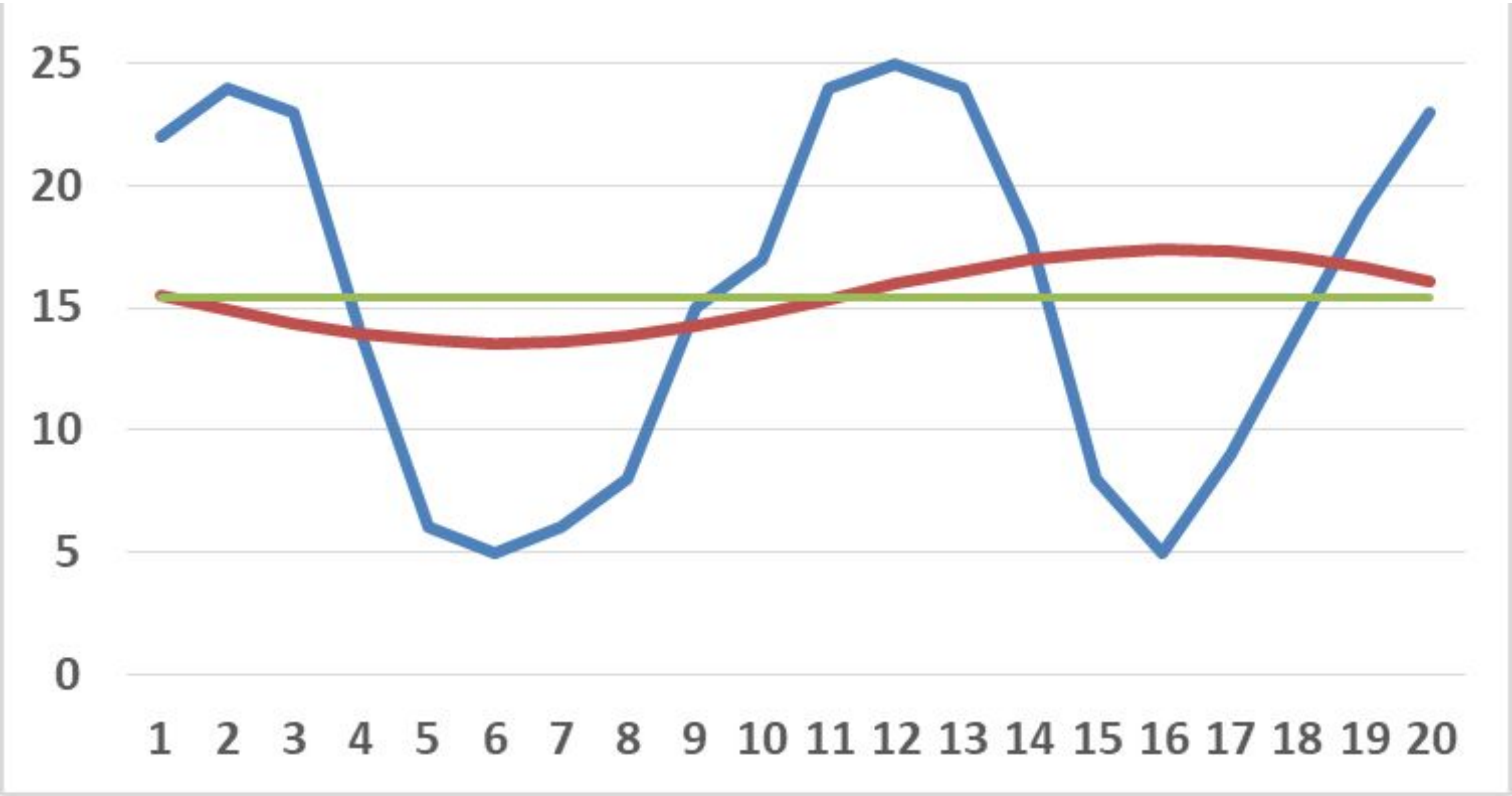
$$W = \frac{2\pi}{P}$$ - угловая частота, Φ - фаза

k	Уравнение с k гармониками
1	
2	
3	
4	

Уравнение с одной гармоникой:

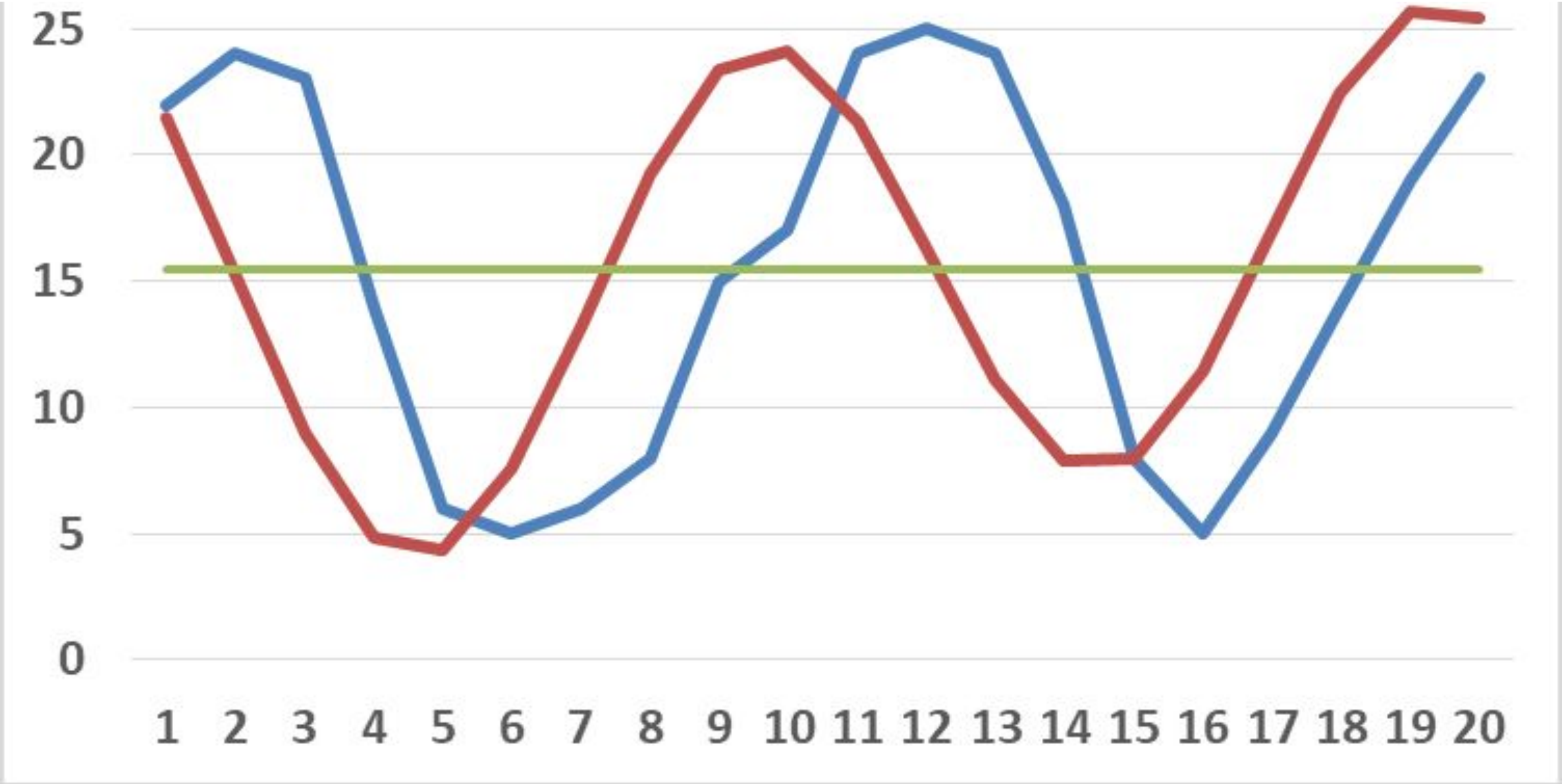
$$y_t = 15,45 + 0,6667 \cdot \cos\theta - 1,7948 \cdot \sin\theta$$

$$\theta = \frac{2\pi}{20}(t-1), R^2 = 0,0351$$



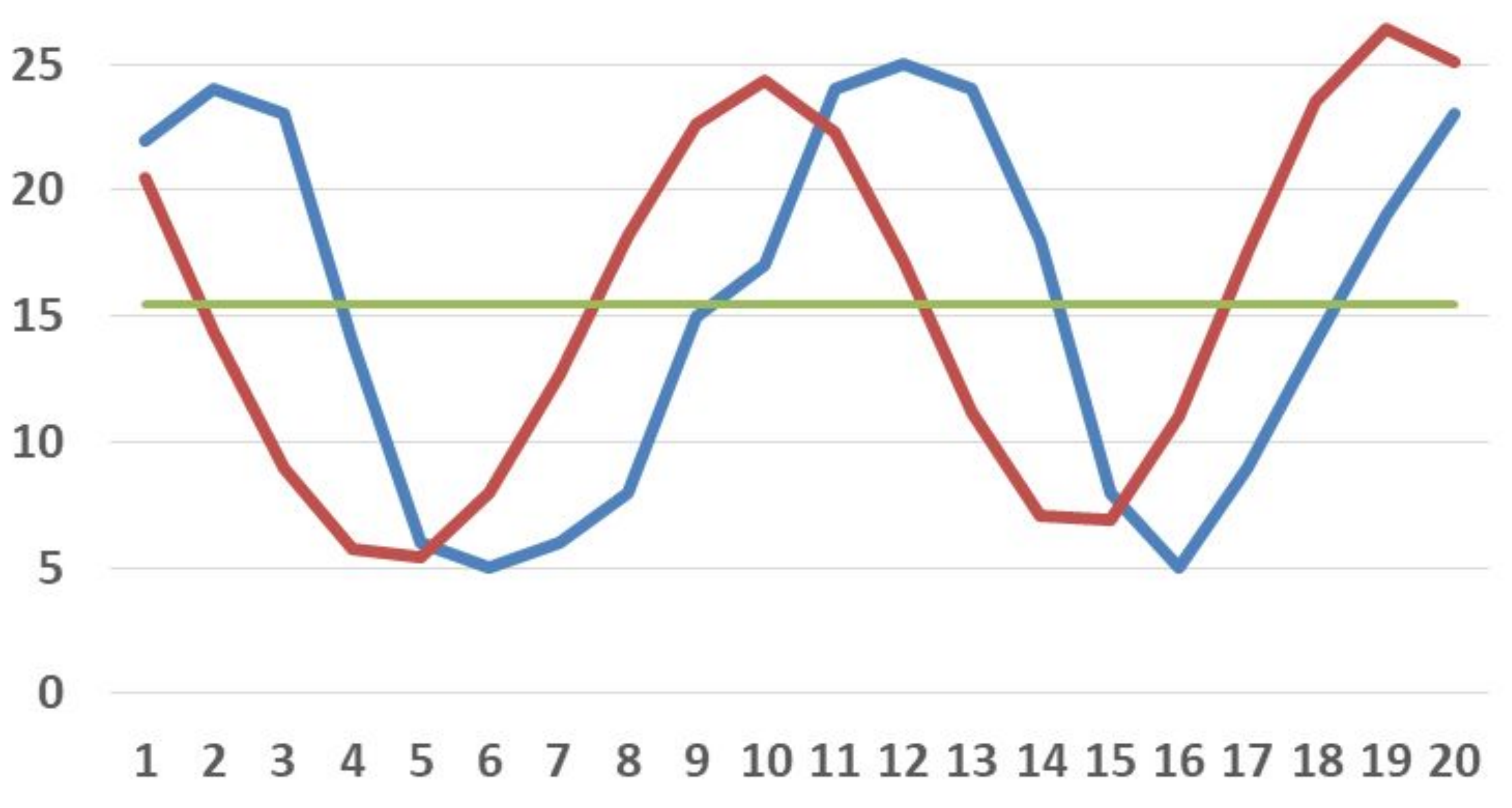
Уравнение с двумя гармониками:

$$y_t = 15,45 + 0,6667 \cdot \cos\theta - 1,7948 \cdot \sin\theta +$$
$$+9,2883 \cdot \cos 2\theta - 2,6577 \cdot \sin 2\theta$$
$$R^2 = 0,930$$



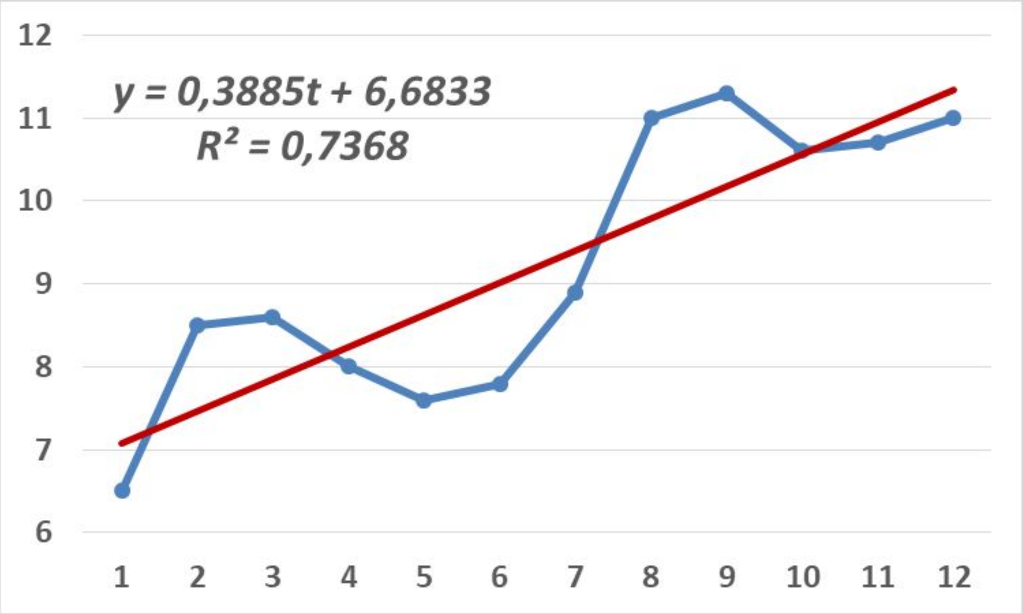
Уравнение с тремя гармониками:

$$y_t = 15,45 + 0,6667 \cdot \cos\theta - 1,7948 \cdot \sin\theta +$$
$$+9,2883 \cdot \cos 2\theta - 2,6577 \cdot \sin 2\theta -$$
$$-0,2698 \cdot \cos 3\theta - 1,0568 \cdot \sin 3\theta; R^2 = 0,942$$



Пример: ряд с тенденцией

месяц	цена	урасч.	остатки
1	6,5	7,07	-0,57
2	8,5	7,46	1,04
3	8,6	7,85	0,75
4	8,0	8,24	-0,24
5	7,6	8,63	-1,03
6	7,8	9,01	-1,21
7	8,9	9,40	-0,50
8	11,0	9,79	1,21
9	11,3	10,18	1,12
10	10,6	10,57	0,03
11	10,7	10,96	-0,26
12	11,0	11,35	-0,35



Модель ряда с двумя гармониками

- $$\begin{cases} y_t = 6,683 + 0,388 \cdot t + \varepsilon_t \\ \varepsilon_t = 0,123 \cdot \cos\theta - 0,296 \cdot \sin\theta - \\ - 0,137 \cdot \cos 2\theta + 1,005 \cdot \sin 2\theta \\ R^2 = 0,9712 \end{cases}$$
- **Остатки представляют собой стационарный ряд и хорошо описываются рядом Фурье с двумя гармониками**
- **Модель линейного тренда имеет $R^2 = 0,7368$**
- **Модель с учетом периодических колебаний: $R^2 = 0,9712$**

Модели регрессии по временным рядам

- Появление «ложной корреляции» требует предварительной обработки рядов
- При построении модели регрессии нужно исключать регулярные компоненты
- Необходим анализ остатков с помощью автокорреляционной функции, для устранения автокорреляции в остатках применить ОМНК
- Необходимо выявлять временной лаг
- Особое внимание уделить проявлениям мультиколлинеарности

Учет тенденции при построении модели регрессии

- **Методы исключения тенденции:**
  - метод последовательных разностей
  - метод отклонений от тренда
- **Включение в модель регрессии фактора времени как отдельной независимой переменной:**

$$y = a + bx + ct + \varepsilon$$

  - с применением МНК для оценок *a, b, c*
  - последовательным включением в модель линейной тенденции ряда *y* и линейной регрессии остатков

$$dy = b \cdot dx + \varepsilon$$

Пример МПР:

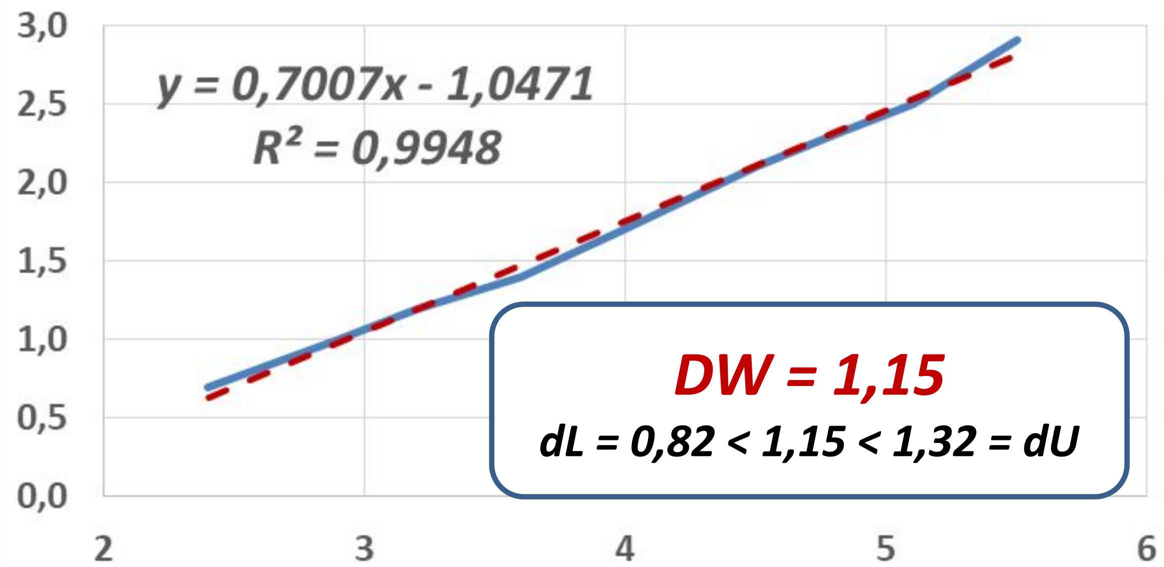
y_t - инвестиции

x_t - прибыль за предыдущий год

Есть линейный тренд для *x*

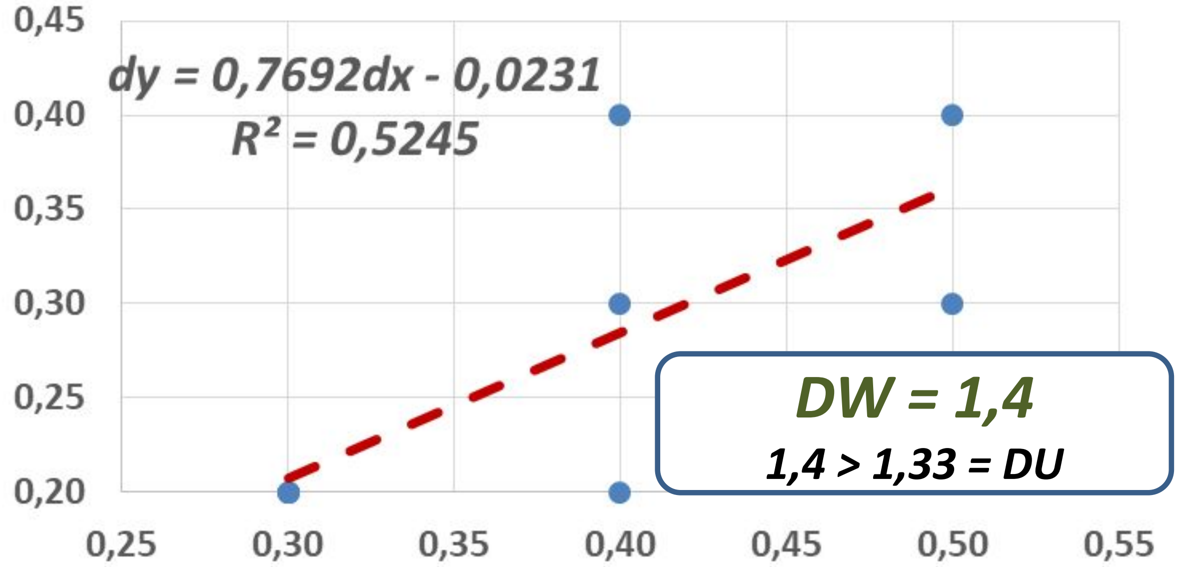
$$x_t = 2,075 + 0,385t$$
$$R^2 = 0,997$$

годы	*xt*	*yt*	*dx*	*dy*
1	2,4	0,7	-	-
2	2,9	1,0	0,5	0,3
3	3,2	1,2	0,3	0,2
4	3,6	1,4	0,4	0,2
5	4,0	1,7	0,4	0,3
6	4,5	2,1	0,5	0,4
7	4,8	2,3	0,3	0,2
8	5,1	2,5	0,3	0,2
9	5,5	2,9	0,4	0,4



DW = 1,15

dL = 0,82 < 1,15 < 1,32 = dU



DW = 1,4

1,4 > 1,33 = DU

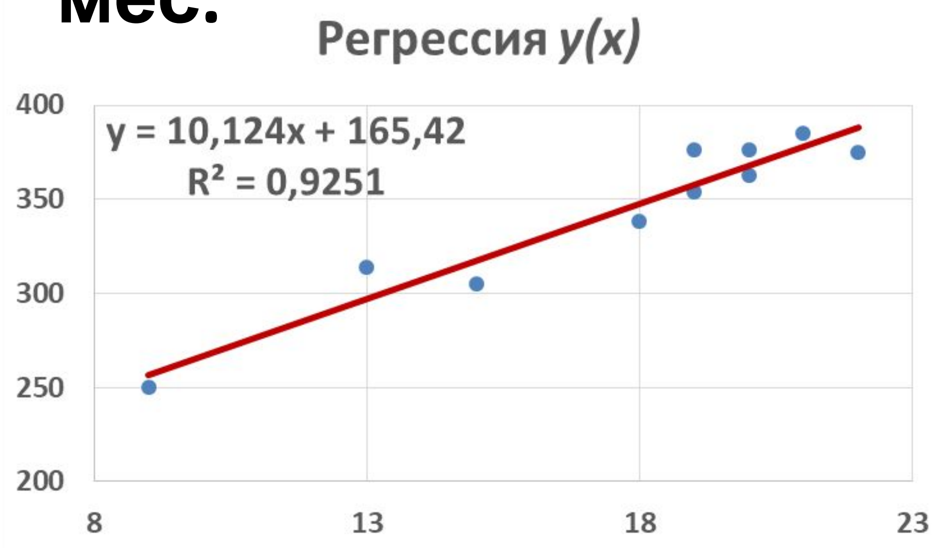
Метод отклонений от тренда

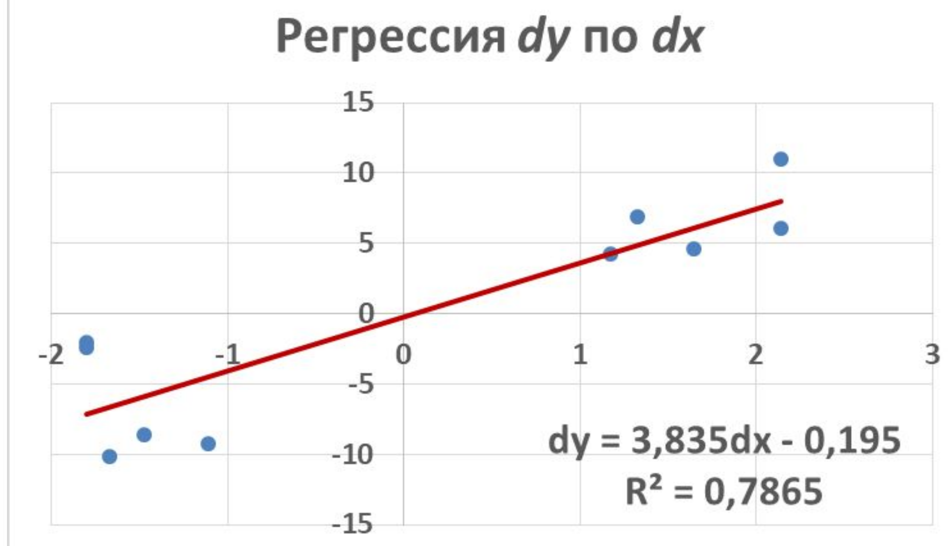
y – прибыль, *x* – затраты на охрану труда за 10 мес.

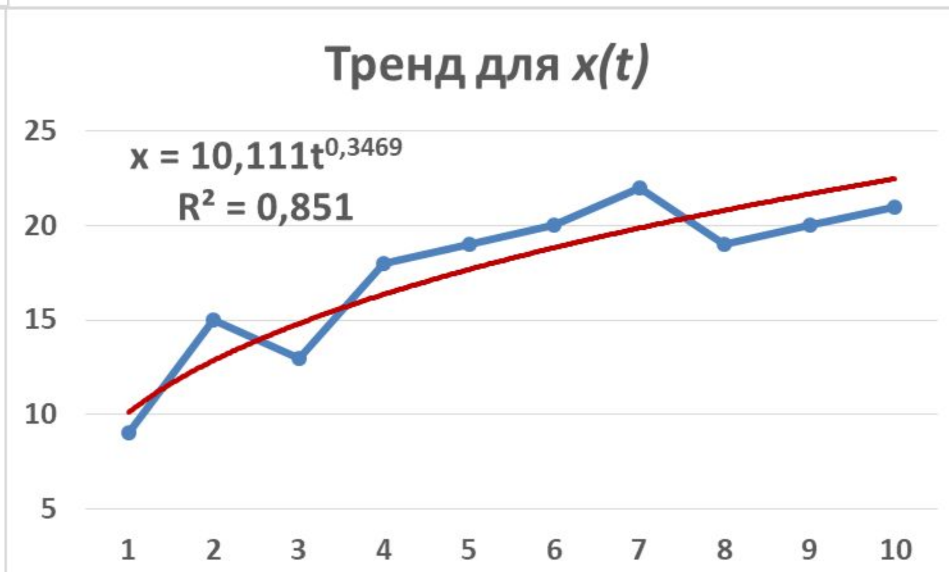
t	*yt*	*yt расч*	*dy*	*xt*	*xt расч*	*dx*
1	250	259,28	-9,28	9	10,11	-1,11
2	305	294,00	11,00	15	12,86	2,14
3	314	316,43	-2,43	13	14,80	-1,80
4	338	333,37	4,63	18	16,35	1,65
5	354	347,13	6,87	19	17,67	1,33
6	363	358,80	4,20	20	18,82	1,18
7	375	368,97	6,03	22	19,86	2,14
8	376	378,01	-2,01	19	20,80	-1,80
9	376	386,17	-10,17	20	21,67	-1,67
10	385	393,61	-8,61	21	22,47	-1,47

Метод отклонений от тренда

y **– прибыль,** ***x*** **– затраты на охрану труда за 10 мес.**







Модели с лаговыми переменными

- Модели с распределенными лагами (с лаговыми объясняющими переменными):

$$y_t = a + b_0 x_t + b_1 x_{t-1} + \cdots + b_k x_{t-k} + \varepsilon_t$$

- Модели авторегрессии (с лаговыми зависимыми переменными):

$$y_t = a + b x_t + c_1 y_{t-1} + \cdots + c_k y_{t-k} + \varepsilon_t$$

- Авторегрессионные модели с распределенным лагом:

$$y_t = a + b_1 y_{t-1} + \cdots + b_k y_{t-k} +$$
$$+ c_0 x_t + c_1 x_{t-1} + \cdots + c_k x_{t-k} + \varepsilon_t$$

- Основные вопросы:
  - выбор величины лага
  - определение числа лаговых переменных

Авторегрессионные модели *AR(p)*

- **Авторегрессионный процесс порядка *p*:**

$$y_t = a_0 + a_1 y_{t-1} + a_2 y_{t-2} + \cdots + a_p y_{t-p} + \varepsilon_t$$

- **Условие стационарности процесса:**
  - **ряд $a_1, a_2, \ldots, a_p$ - сходится**
  - **все (комплексные) корни характеристического уравнения $a_1 z + a_2 z^2 + \cdots + a_p z^p = 1$ должны удовлетворять условию $|z| > 1$**
- **Для авторегрессии *AR(1)*: $\widehat{y}_t = a_0 + a_1 y_{t-1}$, характеристическое уравнение: $a_1 z = 1$, поэтому $-1 < a_1 < 1$**

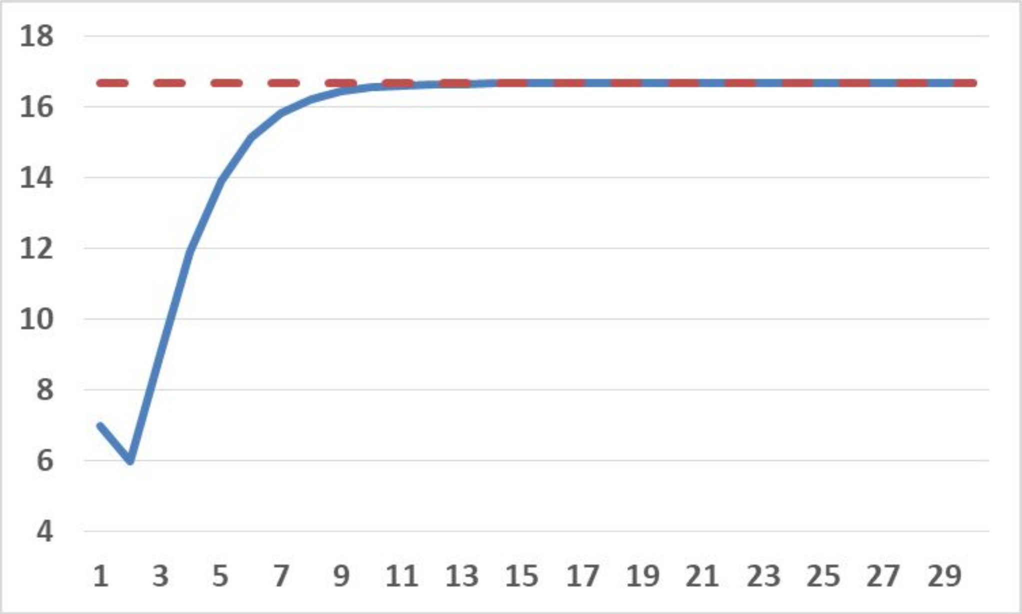
Пример модели *AR(2)*:

- $y_t = 5 + 0,9y_{t-1} - 0,2y_{t-2} + \varepsilon_t;\ y_1 = 7, y_2 = 6$
- Характеристическое уравнение:

$$0,2z^2 - 0,9z + 1 = 0$$

- Корни: $z_1 = 2,5 > 1;\ z_2 = 2 > 1$, поэтому процесс стационарный, с асимптотой

$$\mu = \frac{a_0}{1 - a_1 - a_2} = \frac{5}{1 - 0,9 + 0,2} \approx \approx 16,67$$



Модели скользящей средней *MA*

- **Для стационарного ряда $\hat{y}_t$ представляется линейной функцией прошлых ошибок:**

$$y_t = \mu + \varepsilon_t - \theta_1 \varepsilon_{t-1} - \theta_2 \varepsilon_{t-2} - \cdots - \theta_q \varepsilon_{t-q}$$

где $\varepsilon_t, \varepsilon_{t-1}, \varepsilon_{t-2}, \dots, \varepsilon_{t-q}$ – «белый шум» в текущий и предыдущие периоды

- **Процесс скользящего среднего порядка *q*:**

$$x_t = \varepsilon_t - \theta_1 \varepsilon_{t-1} - \theta_2 \varepsilon_{t-2} - \cdots - \theta_q \varepsilon_{t-q}$$

- **Модель *MA(1)*:** $y_t = \mu + \varepsilon_t - \theta_1 \varepsilon_{t-1}$
- **Модель *MA(2)*:**

$$y_t = \mu + \varepsilon_t - \theta_1 \varepsilon_{t-1} - \theta_2 \varepsilon_{t-2}$$

- **При $q = 0, \mu = 0$ получаем «белый шум»**

Модели *ARMA(p, q)*

(Auto Regressive – Moving Average)

- **Соединение в одной модели *AR* и *MA* – авторегрессионный процесс со скользящими средними в остатках**
- **Пример для *ARMA(3, 2)*:**

$$y_t = a_0 + a_1 y_{t-1} + a_2 y_{t-2} + a_3 y_{t-3} + \\ + \varepsilon_t - \theta_1 \varepsilon_{t-1} - \theta_2 \varepsilon_{t-2}$$

- **Основная проблема – выбор числа лагов *p, q***
- **Инструмент идентификации *ARMA(p, q)* – частная автокорреляционная функция *PACF***
- **Обобщение – модель Бокса-Дженкинса *ARIMA(p,d,q)*, где *d* – порядок разностей**

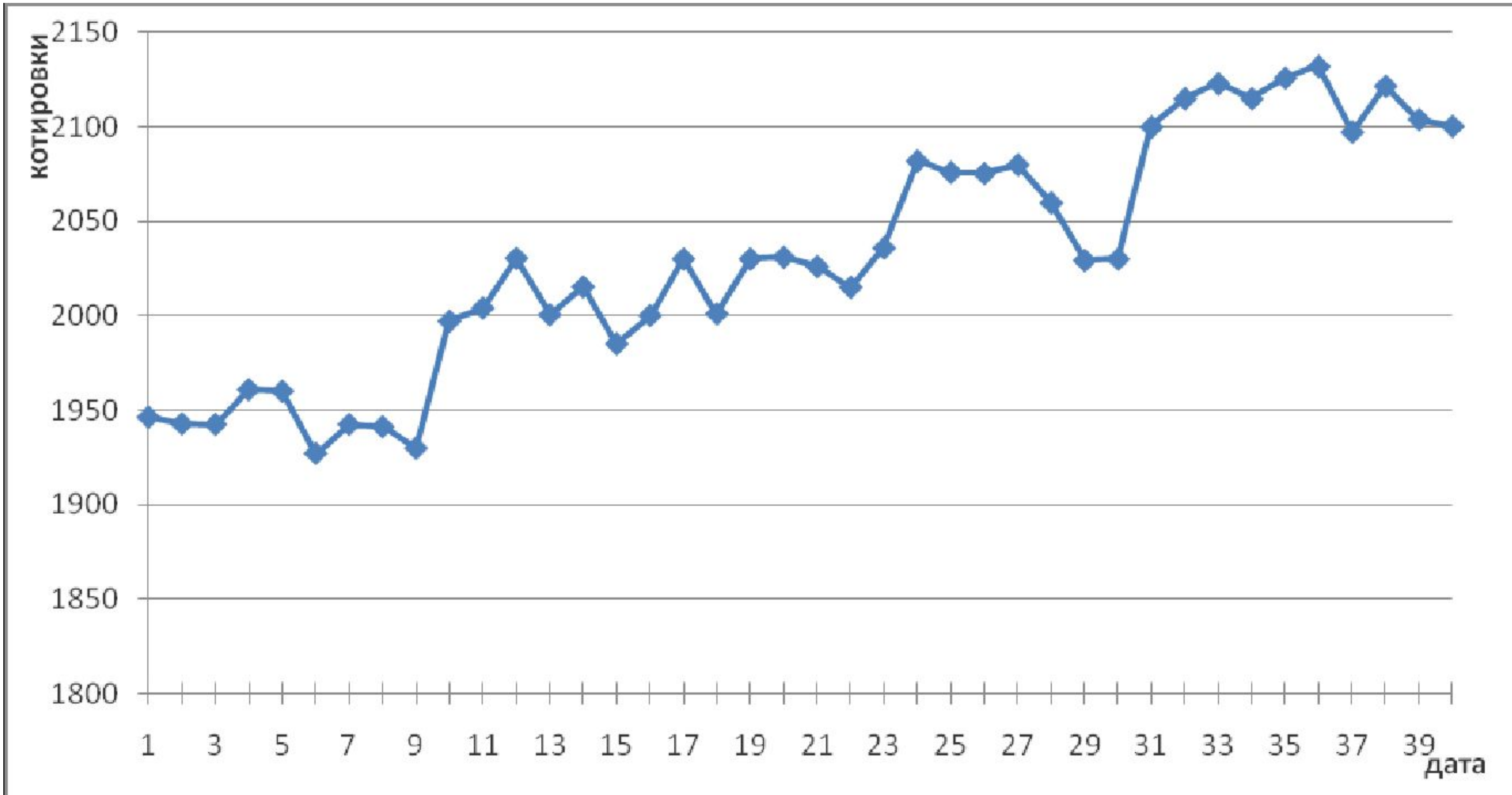
Модель *ARIMA(p,d,q)* Бокса-Дженкинса

- $$\Delta^d y_t = \mu_1 \Delta^d y_{t-1} + \cdots + \mu_p \Delta^d y_{t-p} + \varepsilon_t - \\ - \theta_1 \varepsilon_{t-1} - \cdots - \theta_q \varepsilon_{t-q}$$
- *p* – порядок авторегрессии
- *q* – порядок скользящего среднего
- *d* – порядок разностей (интегрирования)
- $\varepsilon_t \sim N(0, \sigma_\varepsilon)$ - процесс типа «белый шум»
- Сначала определяется порядок разностей *d*
- Интегрирование проводится до получения стационарного ряда
- Для стационарного ряда *p* и *q* оцениваются как в модели *ARMA(p,q)*

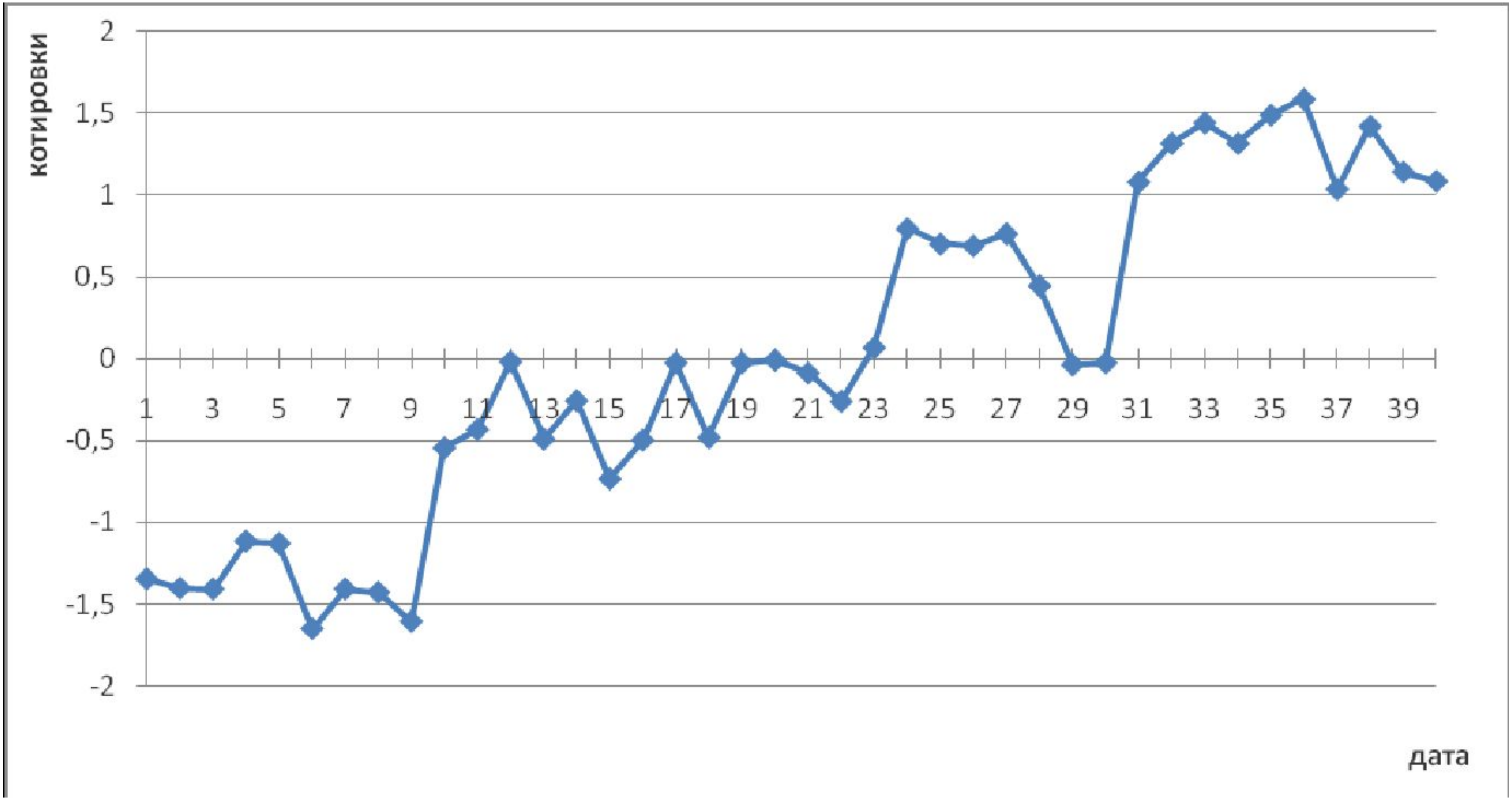
Проверка остатков

- Соответствие нормальному закону распределения (критерий Колмогорова-Смирнова)
  – вычисляем остатки $\varepsilon_t = y_t - \hat{y}_t, t = 1, \ldots, n$
  – рассчитываем $\bar{\varepsilon}$ и S_ε^2
  – находим $\Phi(z_t)$, где $z_t = \frac{\varepsilon_t - \bar{\varepsilon}}{S_\varepsilon}$
  – рассчитываем $D_n^H = D_n\left(\sqrt{n} - 0{,}01 + \frac{0{,}85}{\sqrt{n}}\right)$, где
  $D_n = \max(\max_{1 \le t \le n}(\frac{t}{n} - \Phi(z_t)); \max_{1 \le t \le n}(\Phi(z_t) - \frac{t-1}{n}))$
  – D_n^H сравниваем с критическим $D_n^H(\alpha)$
  – если $D_n^H < D_n^H(\alpha)$ – гипотеза не отклоняется

Пример: котировки акций Лукойл на рынке *RTS Standard* (23.08.2013-30.10.2013)



Стандартизованные котировки акций Лукойл на рынке *RTS Standard* (23.08.2013-30.10.2013)



Проверка нормальности распределения остатков

- Критерий Колмогорова-Смирнова: $D_n^H = 0,524$
- Критическое значение: $D_n^H(0,05) = 0,895$
- $D_n^H = 0,524 < D_n^H(\alpha) = 0,895$
- Гипотеза о нормальности остатков не отклоняется на уровне значимости 0,05

	0,15	0,10	0,05	0,03	0,01
	0,775	0,819	0,895	0,955	1,035