Теория Механизмов и Машин

Выполнили студенты группы РК6-44Б третьей бригады:

Ватутин, Тетерин, Готовцев, Исраелян, Оганесян, Момотов, Власенков

Оглавление

Понятие вектора и производной

- *Вектор* – это направленный отрезок, то есть отрезок, имеющий длину и определенное направление. Графически вектора изображаются в виде направленных отрезков прямой определенной длины.
- Вектор, начало которого есть точка А, а конец – точка В, обозначается $\overline{AB}$. Также вектора обозначают одной маленькой буквой, например $\bar{a}$.
- *Производная* – это главнейшее понятие математического анализа. Она характеризует скорость изменения функции $y = f(x)$ в некоторой точке. При этом сама производная является функцией от x.
- *Производной функции в точке* называется *предел* (если он существует и конечен) отношения приращения функции к приращению аргумента при условии, что последнее стремится к нулю. То есть:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \quad (1.1.1)$$

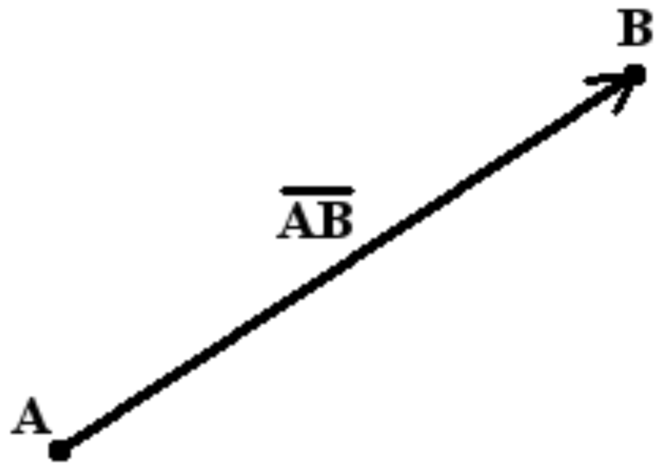


Рис. 1.1.1
Графическое изображение вектора и его обозначение

Вектор-функции

- Если каждому значению скалярного аргумента $t \in X$ $(X \subset R)$ поставлен в соответствие вектор $\overline{r}$ некоторого (например, трехмерного) пространства R^3, то говорят, что на *множестве X задана вектор-функция* (или векторная функция) $\overline{r}(t)$ скалярного аргумента t.
- Если в пространстве R^3 задана декартова система координат Oxyz, то задание вектор-функции $\overline{r}(t), t \in X$ $(X \subset R)$ равносильно заданию трех скалярных функций – координат вектора $\overline{r}$:

$$\overline{r}(t) = \{\, x(t), y(t), z(t) \,\} \quad (1.1.2)$$

$$\overline{r}(t) = x(t) \cdot \overline{i} + y(t) \cdot \overline{j} + z(t) \cdot \overline{k} \quad (1.1.3)$$

- Здесь $\overline{i}$, $\overline{j}$, $\overline{k}$ – *координатные орты.*
- Примером вектор-функций может послужить радиус-вектор или скорость движущейся в пространстве точки (рис. 1.1.2).

Пространственная линия – годограф радиуса-вектора

- *Годографом* вектора $\overline{r}$, являющегося функцией скаляра t, называется геометрическое место точек, которое описывает конец этого вектора при изменении скаляра t, когда начало вектора помещено в фиксированную точку O пространства. Эта точка называется *полюсом* годографа.
- Годографом *радиуса-вектора* движущейся точки будет сама траектория этой точки. Годографом же скорости, например, будет уже некоторая новая линия.
- В частности, если с изменением аргумента вектор изменяет только свой модуль, но не направление, его годографом будет прямолинейный луч, исходящий из полюса. Если же длина вектора неизменна, то есть $|\overline{r}(t)| = const$, а направление меняется, то годографом в этом случае будет некоторая кривая, расположенная на поверхности сферы, центр которой является полюсом, а радиус равен длине вектора (рис. 1.1.2, нижний ряд).

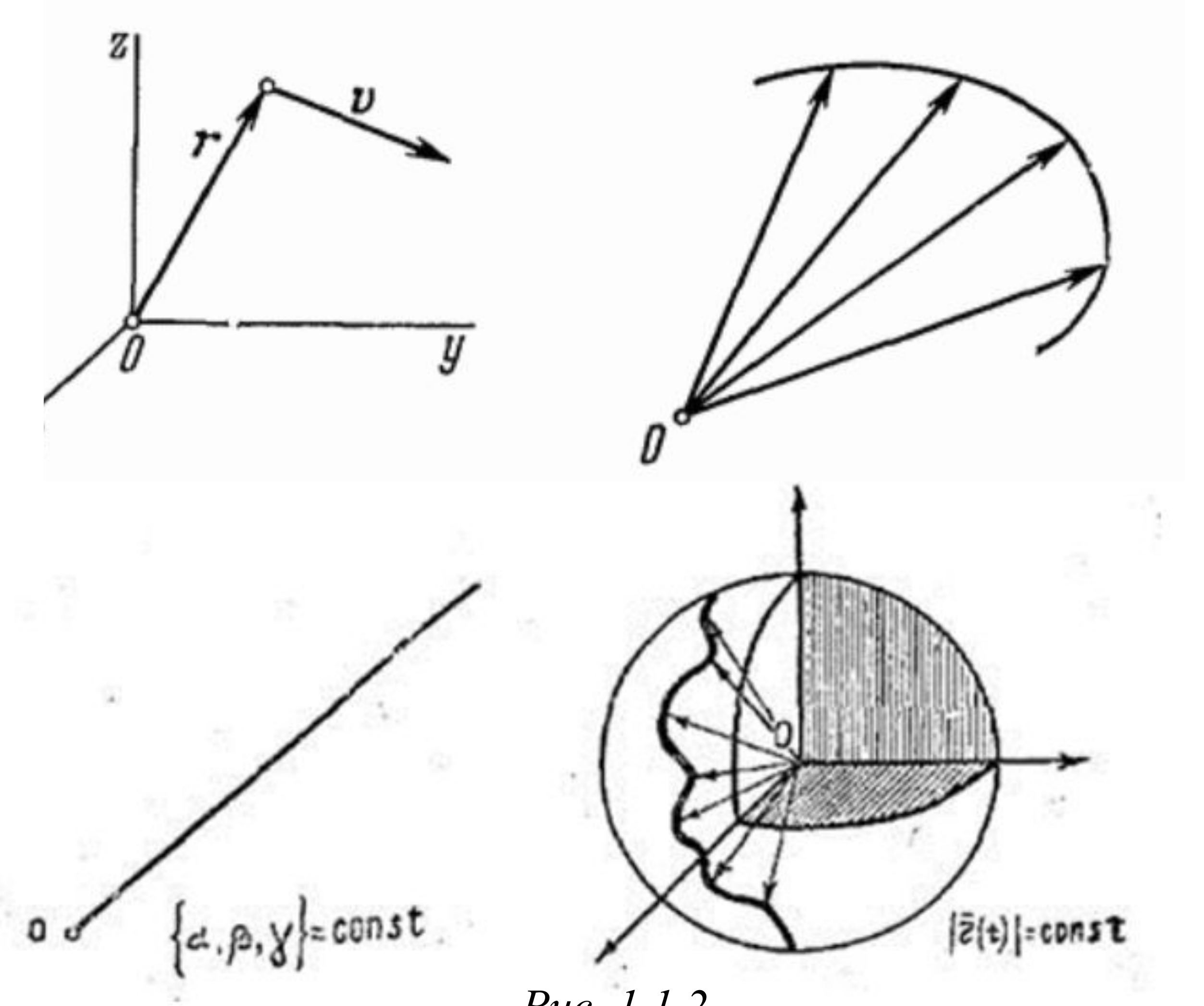


Рис. 1.1.2
Пример вектор-функций (вверху слева) и изображений годографа

Геометрический и физический смысл

- *Геометрический смысл* производной вектор-функции скалярного аргумента заключается в том, что эта производная представляет собой вектор, направленный по касательной к годографу (в сторону увеличения скалярного аргумента).
- Покажем это: дадим аргументу t приращение Δt, тогда геометрически отношение $\frac{\Delta r}{\Delta t}$ – это некоторый вектор $\overline{MS'}$, длина которого в Δt раз меньше исходного, лежащий на секущей MM' годографа. При переходе к пределу при $\Delta t \to 0$ данный вектор поворачивается и превращается в вектор $\overline{MS}$, направленный по касательной в сторону, соответствующую увеличению аргумента t.

$$\overline{\tau} = \frac{\overline{r}}{|\overline{r}|} \quad (1.1.4)$$

- Вектор $\overline{\tau}$ в формуле (1.1.4) будет являться единичным вектором касательной.
- *Механический смысл* производной может заключаться, например, в следующем: производная радиуса-вектора точки по времени представляет собой скорость точки в некоторый момент времени (по величине и направлению).

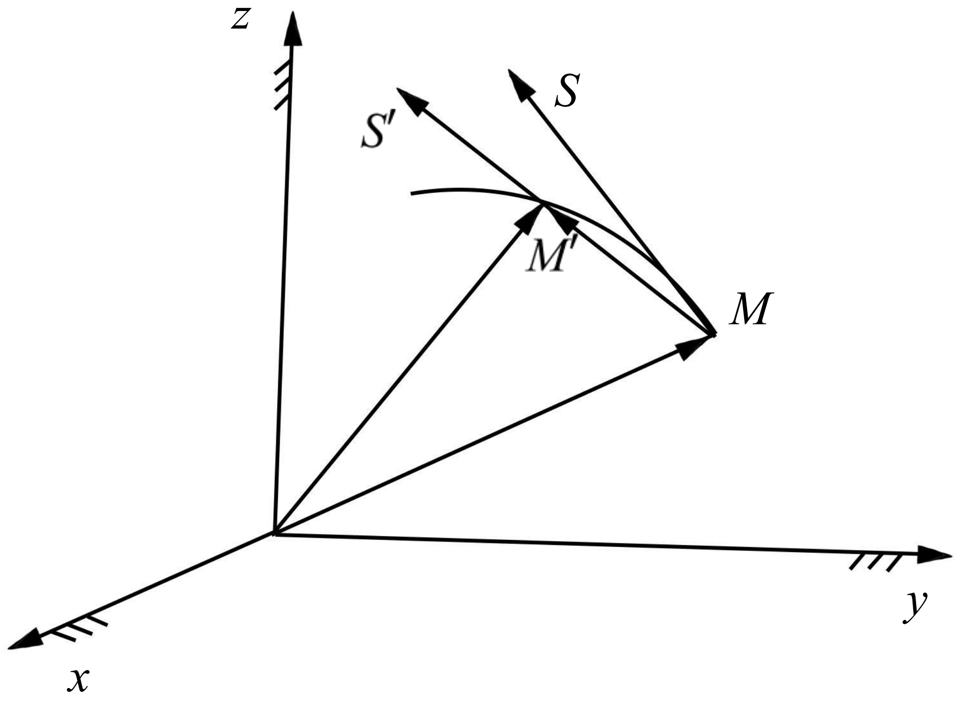


Рис. 1.1.3
К геометрическому смыслу производной

Направление и величина $\overline{a}'(t)$

- Для определения положения производной вектора постоянного модуля необходимо узнать его направление и величину. Найдем его *величину*:

$$|\Delta\overline{a}| = |\overline{a}|\Delta\varphi \quad (1.1.5)$$

$$\frac{|da|}{|dt|} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{|a|\Delta\varphi}{\Delta t} = |a| \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = |a| \frac{d\varphi}{dt} = |\overline{a}| \cdot \omega \ (1.1.6)$$

- Более строгое доказательство можно произвести немного иначе: вектор постоянного модуля а можно представить следующим образом:

$$\overline{a}(t) = a \cdot \overline{a_0}(t) \quad (1.1.7)$$

- Здесь a − постоянная длина вектора $\overline{a}$, $\overline{a_0}$ −единичный вектор, направленный вдоль $\overline{a}(t)$. Рассмотрим равнобедренный треугольник, сформированный двумя положениями вектора a_0 и вектором $\Delta\overline{a_0}$ (рис. 1.1.4). Из длин его сторон следует, что (из геометрии равнобедренного треугольника):

$$A_0A_1 = 2\overline{a_0} \cdot \sin\left(\frac{\Delta\varphi}{2}\right) \quad (1.1.8)$$

- Подставим (1.1.8) в (1.1.7) и, умножая числитель и знаменатель дроби под пределом на $\frac{\Delta\varphi}{2}$ перейдем к первому замечательному пределу, получая тот же результат.

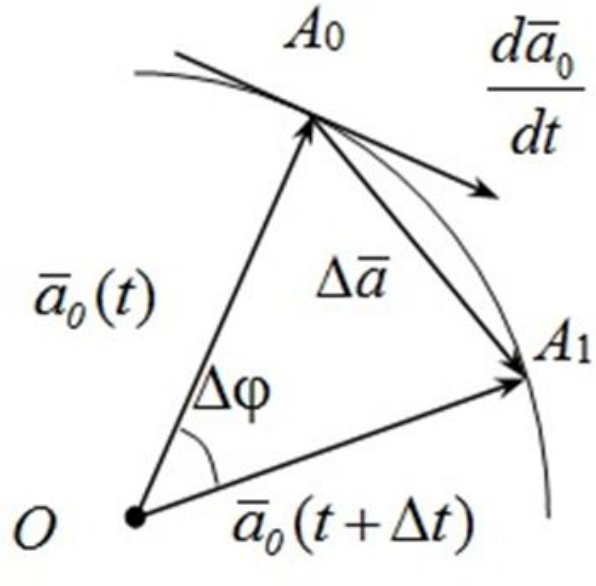


Рис. 1.1.4

Направление и величина $\overline{a}'(t)$

- Определим *направление* вектора $\overline{b}(t) = \frac{d\overline{a_0}}{dt}$
- Как мы уже выяснили, производная вектора направлена по касательной к годографу (в нашем случае, к окружности радиуса a). Поскольку радиус окружности перпендикулярен касательной, то
$$\frac{d\overline{a_0}}{dt} \perp \overline{a_0} \quad (1.1.9)$$
- Иначе говоря, при взятии производной от вектора постоянной длины $\overline{a_0}$ по скаляру t получаем вектор, перпендикулярный исходному. Операция дифференцирования поворачивает исходный вектор на $90°$ в сторону движения (в сторону возрастания аргумента t).
- Заметим, что доказать это утверждение можно и другим образом (1.1.9), а именно путем дифференцирования скалярного произведения исходного вектора на себя: при условии, что он ненулевой и постоянной длины, скалярное произведение вектора на свою производную равно нулю.

-
$$\overline{a_0} \cdot \overline{a_0} = |\overline{a_0}|^2 \quad (1.1.9)$$
$$\overline{a_0} \cdot \frac{\overline{a_0}}{dt} + \overline{a_0} \cdot \frac{\overline{a_0}}{dt} = 0 \quad (1.1.10)$$

Материальная точка и годограф

- *Материальная точка* – идеализированная физическая модель, обладающее массой тело, размерами, формой, вращением и внутренней структурой которого можно *пренебречь* в условиях исследуемой задачи.
- Для произвольной точки в пространстве *радиус-вектор* — это *вектор*, идущий из начала координат в эту точку (рис. 1.2.1).
- Геометрическое место последовательных положений движущейся точки называется ее *траекторией*. Также можно связать понятие траектории с понятием годографа: *траектория точки* есть *годограф* ее *радиуса-вектора* (рис. 1.2.2).
- *Скорость* материальной точки есть *физическая величина, характеризующая быстроту её движения*, то есть быстроту изменения положения радиуса-вектора в единицу времени. Ожидаемо, выражается как его первая производная по времени.
- Аналогично, *ускорение* материальной точки есть *физическая величина, характеризующая быстроту изменения её скорости* в единицу времени.

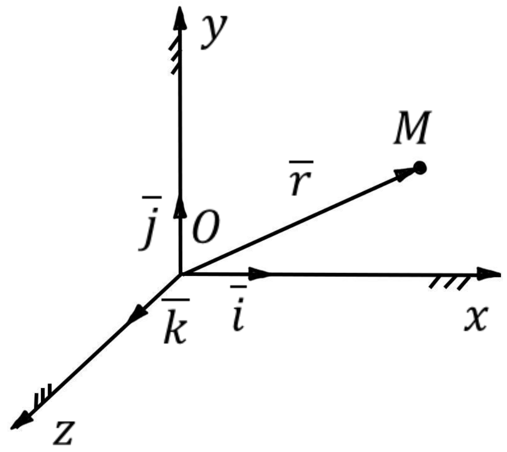


Рис. 1.2.1

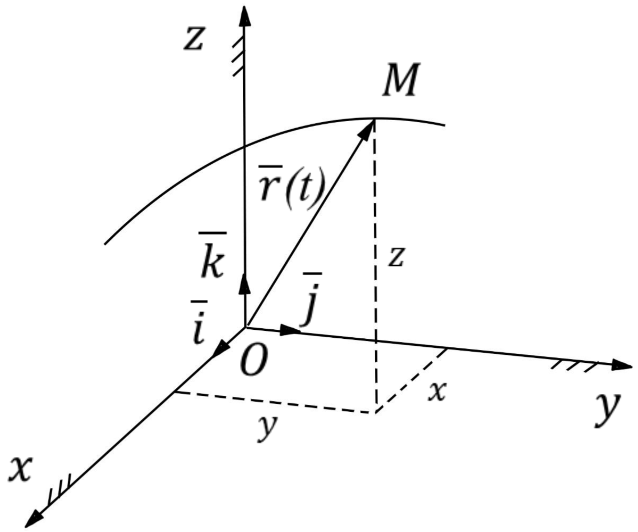


Рис. 1.2.2

Кинематика в ДСК

- Радиус вектор r движущейся точки P относительно O можно задать как вектор-функцию времени $\bar{r} = \bar{r}(t)$.
- Производная от $\bar{r}$, $\bar{v} = \dot{\bar{r}} = \frac{d\bar{r}}{dt}$ называется *скоростью* точки P.
- Производная от $\bar{v}$, $\bar{a} = \dot{\bar{v}} = \ddot{\bar{r}} = \frac{d^2\bar{r}}{dt^2}$ называется *ускорением* точки P.
- Учитывая то, что мы действуем в декартовой системе координат, мы можем разложить радиус вектор точки по интересующему нас *ортонормированному базису*. Ограничимся рассмотрением систем с *неподвижным базисом*.
- Где *x, y, z* – координаты радиус вектора в заданном базисе.

$$\bar{r} = x\bar{\imath} + y\bar{\jmath} + z\bar{k} \quad (1.2.1)$$

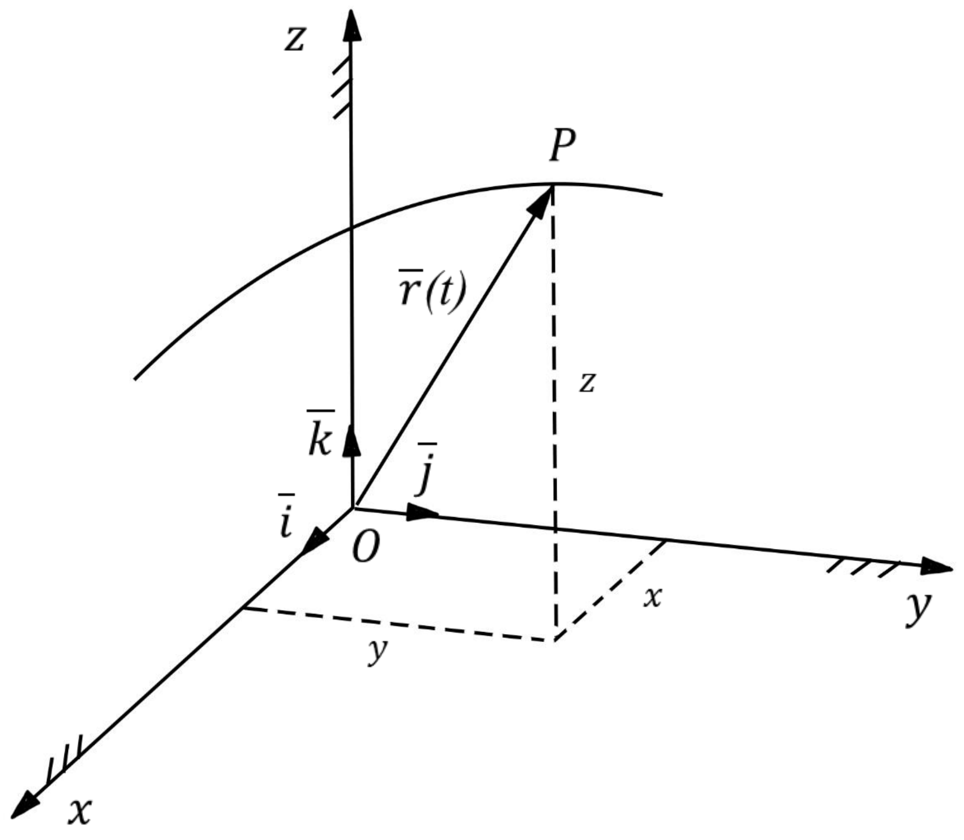


Рис. 1.2.3

Формулы скорости и ускорения в ДСК

- Учитывая определение скорости, продифференцируем компоненты в выражении (1.2.1) для радиус вектора:

$$\overline{v} = \dot{\overline{r}} = \dot{x}\overline{i} + x\dot{\overline{i}} + \dot{y}\overline{j} + y\dot{\overline{j}} + \dot{z}\overline{k} + z\dot{\overline{k}} \quad (1.2.2)$$

- Компоненты $x\dot{\overline{i}}, y\dot{\overline{j}}, z\dot{\overline{k}}$ содержат производные от постоянных векторов (ортов), тем самым *обращаются в ноль*. Получаем *формулу для определения скорости в декартовых координатах:*

$$\overline{v} = \dot{\overline{r}} = \dot{x}\overline{i} + \dot{y}\overline{j} + \dot{z}\overline{k} \quad (1.2.3)$$

- Получив формулу для скорости, по индукции получим формулу для вычисления ускорения, еще раз продифференцировав её:

$$\overline{a} = \dot{\overline{v}} = \ddot{\overline{r}} = \ddot{x}\overline{i} + \ddot{y}\overline{j} + \ddot{z}\overline{k} \quad (1.2.4)$$

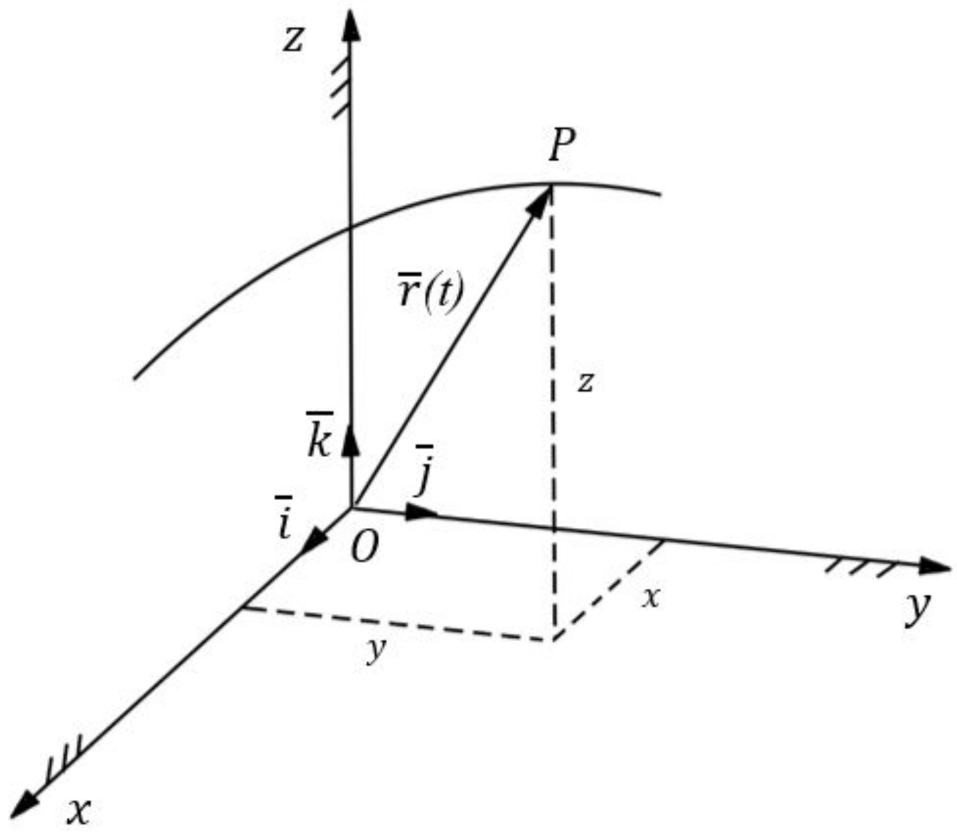


Рис. 1.2.4

Формулы скорости и ускорения в ДСК

- *Величина* скорости и ее *направление* определяются равенствами (2.4) и (2.5). *Отметим*, что выражения для направляющих косинусов (2.5) и (2.7) имеют физический смысл только при *ненулевом векторе* скорости и ускорения соответственно!

$$|\overline{v}| = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2} \quad (1.2.4)$$

$$\cos(\overline{v}, \overline{i}) = \frac{\dot{x}}{|\overline{v}|}, \cos(\overline{v}, \overline{j}) = \frac{\dot{y}}{|\overline{v}|}, \cos(\overline{v}, \overline{k}) = \frac{\dot{z}}{|\overline{v}|} \quad (1.2.5)$$

- Величина ускорения и его направления определяются равенствами:

$$|\overline{a}| = \sqrt{\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2 + \ddot{z}^2} \quad (1.2.6)$$

$$\cos(\overline{a}, \overline{i}) = \frac{\ddot{x}}{|\overline{a}|}, \cos(\overline{a}, \overline{j}) = \frac{\ddot{y}}{|\overline{a}|}, \cos(\overline{a}, \overline{k}) = \frac{\ddot{z}}{|\overline{a}|} \quad (1.2.7)$$

Выводы

Иногда производить описание движения тела проще в декартовых координатах. Таким образом, мы получаем удобный аппарат для описания кинематических характеристик материальных точек, в котором для вычисления производных вектор-функций скалярного аргумента (времени) осуществляем их покоординатное дифференцирование.

Полярная система координат

- Сразу заметим, что рассмотрение движения в полярной СК будем производить только в *двумерном случае.*
- Для задания СК выбираем *неподвижную точку O – полюс*, *неподвижный луч Ox - полярную ось*. Выбираем линейный масштаб для измерения длин и градусную или радианную меру углов.
- Положение движущейся точки *M* на плоскости известно, если заданы *радиус* ρ и *полярный угол* φ как функции времени, т.е. $\rho = \rho(\mathrm{t})$ и $\varphi = \varphi(\mathrm{t})$.
- Можно осуществлять переход между полярными координатами (ρ, φ) и декартовыми (x, y), пользуясь соотношениями (1.3.1).

$$\begin{cases} x = \rho\cos(\phi) \\ y = \rho\sin(\phi) \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} \rho = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \cos(\phi) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \\ \sin(\phi) = \dfrac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \end{cases} \quad (1.3.1)$$

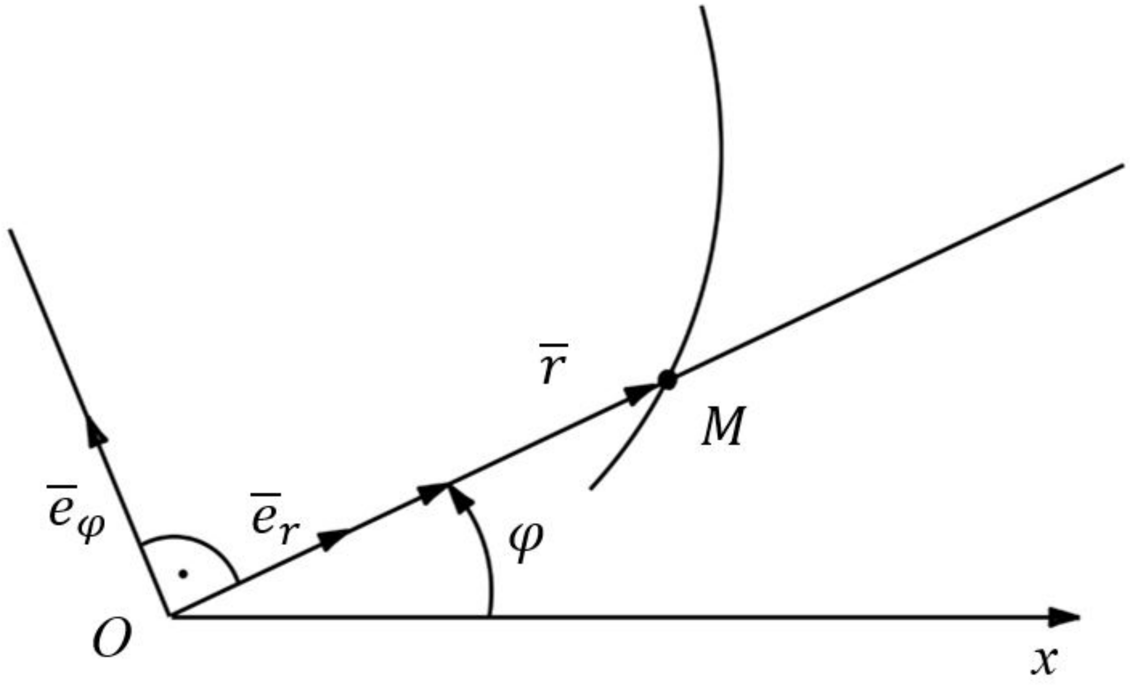


Рис. 1.3.1

Определение Скорости в ПСК

- Для скорости v получаем выражение:

$$\bar{v} = \frac{d\bar{r}}{dt} = \frac{d}{dt}(r \cdot \overline{e_r}) = \frac{dr}{dt} \cdot \overline{e_r} + r \cdot \frac{d\overline{e_r}}{dt} \quad (1.3.2)$$

- *Производная от единичного вектора по времени* также есть единичный вектор, но повернутый на 90°, умноженный на производную угла поворота исходного вектора:

$$\frac{d\overline{e_r}}{dt} = \frac{d\varphi}{dt} \cdot \overline{e_\varphi}$$

- После этого для скорости $\bar{v}$ получаем выражение:

$$\bar{v} = \dot{r} \cdot \overline{e_r} + r \cdot \dot{\varphi} \cdot \overline{e_\varphi} \quad (1.3.3)$$

- Это разложение скорости точки на *радиальную и трансверсальную (поперечную) составляющие*, т.е.

$$\bar{v} = \bar{v}_r + \bar{v}_\varphi, \qquad \bar{v}_r = \dot{r} \cdot \overline{e_r}, \qquad \bar{v}_p = r \cdot \dot{\varphi} \cdot \overline{e_\varphi}$$

$v_r = \dot{r}$ - *радиальная* скорость

$v_\varphi = r \cdot \dot{\varphi}$ - *трансверсальная* скорость

- Модуль скорости равен:

$$v = \sqrt{{v_\varphi}^2 + {v_r}^2} \quad (1.3.4)$$

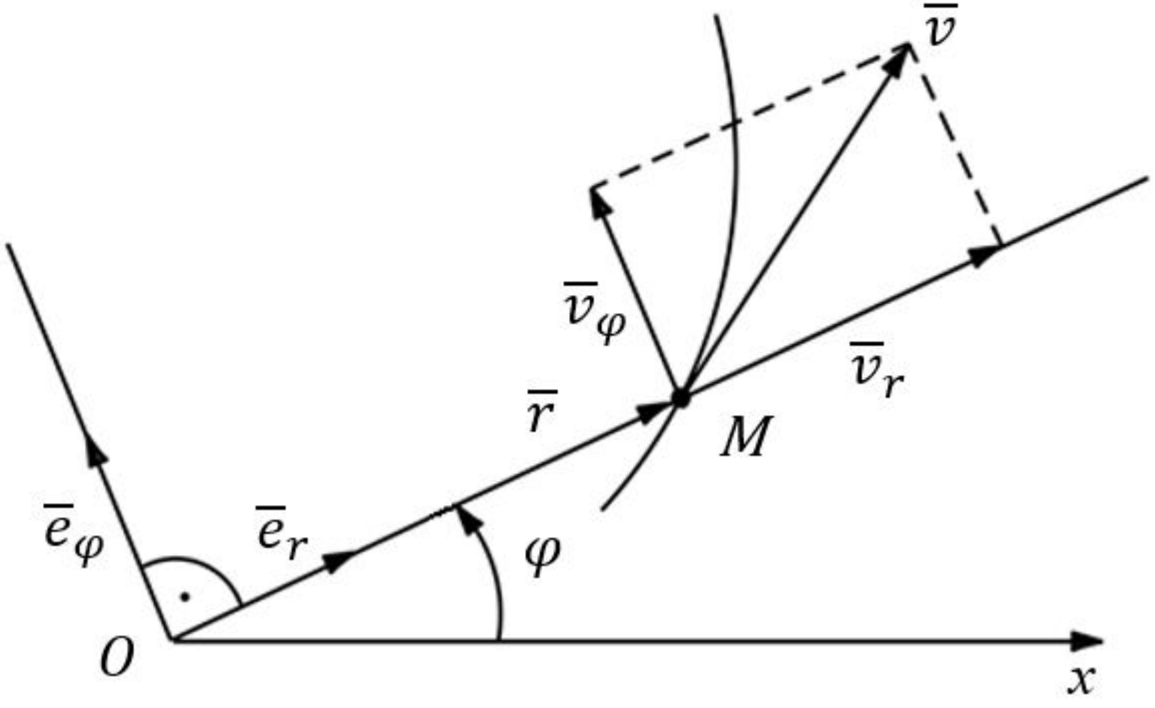


Рис. 1.3.2

Определение Ускорения в ПСК

- Определим ускорение точки:

$$\bar{a} = \frac{d\bar{v}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\dot{r} \cdot \overline{e_r} + r \cdot \dot{\varphi} \cdot \overline{e_\varphi}\right)$$

- После дифференцирования получаем:

$$\bar{a} = (\ddot{r} - \dot{r} \cdot \dot{\varphi}^2) \cdot \overline{e_r} + (r \cdot \ddot{\varphi} + 2 \cdot \dot{r} \cdot \dot{\varphi}) \cdot \overline{e_\varphi} (1.3.5)$$

- Получили разложение ускорения точки на радиальную и трансверсальную (поперечную) составляющие, т.е. : $\bar{a} = \bar{a}_r + \bar{a}_\varphi$. Здесь

$a_r = (\ddot{r} - \dot{r} \cdot \dot{\varphi}^2)$ – радиальное ускорение

$a_\varphi = (r \cdot \ddot{\varphi} + 2 \cdot \dot{r} \cdot \dot{\varphi})$ – трансверсальное ускорение

- Модуль ускорения равен:

$$a = \sqrt{a_\varphi{}^2 + a_r{}^2} \quad (1.3.6)$$

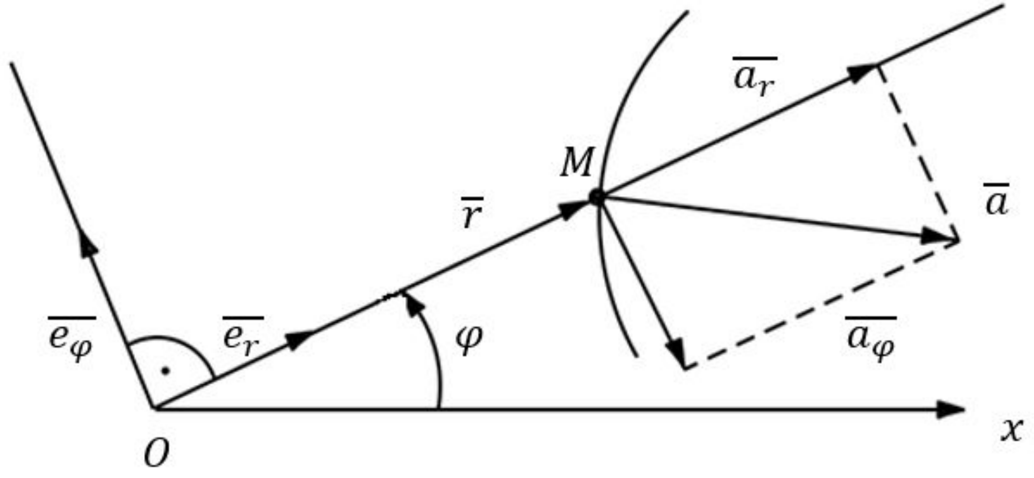


Рис. 1.3.3

Естественная система координат

Для определения закона движения точки в естественной системе координат нам необходимо:

- Знать *траекторию* движения точки
- Установить *начало отсчета* на этой кривой в некоторой неподвижной точке *O*
- Установить *положительное направление движения* (как правило, соответствует увеличению времени)
- Задать *закон движения* точки *M* по этой кривой, т.е. выразить зависимость расстояния *S* от начала отсчета до положения точки на кривой в данный момент от времени: $S = S(t)$
- При естественном способе задания движения *осями* служат *касательная, нормаль и бинормаль к траектории* движения точки в каждом ее положении.
- *Радиусом кривизны* называют величину, обратную кривизне *K* (рис. 1.4.2). Более подробно про кривизну кривой расскажем далее.

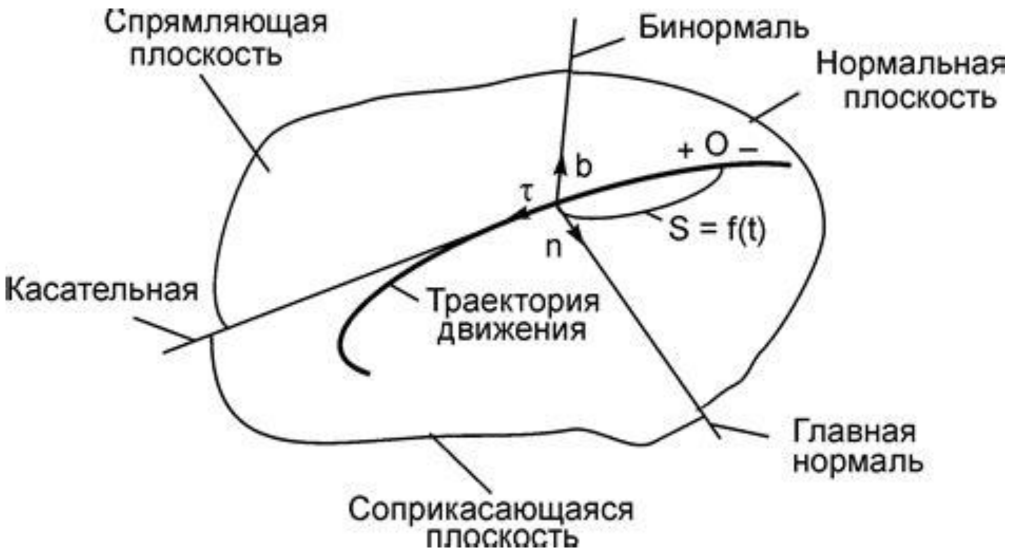


Рис. 1.4.1

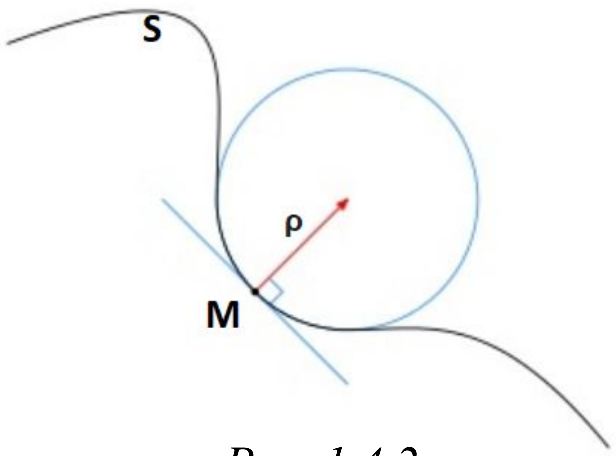


Рис. 1.4.2

Касательная, главная нормаль и радиус кривизны

- Остановимся более подробно на *направлении осей естественной системы координат*. Примем, что в *простой и обыкновенной* точке кривой *существует и единственна касательная* к кривой. Проведем через такую точку траектории M *единичный вектор касательной*, направленный в сторону возрастания дуговой координаты s. Этот вектор $\overline{\tau}$ называется *ортом касательной.* Если провести через точку M плоскость, перпендикулярную касательной, получится т.н. нормальная плоскость. Любая прямая, проведенная через точку M в этой плоскости, будет являться нормалью траектории в точке M.
- Теперь выберем в окрестности точки M другую точку, M_1. Орт касательной в новой точке повернется на некоторый угол и примет положение $\overline{\tau_1}$. Построим плоскость на этих векторах и будем неограниченно приближать точку M_1 к точке M. Полученная этим образом плоскость будет приближаться к некоторому *предельному положению*. Такое предельное положение называется *соприкасающейся плоскостью*, а прямая, образованная пересечением нормальной и соприкасающейся плоскостей называется *главной нормалью траектории* в точке.
- За положительное направление главной нормали принимается направление *в сторону вогнутости траектории*, и это направление определяют единичным вектором $\overline{n}$, называемым *ортом главной нормали.*
- Нормаль, перпендикулярная к соприкасающейся плоскости, называется *бинормалью*. Направление её определяют вектором $\overline{b}$, *ортом бинормали*, таким образом, что 3 полученных орта составляют *правую тройку.*
- Плоскость, построенная на векторах бинормали и касательной, называется *спрямляющей плоскостью*.
- Таким образом, получаем базис, который с учетом рассуждений, является *ортонормированным*. Три оси, построенные на векторах базиса в точке M, называются *естественными осями*. Они являются ребрами т.н. *естественного трехгранника Дарбу* (рис. 1.4.1).

Кривизна и радиус кривизны плоской кривой

- При переходе из одной точки *прямой* в другую касательная (которая совпадает с самой прямой) не изменяет своего направления. При переходе же из одной точки в другую по некоторой *кривой* касательная *поворачивается на некоторый угол*, что интуитивно объясняется «*искривленностью*» кривой. В этом основное различие между кривой и прямой. Далее, не составляет труда заметить, что у разных кривых «*искривленность*» может различаться. Чтобы дать математическое описание данной величине, вводится понятие *кривизны* и *средней кривизны*.
- *Средней кривизной* некоторой *дуги* называется *отношение угла смежности* $\Delta\varphi$ *к длине этой дуги* Δl:

$$\Delta K_{\text{ср}} = \frac{\Delta\varphi}{\Delta l} \quad (1.4.1)$$

- Средняя кривизна дуги окружности радиуса R может быть найдена следующим образом: угол между касательными в двух точках равен центральному углу, на который опирается дуга. Длина же дуги может быть найдена как $\Delta l = R\Delta\varphi$

$$K_{\text{ср}} = \frac{\Delta\varphi}{\Delta l} = \frac{\Delta\varphi}{R\Delta\varphi} = \frac{1}{R} \quad (1.4.2)$$

- Итак, *средняя кривизна* любой дуги данной окружности есть величина, о*братная радиусу этой окружности*. Но в общем случае кривой она может изменяться на различных её участках. Чтобы охарактеризовать искривленность линии в данной точке, нужно брать среднюю кривизну для всё более мелких участков дуги, содержащей данную точку. Так, естественным образом перейдем в выражении (1.4.1) к *пределу* и получим выражение для кривизны.
- *Кривизной* данной кривой в её точке M называется *предел средней кривизны* дуги $\overset{\frown}{MM_1}$, при условии, что точка M_1 *неограниченно* приближается по данной кривой к точке M.

Определение скорости и ускорения

- Скорость точки определяется по формулам:

$$v = \frac{dS(t)}{dt} \quad \bar{v} = \bar{\tau}\frac{dS(t)}{dt} \quad (1.4.3)$$

- Ускорение определяется как производная от вектора скорости:

$$\bar{a} = \frac{d\bar{v}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\bar{\tau}\frac{dS}{dt}\right) = \bar{\tau}\frac{d^2S}{dt^2} + \frac{d\bar{\tau}}{dt}\cdot\frac{dS}{dt} =$$

$$= \bar{\tau}\frac{d^2S}{dt^2} + \left(\frac{d\bar{\tau}}{dS}\cdot\frac{ds}{dt}\right)\frac{ds}{dt} = \bar{\tau}\frac{d\bar{v}}{dt} + \bar{n}\frac{1}{\rho}\left(\frac{dS}{dt}\right)^2 =$$

$$= \bar{\tau}\cdot a_\tau + \bar{n}\frac{v^2}{\rho} = \bar{a}_\tau + \bar{a}_n \quad (1.4.4)$$

- Во втором слагаемом в формуле (1.4.4) мы совершили переход от производной по t к производной по s. Далее воспользовались формулой (1.4.2) в предельной форме, ведь, действительно,

$$\frac{d\bar{\tau}}{ds} = \bar{n}\cdot\frac{d\varphi}{ds} = \frac{d\varphi}{\rho d\varphi}\bar{n} = \frac{1}{\rho}\bar{n} \quad (1.4.5)$$

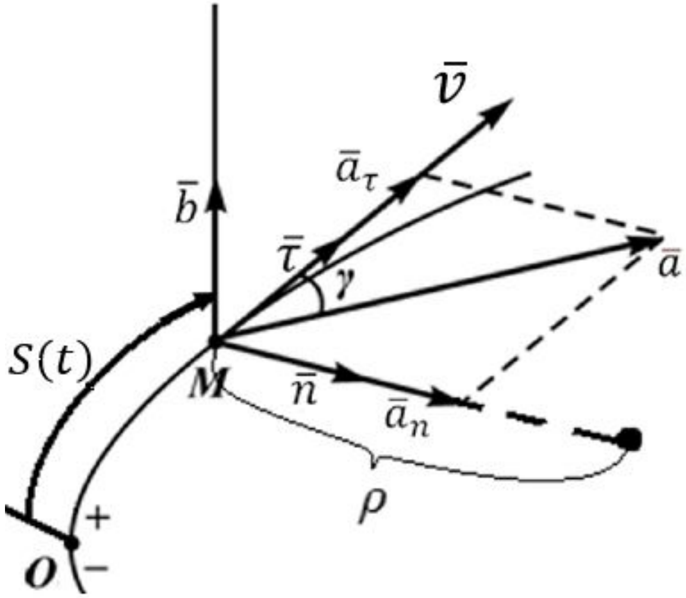


Рис. 1.4.3

Определение скорости и ускорения

- $\bar{a}_\tau = \bar{\tau}\frac{\mathrm{d}v(t)}{\mathrm{d}t} = \bar{\tau}\frac{\mathrm{d}^2 S(t)}{\mathrm{d}t^2}$ (1.4.6) – Касательное ускорение
- $\bar{a}_n = \bar{v}(t) \cdot \frac{\mathrm{d}\bar{\tau}}{\mathrm{d}t} = \bar{n}\frac{v^2(t)}{\rho}$ (1.4.7) – Нормальное ускорение
- ρ — радиус кривизны траектории в данной точке (например, для окружности: ρ = R, для прямой линии $\rho = \infty$). (R – радиус окружности)
- Полное ускорение точки определяется следующим образом:

$$a = \sqrt{{a_\tau}^2 + {a_n}^2}$$

$$\bar{a} = \bar{a}_\tau + \bar{a}_n \quad (1.4.8)$$

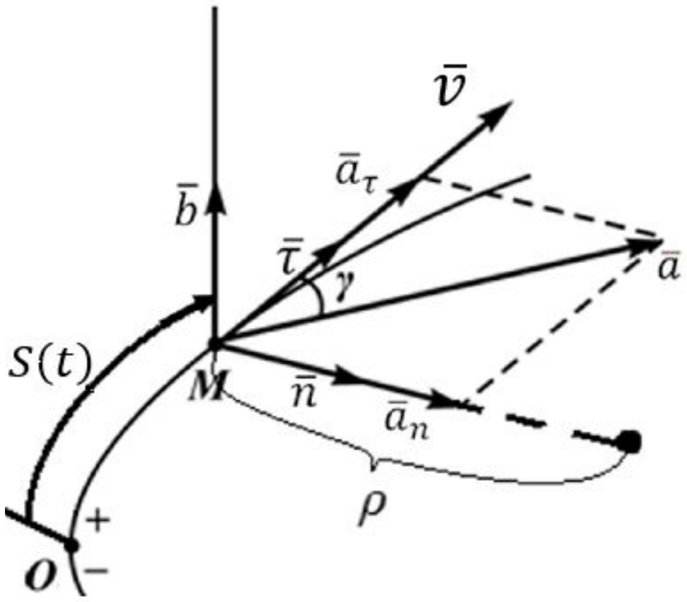


Рис. 1.4.4

Определение сложного движения

- До сих пор при изучении движения точки, мы всегда предполагали, что система координат *Oxyz*, относительно которой рассматривалось движение, является *неподвижной*. Теперь рассмотрим случай, когда система координат *Oxyz* также движется, так что движутся как сама точка *M*, так и СК *Oxyz*, по отношению к другой СК $O_1x_1y_1z_1$ являющейся неподвижной
- На рис. 1.5.1 показаны:
  1. условно принимаемая за неподвижную система отсчета $O_1x_1y_1z_1$
  2. Движущаяся относительно неподвижной системы отсчета *Oxyz*
  3. Точка *M*, перемещающаяся по отношению к подвижной системе отсчета.
- Этот случай, когда движение точки *M* рассматривается *одновременно в двух СК* – подвижной и неподвижной, называется *сложным движением точки.*

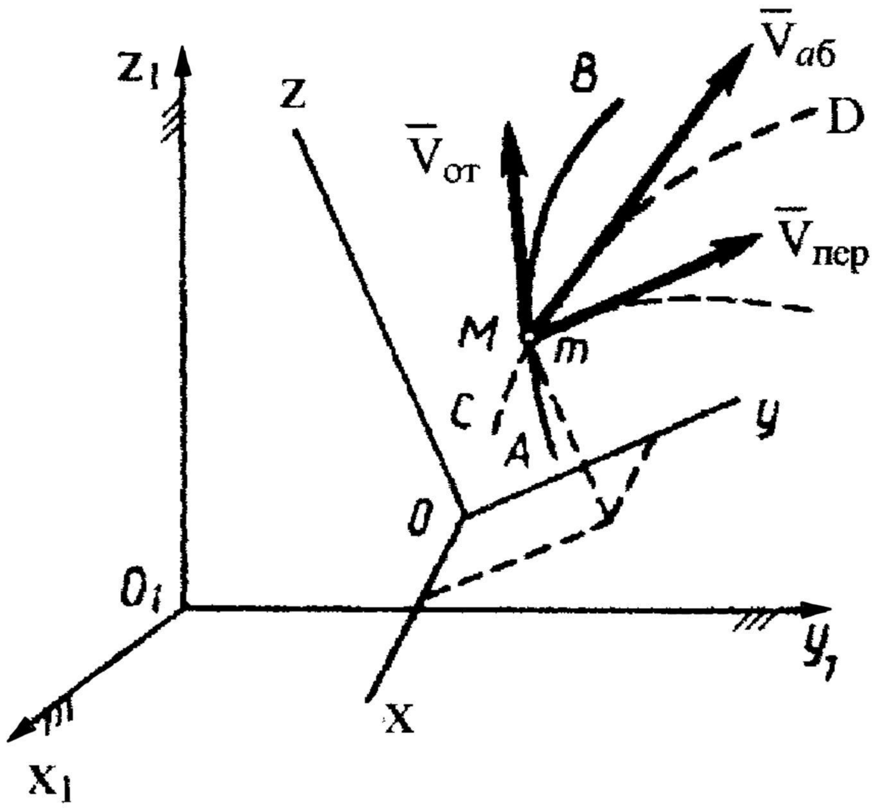


Рис. 1.5.1

Основные кинематические характеристики

- Движение точки *М* по отношению к неподвижной системе отсчета – *абсолютное движение*. Её скорость и ускорение по отношению к неподвижным осям называются соответственно *абсолютной скоростью и абсолютным ускорением*.
- Движение точки *относительно подвижной СК* называется относительным движением. Скорость и ускорение точки *М* по отношению к подвижным осям называются *относительной скоростью* и *относительным ускорением*.
- Движение подвижной СК вместе с неизменно связанными с ней геометрическими точками относительно неподвижной СК называется *переносным движением. Переносной скоростью и переносным ускорением* называются скорость и ускорение относительно неподвижной СК точки *М’,* неизменно связанной с подвижными осями, с которой
совпадает в *данный момент времени движущаяся точка М.*
- В процессе относительного движения, точка *М* оказывается в различных местах (точках) подвижной СК. Обозначим *М’* ту точку подвижной СК, с которой совпадает в *данный момент* движущаяся точка *М*. Точка *М’* движется вместе с подвижной СК с некоторой скоростью $\bar{v}_{M'}$ и ускорением $\bar{a}_{M'}$. *Эти величины служат переносными скоростью и ускорением точки М.*
- Скорости и ускорения в сложном движении связаны строгими математическими зависимостями – *теоремой сложения скоростей* и *теоремой сложения ускорений.*

Теорема о сложении скоростей

- При сложном движении *абсолютная скорость* точки равна *векторной сумме относительной и переносной скоростей:*

$$\bar{v} = \bar{v}^e + \bar{v}^r \quad (1.5.1)$$

Доказательство:

- Рассмотрим движение точки *M*: ее положение относительно *неподвижной* системы отсчета определяется вектором $\bar{r}$, а относительно *подвижной* – вектором $\bar{r'}$. Для любого момента времени:

$$\bar{r} = \bar{r}_0 + \bar{r'} = \bar{r}_0 + x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k} \quad (1.5.2)$$

- по отношению к неподвижной СК все величины являются *переменными* – от движения подвижных осей, либо в следствие относительного движения. Продифференцируем по времени:

$$\frac{d\bar{r}}{dt} = \frac{d\bar{r}_0}{dt} + x\frac{d\bar{i}}{dt} + +y\frac{d\bar{j}}{dt} + z\frac{d\bar{k}}{dt} + \frac{dx}{dt}\bar{i} + \frac{dy}{dt}\bar{j} + \frac{dz}{dt}\bar{k} =$$

$$= \frac{d\bar{r}_0}{dt} + \bar{\omega} \times \bar{r'} + \frac{d\bar{r'}}{dt} \quad (1.5.3)$$

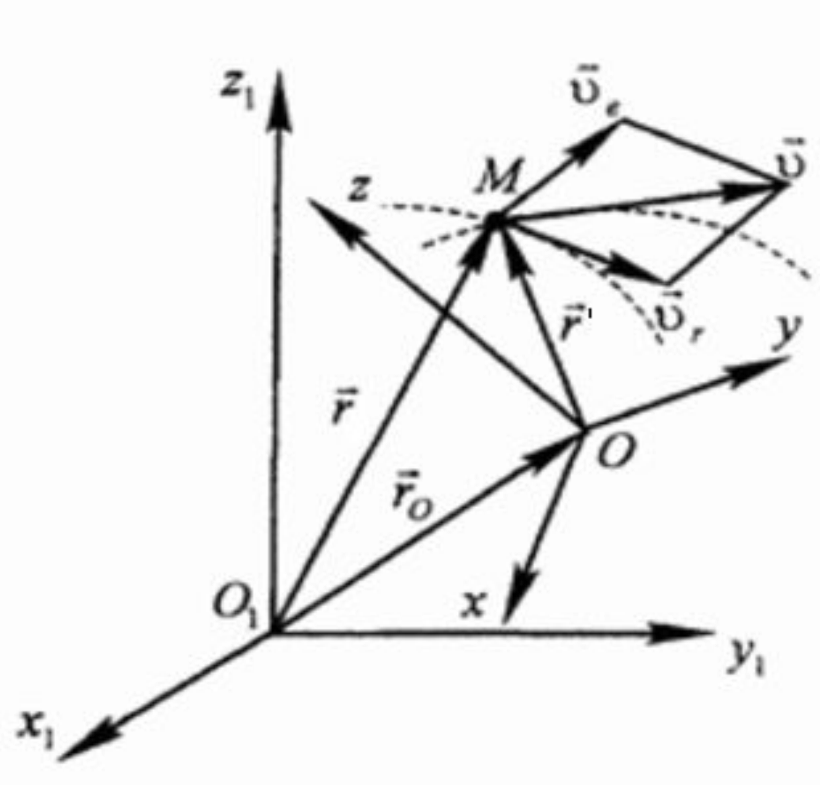


Рис. 1.5.2

Теорема о сложении скоростей

- Проанализируем формулу (1.5.3):
- $\frac{\tilde{d}\overline{r'}}{dt}$ - Производная радиуса вектора точки *в подвижной СК относительно подвижной СК* (а также относительная скорость)
- $\frac{d\bar{r}}{dt}$ - Скорость точки *M относительно неподвижной СК* (абсолютная скорость)
- $\frac{d\overline{r_0}}{dt}$ - Скорость точки *O*, *закрепленной в центре подвижной СК, относительно неподвижной СК*
- $\bar{\omega} \times \overline{r'}$ - Скорость, вызванная вращением подвижной СК вокруг своего центра
- $\frac{d\overline{r_0}}{dt} + \bar{\omega} \times \overline{r'} = \bar{v}^e$ - переносная скорость
- $\bar{\omega}$ - угловая скорость вращения подвижной СК.
- В своих рассуждениях мы пользовались формулами Пуассона для дифференцирования ортов.

$$\frac{d\bar{I}}{dt} = \bar{\omega} \times \bar{I}, \frac{d\bar{J}}{dt} = \bar{\omega} \times \bar{J}, \frac{d\bar{K}}{dt} = \bar{\omega} \times \bar{K} \quad (1.5.4)$$

- Из этого следует формула Бура:

$$\frac{d\overline{r'}}{dt} = \bar{\omega} \times \overline{r'} + \frac{\tilde{d}\overline{r'}}{dt} \quad (1.5.5)$$

- Получаем выражения:

$$\bar{v} = \overline{v_0} + \bar{\omega} \times \overline{r'} + \bar{v}^r; \ \bar{v} = \bar{v}^e + \bar{v}^r \quad (1.5.6)$$

Теорема о сложении ускорений

- При сложном движении *абсолютное ускорение* точки равно *векторной сумме относительного, переносного и кориолисова (поворотного) ускорений*:

$$\bar{a} = \bar{a}^e + \bar{a}^r + \bar{a}^k \quad (1.5.7)$$

$$\bar{a}^k = 2[\bar{\omega} \times \bar{v}^r]$$

Доказательство:

- Возьмем полную производную от скорости:

$$\bar{a} = \frac{d\bar{v}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\overline{v_0} + \bar{\omega} \times \overline{r'} + \bar{v}^r\right) =$$

$$= \frac{d\overline{v_0}}{dt} + \frac{d\bar{\omega}}{dt} \times \overline{r'} + \bar{\omega} \times \frac{d\overline{r'}}{dt} + \frac{d\bar{v}^r}{dt}$$

- Применим формулу Бура для векторов $\overline{r'}$ и $\bar{v}^r$:

$$\frac{d\overline{r'}}{dt} = \bar{\omega} \times \overline{r'} + \frac{\tilde{d}\overline{r'}}{dt}$$

$$\frac{d\bar{v}^r}{dt} = \bar{\omega} \times \bar{v}^r + \frac{\tilde{d}\bar{v}^r}{dt}$$

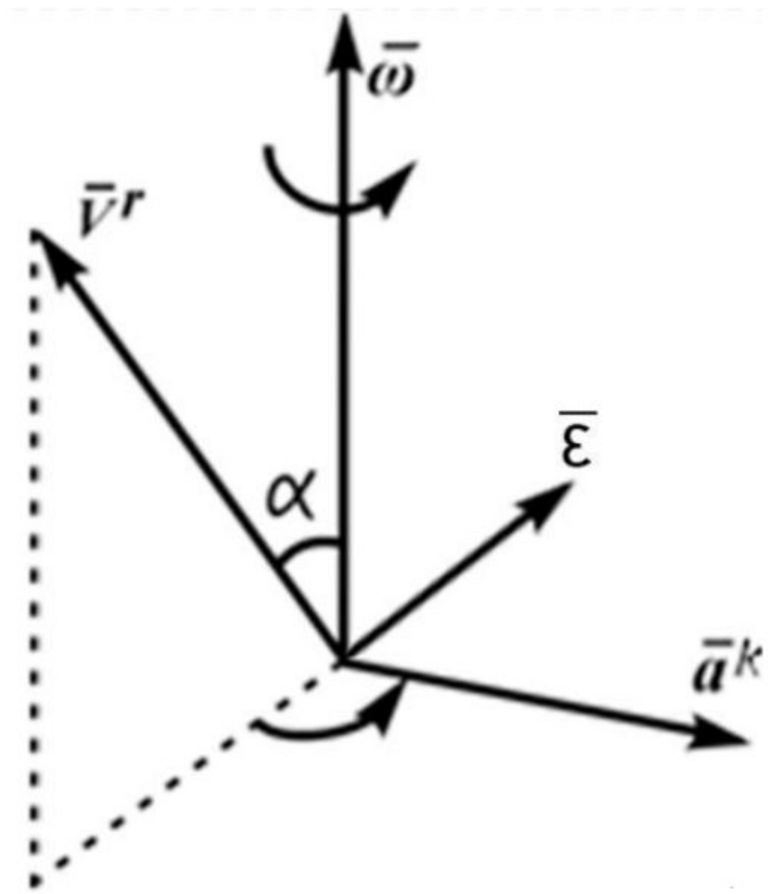


Рис. 1.5.3

Теорема о сложении ускорений

- $$\bar{a} = \frac{d\bar{v}_0}{dt} + \frac{d\overline{\omega}}{dt} \times \overline{r'} + \overline{\omega} \times \left(\overline{\omega} \times \overline{r'} + \frac{\tilde{d}\overline{r'}}{dt}\right) + \left(\overline{\omega} \times \bar{v}^r + \frac{\tilde{d}\bar{v}^r}{dt}\right) =$$

$$= \bar{a}_0 + \bar{\varepsilon} \times \overline{r'} + \overline{\omega} \times (\overline{\omega} \times \overline{r'}) + 2[\overline{\omega} \times \bar{v}^r] + \bar{a}^r \quad (1.5.8)$$

- $\bar{a}^e = \bar{a}_0 + \bar{\varepsilon} \times \overline{r'} + \overline{\omega} \times (\overline{\omega} \times \overline{r'}) \quad (1.5.9)$ – переносное ускорение
- $\bar{a}^r$ – относительное ускорение
- $\bar{a}^k = 2[\overline{\omega} \times \bar{v}^r] \quad (1.5.10)$ – ускорение Кориолиса
- В итоге получаем формулу для ускорения:

$$\bar{a} = \bar{a}^e + \bar{a}^r + \bar{a}^k \quad (1.5.11)$$

- Отметим направление углового ускорения ε: в отличие от случая вращения вокруг неподвижной оси, когда вектор угловой скорости менялся только по модулю, но не по направлению, а ε был коллинеарным ω, теперь направление угловой скорости подвижной СК относительно неподвижной может изменяться в результате вращения её осей.
- В общем случае угловое ускорение направлено не вдоль мгновенной оси, а как производная по времени от вектора $\overline{\omega}$, то есть по касательной к его годографу.

Кинематика Твёрдого тела

- *Твёрдое тело* (ТТ) – система материальных точек.
- *Абсолютно* твёрдое тело – идеализированная механическая система материальных точек, у которой взаимные расстояния между всеми точками постоянны.
- *Свободное* твёрдое тело – тело, на которое не наложено никаких связей, кроме тех, что обеспечивают постоянство расстояний между точками.
- *Число степеней свободы* твёрдого тела – число независимых движений, которое может совершать тело.
- Если на тело наложены только геометрические связи, которые накладывают ограничения на координаты точек, то *число степеней свободы тела будет равно числу его независимых координат*.

Основная теорема кинематики твёрдого тела

Основная теорема кинематики твёрдого тела (теорема Грасгофа): Проекции скоростей двух ∀ точек ТТ на отрезок, соединяющий их, равны.

Доказательство:

$$\overline{AB} = \overline{r_b} - \overline{r_a}$$

Продифференцируем по времени:

$$\frac{d\overline{AB}}{dt} = \frac{d\overline{r_b}}{dt} - \frac{d\overline{r_a}}{dt} = \overline{v_b} - \overline{v_a} \quad (2.1.1)$$

$$(\overline{AB})^2 = (AB)^2, \text{т. к. } |\overline{AB}| = const \; (2.1.2)$$

Продифференцируем равенство по времени:

$$2\overline{AB}\frac{d\overline{AB}}{dt} = 0 \rightarrow$$

$$2\overline{AB}(\overline{v_b} - \overline{v_a}) = 0 \;\rightarrow\; \overline{AB}\cdot\overline{v_b} = \overline{AB}\cdot\overline{v_a}$$

Раскроем скалярное произведение:

$$\text{т.е. } v_b \cdot \cos\beta = v_a \cdot \cos\alpha \quad (2.1.3)$$

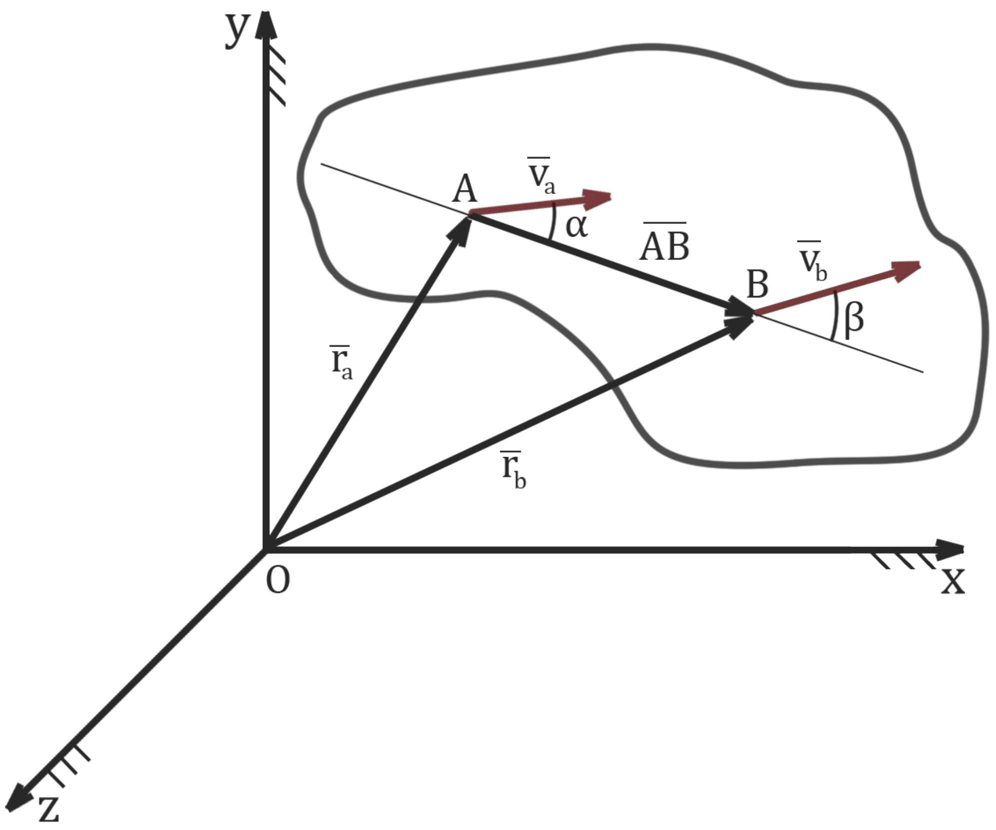


Рис. 2.1.1
К доказательству основной теоремы кинематики ТТ

Поступательное движение твердого тела

- *Поступательное движение ТТ* – такое движение твердого тела, при котором любая прямая, проведенная в этом теле, перемещается, оставаясь параллельной самой себе.
- При поступательном движении тело имеет 3 или менее степеней свободы.
- *Свойства поступательного движения* можно сформулировать с помощью теоремы: при поступательном движении все точки тела *описывают одинаковые (при наложении совпадающие) траектории и имеют в каждый момент времени одинаковые по модулю и направлению скорости и ускорения.*

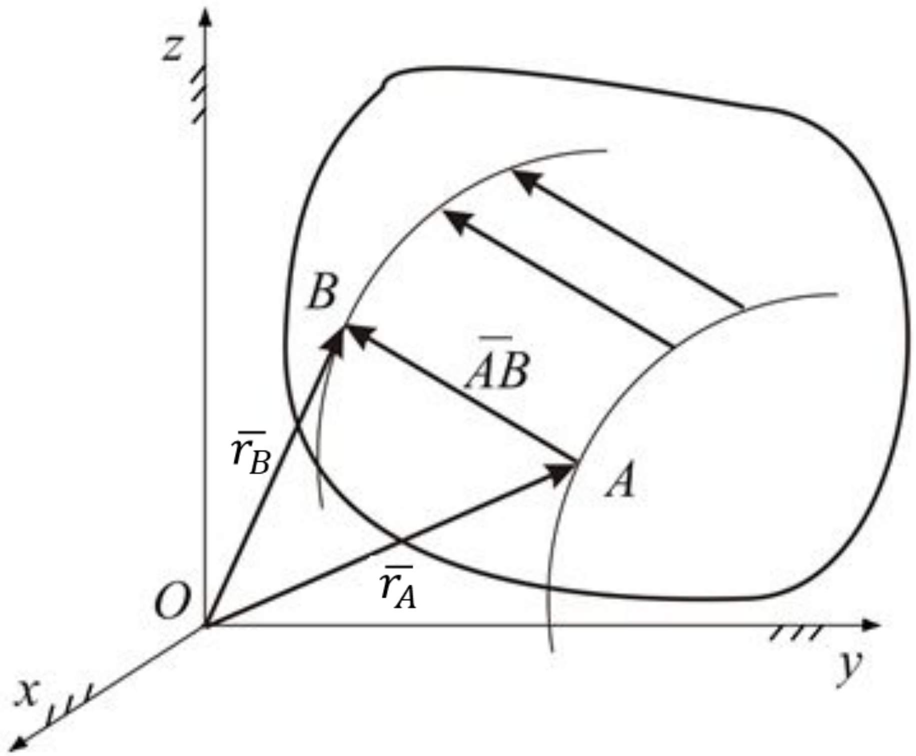


Рис. 2.2.1
Поступательное движение ТТ

Доказательство теоремы поступательного движения

- $$\overline{AB} = \overline{r_b} - \overline{r_a}$$

Дифференцируем по времени:

$$\frac{d\overline{AB}}{dt} = \frac{d\overline{r_b}}{dt} - \frac{d\overline{r_a}}{dt}$$

$$\overline{AB} = const \rightarrow \overline{v_b} = \overline{v_a} \quad (2.2.1)$$

- После повторного дифференцирования по времени имеем:

$$\overline{a_b} = \overline{a_a} \quad (2.2.2)$$

- При поступательном движении *общую* для всех точек тела скорость v называют *скоростью поступательного движения тела*, а ускорение a — *ускорением поступательного движения тела*. Векторы можно изображать приложенными к любой точке тела.

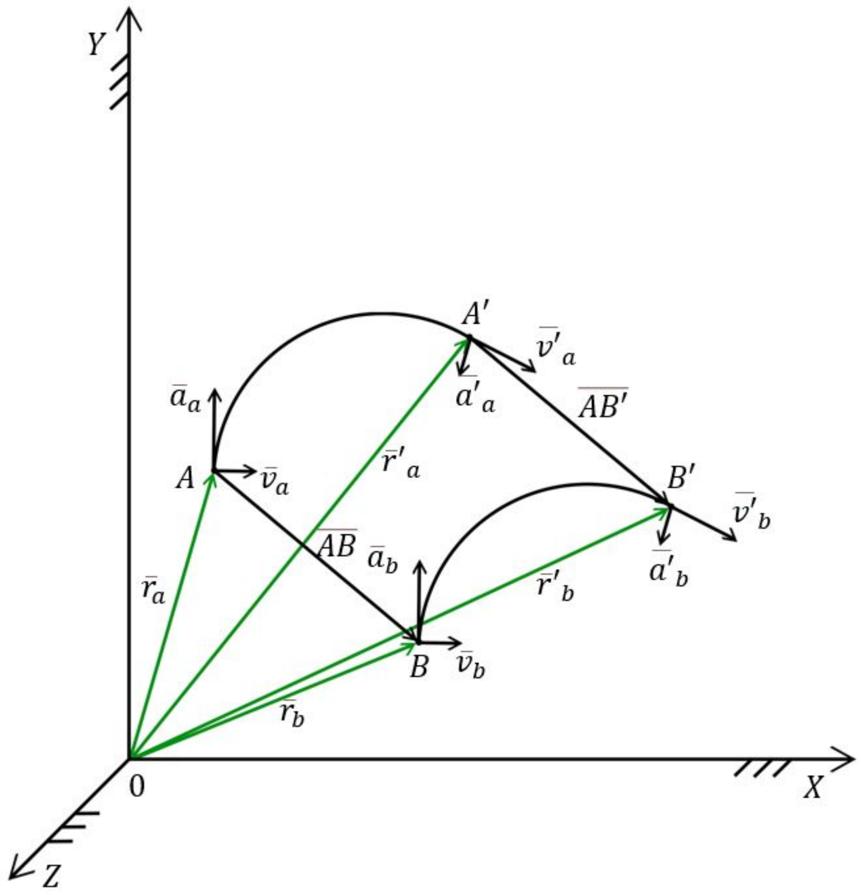


Рис. 2.2.2
к теореме поступательного движения ТТ

Вращение твердого тела вокруг неподвижной оси

- *Характеристики и термины*

- *Вращательное движение тела вокруг неподвижной оси* – движение твердого тела, при котором хотя бы две его точки О и О' остаются *неподвижными*, неподвижную прямую ОО' называют *осью вращения*. Траектории *остальных* точек являют собой *окружности*, лежащие в плоскостях, перпендикулярных оси вращения. Центры окружностей находятся на этой оси.
- Положение тела определено, если задан угол φ (угол поворота тела) между полуплоскостями $П_0$ и П, одна из которых неподвижна, а другая жестко связана с телом.
- При вращательном движении тела оно имеет одну степень свободы (угол поворота).

Вращение твердого тела вокруг неподвижной оси

Характеристики и термины

- Уравнение вращательного движения твёрдого тела:
$$\varphi = \varphi(t) \quad (2.3.1)$$
- Для характеристики изменения угла поворота с течением времени вводится величина, называемая угловой скоростью ω:
$$\omega = \frac{d\varphi}{dt} = \dot{\varphi} \quad (2.3.2)$$
- Угловая скорость на чертеже изображается дуговой стрелой, направленной в сторону вращения.

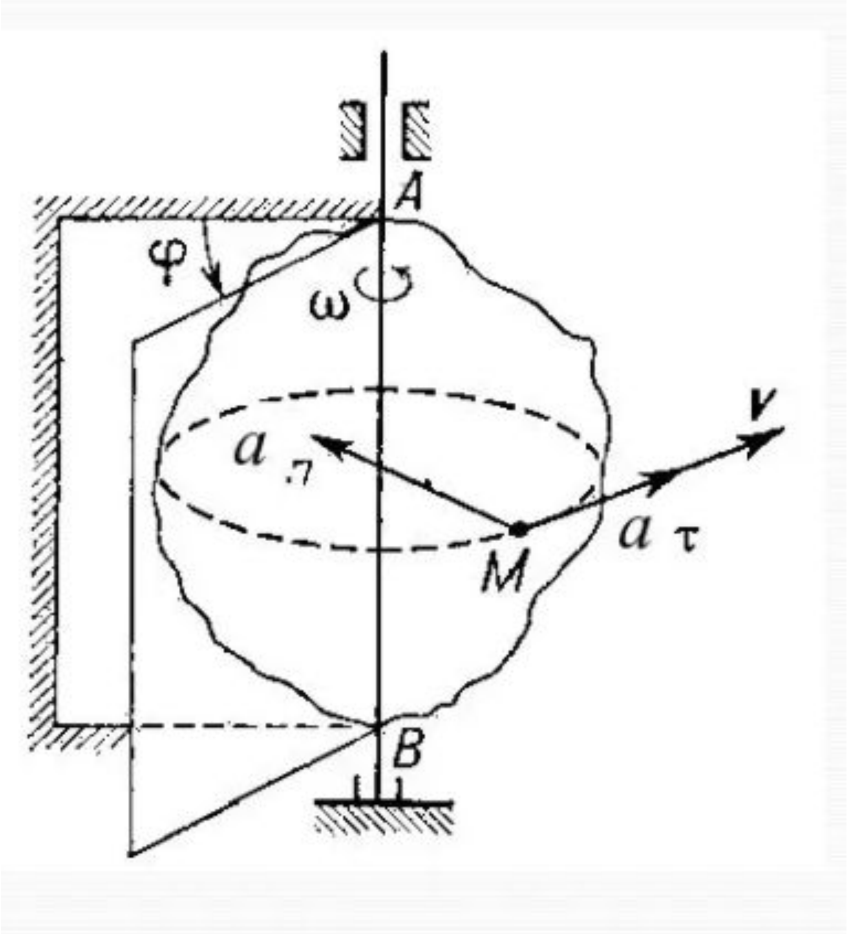


Рис. 2.3.1
вращательное движение тела

Вращение твердого тела вокруг неподвижной оси

Угловое ускорение ε

- Угловое ускорение – мера изменения угловой скорости:

$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\varphi}{dt^2} = \dot{\omega} = \ddot{\varphi} \quad (2.3.3)$$

- В нашем случае вращения тела вокруг *неподвижной оси* направление углового ускорение определить весьма просто: будучи производной вектора $\overline{\omega}$, который при таких условиях *всегда* направлен вдоль оси вращения, вектор $\bar{\varepsilon}$ также всегда направлен вдоль оси вращения, причем эти два вектора со-направленны, если круговая скорость тела увеличивается, и, напротив, направлены в противоположные стороны, если круговая скорость уменьшается (основы дифференциального исчисления).

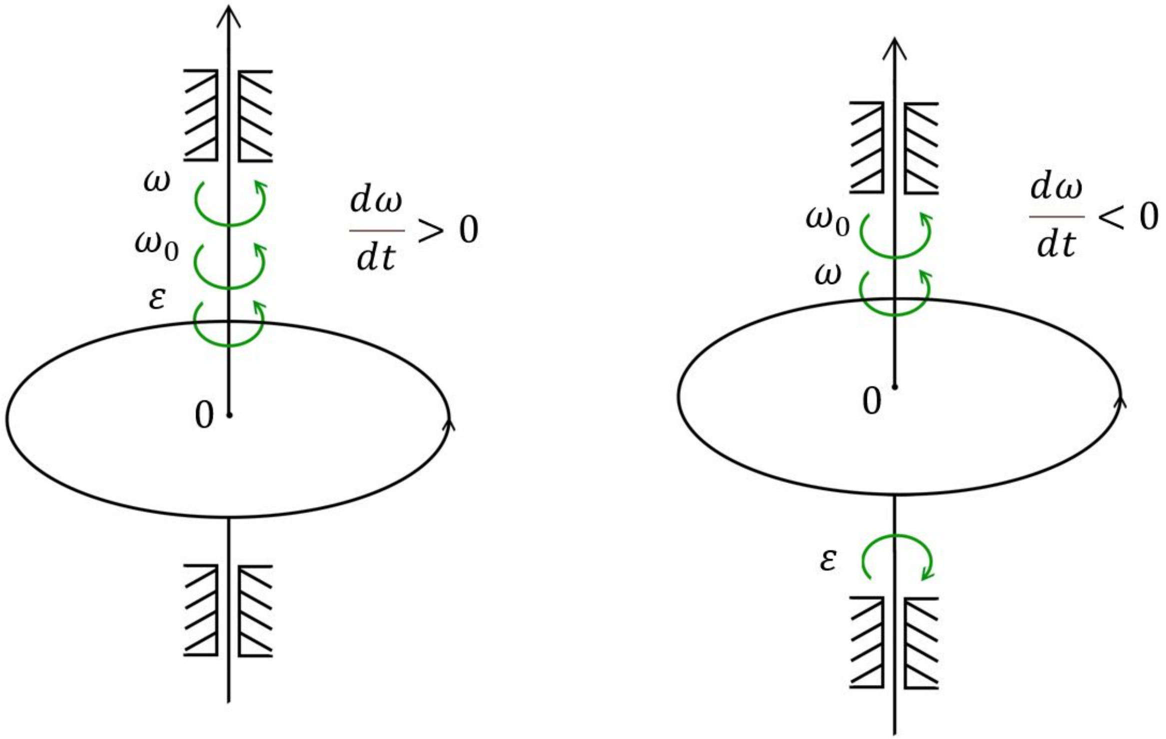


Рис. 2.3.2
к определению направления углового ускорения
(вращение вокруг неподвижной оси)

Вращение твердого тела вокруг неподвижной оси

Скалярные выражения для скоростей и ускорений точек тела

Траектории точек вращающегося тела – окружности, поэтому удобно воспользоваться естественным способом задания движения тела. Дуговая координата, определяющая положение точки на траектории, связана с углом поворота равенством:

$$s = \varphi R \quad (2.3.4)$$

Откуда:

$$\dot{s} = v_\tau = v = \dot{\varphi} R \quad (2.3.5)$$

Из кинематики точки в ЕСК:

$$\bar{a} = \overline{a_n} + \overline{a_\tau}$$

$$a_n = \frac{v^2}{\rho} = \frac{\dot{\varphi}^2 R}{R} = \omega^2 R \quad (3.6)$$, ρ – радиус кривизны ($\rho = R$)

$$a_\tau = \ddot{s} = \ddot{\varphi} R = \varepsilon R \quad (2.3.7)$$

Тогда модуль ускорения равен:

$$a = \sqrt{{a_n}^2 + {a_\tau}^2} = R\sqrt{\omega^4 + \varepsilon^2} \quad (2.3.8)$$

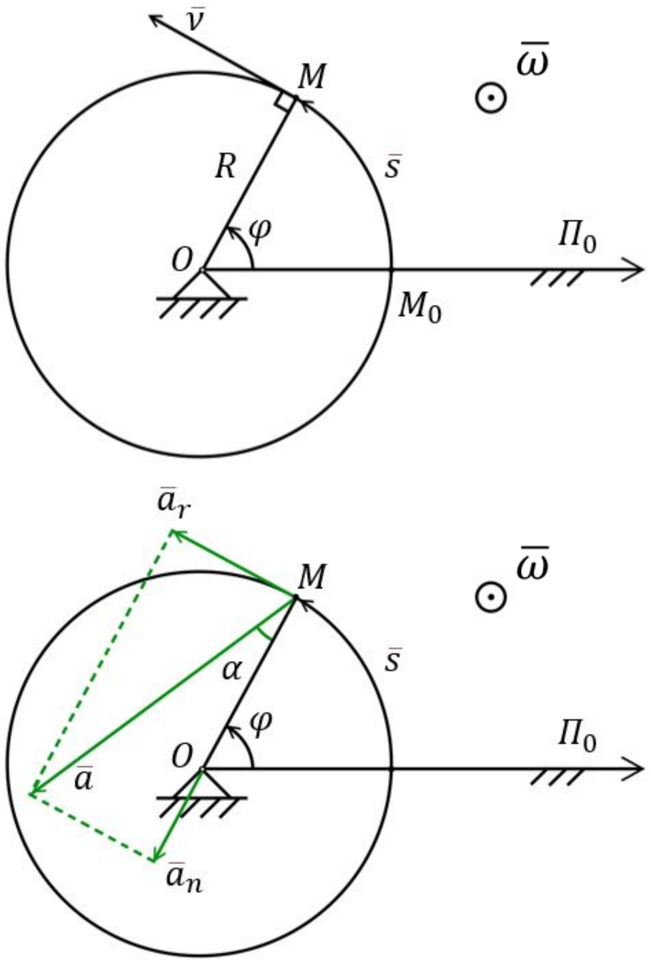


Рис. 2.3.3
Кинематика точки ТТ в ЕСК

Вращение твердого тела вокруг неподвижной оси

Векторные выражения для скоростей и ускорений

Модуль скорости точки вращающегося тела равен модулю векторного произведения:

$$\bar{\omega} \times \bar{r}$$

$$v = \omega r \sin\beta$$

Получаем $\bar{v} = \bar{\omega} \times \bar{r}$ (2.3.9) – формула Эйлера.

Продифференцируем её, чтобы получить выражение для ускорения:

$$\bar{a} = \frac{d\bar{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(\bar{\omega} \times \bar{r}) = \frac{d\bar{\omega}}{dt} \times \bar{r} + \bar{\omega} \times \frac{d\bar{r}}{dt} =$$

$$= \bar{\varepsilon} \times \bar{r} + \bar{\omega} \times \bar{\omega} \times \bar{r} \text{ (2.3.10)}$$

Первое слагаемое здесь есть *касательное* ускорение, а второе – *нормальное*.

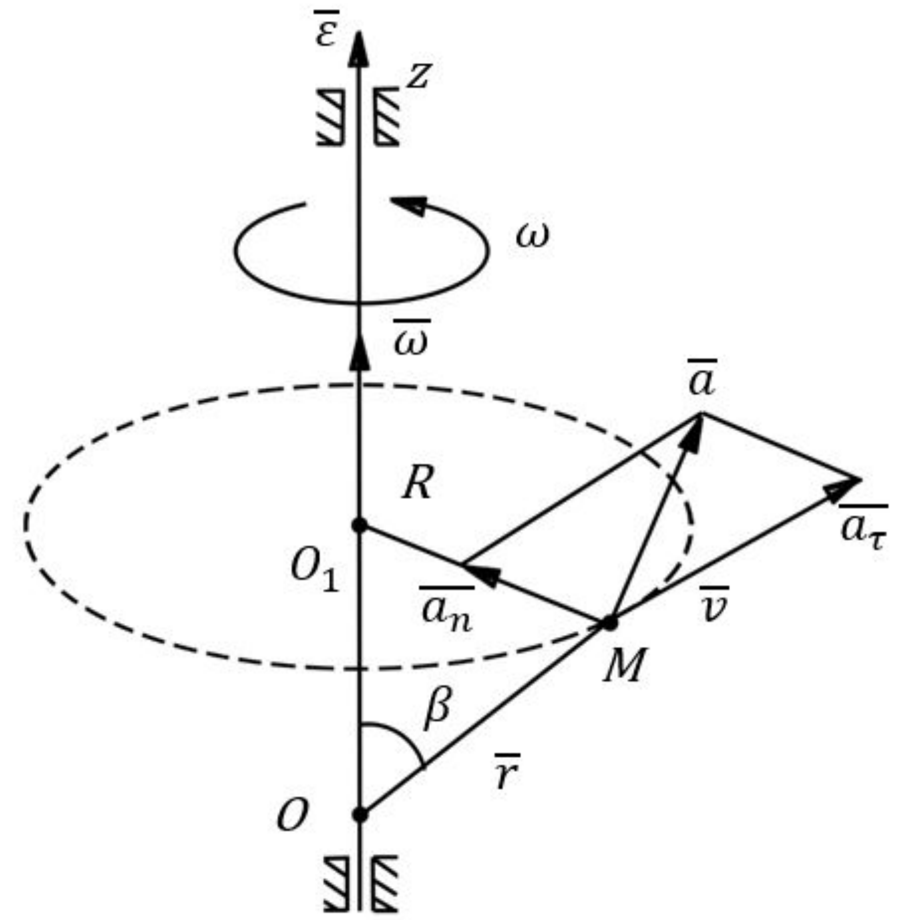


Рис. 2.3.4
к векторному представлению кинематических характеристик точки ТТ

Плоскопараллельное движение твёрдого тела

Определение

- *Плоскопараллельным (или просто плоским)* движением твёрдого тела называют такое движение, при котором все точки перемещаются в плоскостях, параллельных некоторой неподвижной плоскости.
- Рассмотрим сечение (*S*) тела какой-нибудь плоскостью *Oxy*, параллельной плоскости П. При плоскопараллельном движении все точки тела, лежащие на прямой *MM’* (они перпендикулярны к сечению (*S*), то есть к плоскости П) движутся тождественно и в каждый момент времени имеют *одинаковые* скорости и ускорения. Поэтому *для изучения движения всего тела достаточно изучить, как движется сечение S тела в плоскости Oxy*.

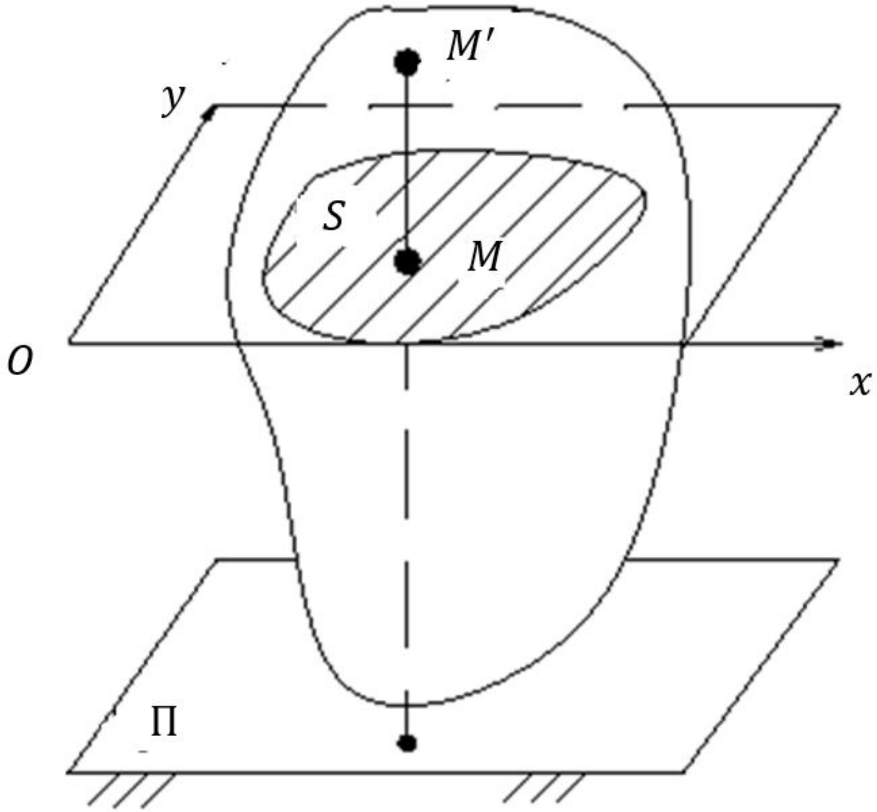


Рис. 2.4.1
К определению ПП движения

Плоскопараллельное движение твёрдого тела

- *Уравнения плоскопараллельного движения*
- Следующие уравнения определяют закон происходящего движения и называются уравнениями плоскопараллельного движения твердого тела:

$$\begin{cases} x_A = f_1(t) \\ y_A = f_2(t) \qquad (2.4.1) \\ \varphi_A = f_3(t) \end{cases}$$

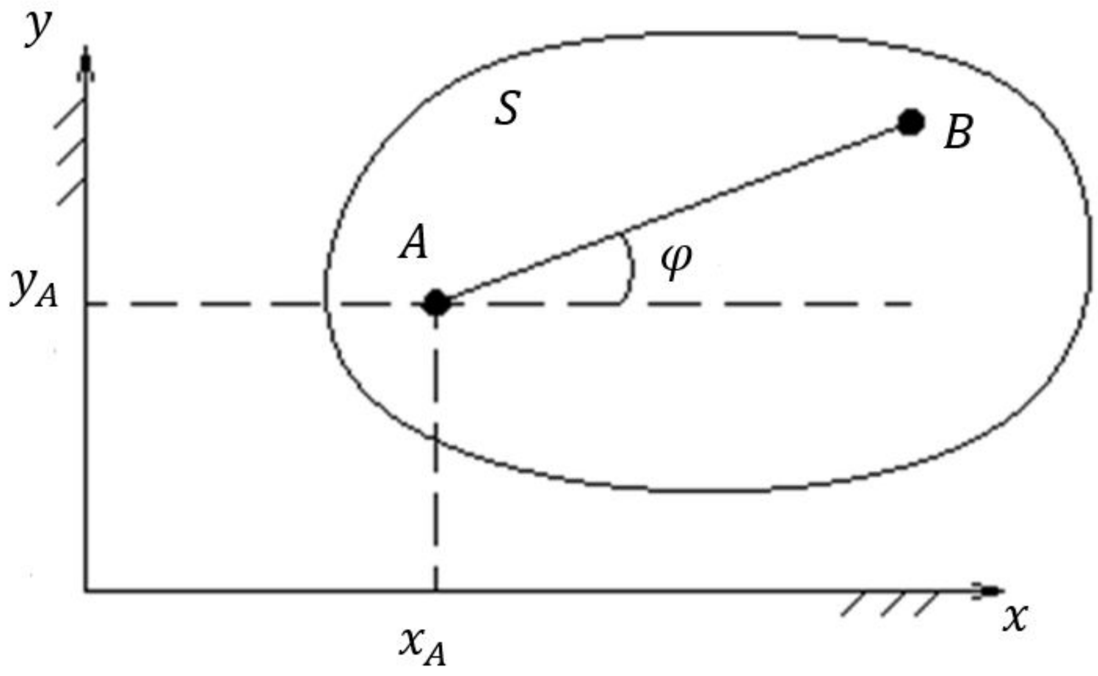


Рис. 2.4.2
К уравнениям движения

Плоскопараллельное движение твёрдого тела

- *Теорема о разложении движения*
- Формулируется так: плоское движение слагается из поступательного относительно точки, выбранной за полюс, и вращательного, относительно оси, проходящей через полюс фигуры и перпендикулярной плоскости фигуры.

Доказательство:

- Рассмотрим два последовательных положения I и II, которые занимает сечение S движущегося тела в моменты времени t_1 и $t_2 = t_1 + \Delta t$. Легко видеть, что сечение S, а с ним и все тело можно привести из положения I в положение II следующим образом: переместим сначала тело поступательно, так, чтобы полюс A, двигаясь вдоль своей траектории, пришел в положение A_1. При этом отрезок AB займет положение $A_1B'_1$, а затем повернем сечение вокруг полюса A_1 на угол φ.
При плоском движении тело имеет до 3 степеней свободы.

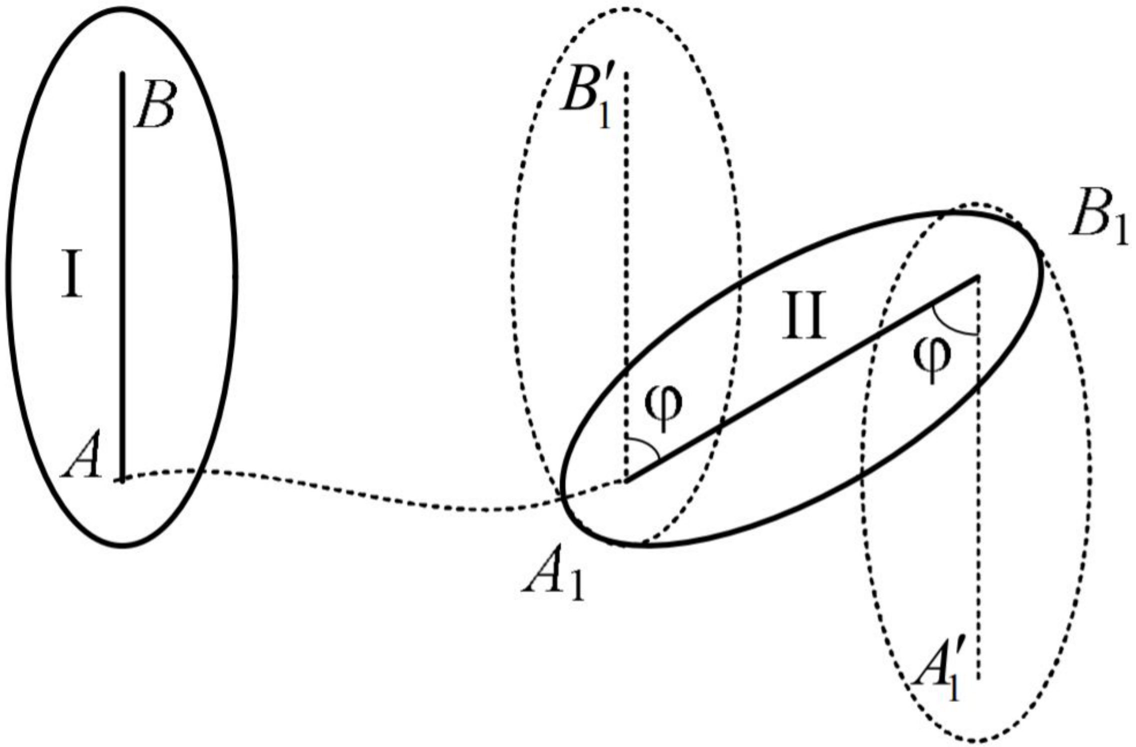


Рис. 2.4.3
Плоское движение как сумма поступательного и вращательного

Плоскопараллельное движение твёрдого тела

- *Основные кинематические характеристики плоского движения*

- Поступательные скорость, ускорение, угловая скорость и ускорение:

$$\bar{v}_{\text{пост}} = \bar{v}_a,\ \bar{a}_{\text{пост}} = \bar{a}_a,\ \overline{\omega}, \bar{\varepsilon} \ \ (2.4.2)$$

- Последние два вектора направлены вдоль оси вращения тела.
- Поступательные скорость и ускорение зависят от выбора полюса!

$$\bar{v}_A \neq \bar{v}_C, \bar{a}_A \neq \bar{a}_C \ \ (2.4.3)$$

- Покажем, что угловая скорость и ускорение не зависят от выбора полюса:

$$\varphi_1 = \varphi - \alpha, \qquad \alpha = const$$

$$\frac{d\varphi_1}{dt} = \frac{d\varphi}{dt} \to \omega_1 = \omega \ \ (2.4.4)$$

$$\frac{d^2\varphi_1}{dt^2} = \frac{d^2\varphi}{dt^2} \to \varepsilon_1 = \varepsilon \ \ (2.4.5)$$

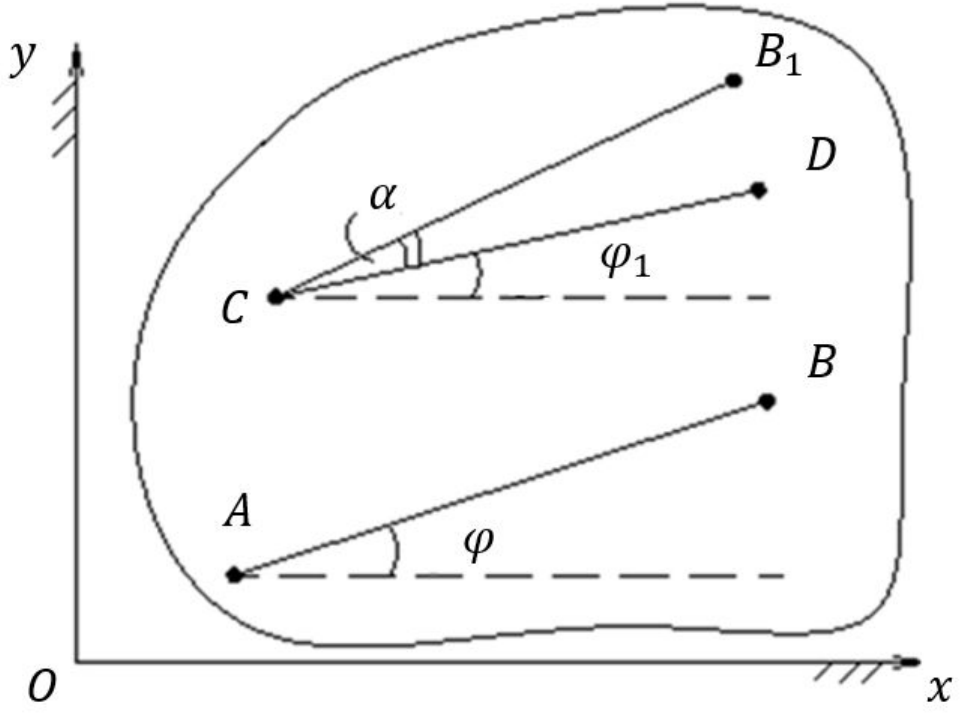


Рис. 2.4.4
К кинематике плоского движения

Плоскопараллельное движение твёрдого тела

Скорости точек тела при ПП-движении

- Скорость любой точки плоской фигуры равна геометрической сумме скорости полюса и вращательной скорости этой точки вокруг полюса.
- При доказательстве будем исходить из того, что плоскопараллельное движение твердого тела слагается из поступательного движения, при котором все точки тела движутся со скоростью v_a и из вращательного движения вокруг этого полюса. Чтобы разделить эти два вида движения, введем две системы отсчета: Оху – неподвижную, и Ox_1y_1 – движущуюся поступательно вместе с полюсом A. Относительно подвижной системы отсчета движение точки M будет «вращательным вокруг полюса A».

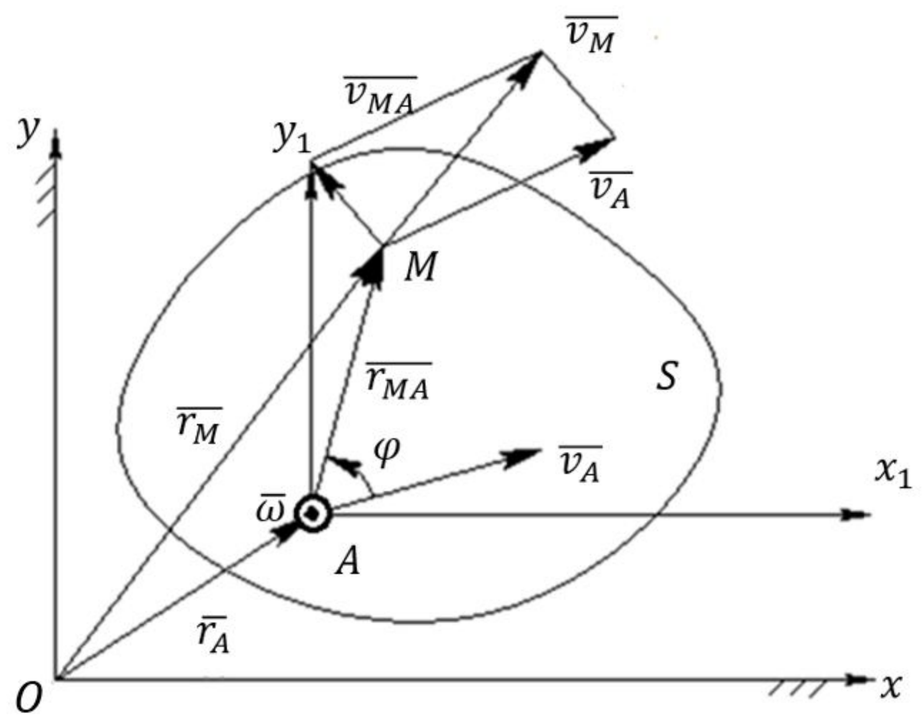


Рис. 2.4.5
К теореме о представлении скоростей

Плоскопараллельное движение твёрдого тела

- *Скорости точек при ПП-движении (продолжение)*

$$\bar{r}_M = \bar{r}_A + \bar{r}_{AM}$$

$$\frac{d\bar{r}_M}{dt} = \frac{d\bar{r}_A}{dt} + \frac{d\bar{r}_{AM}}{dt} \rightarrow \bar{v}_M = \bar{v}_A + \bar{v}_{AM} \quad (2.4.6)$$

$|\bar{r}_{AM}| = const$ из определения абсолютно твёрдого тела, тогда:

$$\bar{v}_{AM} = \frac{d\bar{r}_{AM}}{dt} = |\bar{r}_{AM}| \frac{d\varphi}{dt} \bar{\tau} = AM \cdot \omega\bar{\tau} = \bar{\omega} \times \overline{AM} \rightarrow$$
$$\rightarrow v_{AM} = AM \cdot \omega \quad (2.4.7)$$

$$\bar{v}_M = \bar{v}_A + \bar{v}_{AM} = \bar{v}_A + \bar{\omega} \times \overline{AM} \quad (2.4.8)$$

- Скорость любой точки можно представить векторной суммой скорости полюса и скорости точки вокруг полюса.

Мгновенный центр скоростей

- Точка плоской фигуры, скорость которой *в данный момент времени* равна нулю, называется *мгновенным центром скоростей P*.
- *Теорема:* при плоском движении фигуры *в каждый момент времени мгновенный центр скоростей существует и единственен.*

Доказательство:

- Пусть в некоторый момент времени известна угловая скоростьω фигуры и линейная скорость v_A некоторой точки A. Проведем прямую AN, перпендикулярную вектору v_A и отложим на ней отрезок

$$AP = \frac{v_A}{\omega}$$

- Найдем скорость точки P фигуры при помощи векторной формулы (2.4.8):

$$\overline{v_P} = \overline{v_A} + \overline{v_{PA}} \ \ (2.4.9)$$

$$v_{PA} = \omega \cdot AP = \omega \cdot \frac{v_A}{\omega} = v_A \ \ \ (2.4.10)$$

- Оба вектора в правой части (2.4.9) перпендикулярны AN, т.е. параллельны, и направлены в противоположные стороны (рис. 2.4.6, слева). Модули их равны из (2.4.10).
- Получается, что $\overline{v_P} = 0$, то есть точка P является мгновенным центром скоростей.
- Единственность МЦС доказывается от противного.
- Пусть точка P – МЦС, тогда скорость любой точки тела выражается как её скорость вокруг МЦС (рис. 2.4.6, справа)

$$\overline{v_B} = \overline{v_P} + \overline{v_{BP}} = \overline{v_{BP}} \ \ (2.4.9)$$

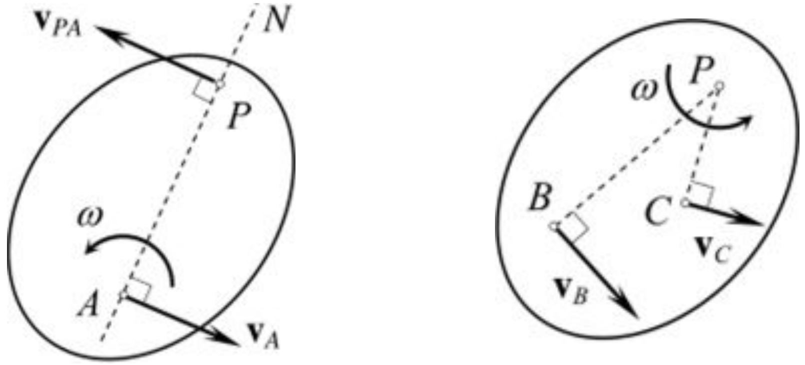


Рис. 2.4.6

Мгновенный центр ускорений

- Для нахождения ускорений точек тела при плоском движении можно снова воспользоваться теоремой о разложении движения.
- Путем дифференцирования формулы (2.4.6) можно получить выражение для ускорений точек тела при плоском движении:

$$\bar{a}_M = \frac{d\bar{v}_A}{dt} + \frac{d\bar{v}_{AM}}{dt} = \bar{a}_A + \frac{d(\overline{\omega} \times \overline{AM})}{dt} \quad (2.4.7)$$

$$\bar{a}_M = \bar{a}_A + \frac{d\overline{\omega}}{dt} \times \overline{AM} + \frac{d\overline{AM}}{dt} \times \overline{\omega} =$$

$$= \bar{a}_A + \bar{\varepsilon} \times \overline{AM} + \overline{\omega} \times (\overline{\omega} \times \overline{AM}) \quad (2.4.8)$$

- В формуле (2.4.8) первое слагаемое есть ускорение полюса, второе – тангенциальное ускорение точки M вокруг полюса, а третье – нормальное ускорение M вокруг полюса.

- Так, ускорение любой точки тела есть векторная сумма ускорения полюса и ускорения точки вокруг полюса (которое, в свою очередь, имеет нормальную и тангенциальную составляющую). В отличие от случая МЦС, ускорение точки вокруг полюса, вообще то говоря, не перпендикулярно прямой, соединяющей точку и полюс. Это вызвано наличием нормального ускорения и хорошо прослеживается при выведении формулы (2.4.8).

Мгновенный центр ускорений

- В каждый момент плоского движения тела в плоскости его движения, если ω и ε одновременно не равны нулю, имеется *единственная точка* сечения, *ускорение которой равно нулю*. Эту точку называют *мгновенным центром ускорений*. Будем обозначать её Q, а теорему о существовании и единственности доказывать не будем.
- Аналогично тому, как это было в случае МЦС, ускорение *любой* точки тела можно выразить как *векторную сумму тангенциального и нормального ускорений точки вокруг МЦУ*.
- Полное ускорение точки будет направлено *под углом* α к прямой, соединяющей её с МЦС (рис. 2.4.7) *в сторону дуговой стрелки углового ускорения тела* ε. Этот угол появляется вследствие наличия слагаемого, отвечающего за нормальное ускорение точки вокруг полюса. Можно выразить тангенс этого угла:

$$tg\alpha = \frac{\varepsilon}{\omega^2} \quad (2.4.9)$$

$$\overline{a_A} = \overline{a_Q} + \overline{a_{AQ}} = \overline{a_{AQ}} \quad (2.4.10)$$

$$a_A = AQ \cdot \sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4} \quad (2.4.11)$$

- Ускорения точек сечения тела можно определять так же, как это производилось при вращении тела вокруг неподвижной оси с угловой скоростью ω и угловым ускорением ε: в данном случае мгновенной оси вращения, совпадающей с МЦУ.
- В общем случае МЦУ и МЦС – это разные точки.

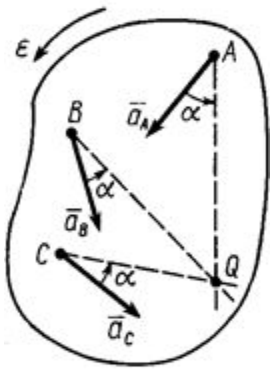


Рис. 2.4.7
Мгновенный центр ускорений

Основные понятия ТММ

- *Теория механизмов и машин* занимается созданием и изучением высокопроизводительных механизмов и машин.
- *Механизм* – совокупность подвижных материальных тел, одно из которых закреплено, а все остальные совершают вполне определенные движения относительно неподвижного материального тела.
- *Целью работы* механизма является преобразование одного вида движения в другой.
- *Звенья* – твёрдые тела, из которых состоит механизм. Жидкости и газы в ТММ звеньями не считаются.
- *Стойка – неподвижное звено*. Конфигурация стойки в курсе ТММ не изучается.
- *Звено*, которому изначально сообщается движение, называется *входным* (начальным, ведущим). Число входных звеньев обычно равно числу степеней свободы механизма, т. е. числу его обобщенных координат, но возможно и несовпадение их.
- *Звено*, совершающее движение, для выполнения которого предназначен механизм – *выходное звено*.
- *Машина* – техническое устройство, выполняющее преобразование энергии, материалов и информации с целью облегчения физического и умственного труда человека, повышения его качества и производительности. Дадим краткую классификацию:
- *Энергетические машины* – преобразуют энергию одного вида в энергию другого вида. В зависимости от вида входной и выходной энергии разделяются на *двигатели* и *генераторы*.
- *Рабочие машины* – машины, использующие механическую энергию для совершения работы по перемещению и преобразованию материалов.
- *Информационные машины* - машины, предназначенные для *обработки и преобразования информации*.
- *Кибернетические машины* – управляют рабочими или энергетическими машинами, *способны изменять программу своих действий* в зависимости от состояния окружающей среды.

Разновидности звеньев

- *Звено* – либо одна деталь, либо совокупность нескольких деталей, соединенных в одну кинематически неизменяемую систему. Их различают по *конструктивным признакам* (коленвал, шатун, поршень, зубчатое колесо и т. д.) и по *характеру движения*.
- Так, звено, вращающееся на полный оборот вокруг неподвижной оси – *кривошип*, при неполном обороте – *коромысло*.
- Звено, совершающее поступательное прямолинейное движение – *ползун*.
- Звено, совершающее плоское движение – *шатун*.
- Понятие *неподвижности* стойки для механизмов транспортных машин, например, летательных аппаратов или баллистических ракет, *условно*, ведь в таком случае сама стойка движется.
- Более полный список звеньев с характером движения находится в таблице на рис. 2.5.1.

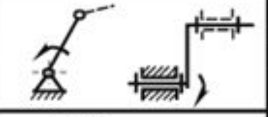
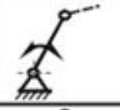
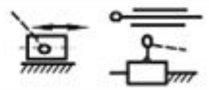
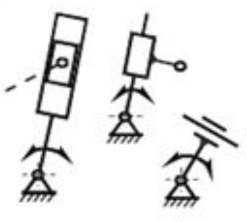
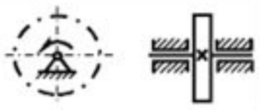
Название	Условное обозначение на схемах [1]	Движение	Особенности
1. Стойка		Отсутствует	—
2. Кривошип		Вращательное	Полный оборот
3. Коромысло		Качательное	Неполный оборот, возвратное движение
4. Шатун		Плоскопараллельное	Нет пар, связанных со стойкой
5. Ползун		Поступательное	Возвратное движение
6. Кулиса		Качательное	Направляющая для ползуна (кулисного камня)
7. Кулачок		Вращательное Поступательное	Профиль определяет движение ведомого звена
8. Зубчатое колесо		Вращательное	Зубчатый контур

Рис. 2.5.1
Основные виды звеньев по характеру движения

Кинематические пары и цепи

- *Кинематическая пара* – подвижное соединение звеньев, допускающее их относительное движение. Все кинематические пары на схеме обозначают *буквами латинского алфавита*, например A, B, C и т. д.
- *Элемент пары* – совокупность поверхностей, линий и точек звена, входящих в соприкосновение (контакт) с другим звеном пары.
- Если кинематическая пара *вращательная* (звенья образующие эту пару вращаются относительно друг друга), то она изображается A или B (рис. 2.5.2).
- Если же одно звено движется поступательно относительно другого звена, то такая пара называется *поступательной* и изображается C.
- Каждому звену присваивают свой *номер*: первый номер имеет *входное звено*, последний номер - *стойка*.
- Звенья бывают *простые* (состоят из одной детали) и *сложные* (состоят из нескольких деталей, жестко скрепленных друг с другом и совершающих одно и то же движение).

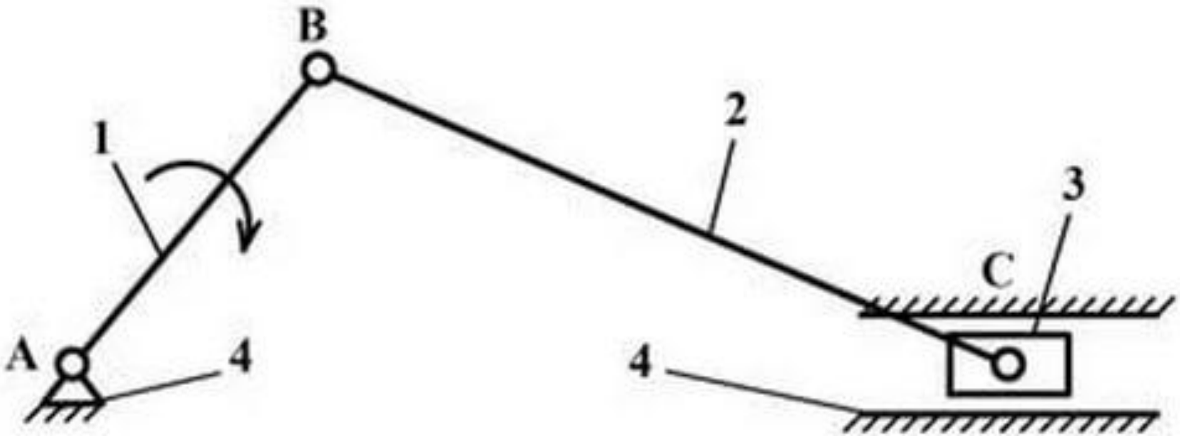


Рис. 2.5.2 Кривошипо-ползунный механизм
1 – Кривошип. 2 – Шатун. 3 – Ползун. 4 – Стойка.

- *Кинематическая цепь* – система звеньев, образующих между собой кинематические пары. Различают замкнутые и разомкнутые цепи.
- В *замкнутой* цепи каждое звено входит не менее чем в две кинематические пары.
- В *незамкнутой* же цепи есть звенья, входящие только в одну кинематическую пару.

Классификация кинематических пар

- Кинематические пары различают (по Рёло) по характеру соприкосновения звеньев: пару называют *низшей*, если элементы звеньев соприкасаются только *по поверхности*, и *высшей*, если только *по линиям* или *в точках*. Линейный и точечный контакт понимается как первоначальный – при соприкосновении звеньев без усилия (под нагрузкой *деформируемые* звенья, образующие пару будут соприкасаться по некоторой *фактической поверхности*, называемой *пятном контакта*).
- Кинематические пары классифицируют по числу *H степеней свободы* в относительном движении звеньев (*подвижность* пары) и по числу *S условий связи* (*ограничений*), накладываемых парой на движение одного звена относительно другого. При этом предполагается, что все связи – геометрические, налагающие ограничения только на координаты точек звена, входящего в кинематическую пару, в его относительном движении.
- Так как у *свободного тела* число степеней свободы в пространстве равно шести, то величины H и S связаны соотношением:

$$H = 6 - S \quad (2.5.1)$$

- В формуле (2.5.1) $S = 1, 2, 3, 4$ или 5. При $S = 0$ пары не существует, а имеются 2 тела, движущиеся *независимо* друг от друга; при $S = 6$ кинематическая пара становится *жёстким соединением* деталей, то есть *одним звеном*. По величине S определяют *класс* кинематической пары: различают одноподвижные пары (V класса, $H = 1, S = 5$), двух подвижные (IV класса, $H = 2, S = 4$), трёх подвижные (III класса, $H = 3, S = 3$), четырёх подвижные (II класса, $H = 4, S = 2$) и пяти подвижные (I класса, $H = 5, S = 1$).
- На рис. 2.3 приведены примеры кинематических пар. Более подробно они изображены в табл. 2.5.1.
- *Вращательная пара* (рис. 2.5.3, *а*) – одноподвижная (условное обозначение 1 *в*), допускает лишь относительное вращательное движение звеньев вокруг оси (показано стрелкой); звенья 1 и 2 соприкасаются по цилиндрической поверхности – это низшая пара. Роль такой пары выполняет и более сложная конструкция – шарикоподшипник.
- *Поступательная пара* (рис. 2.5.3, *б*) – одноподвижная (условное обозначение 1 *п*), низшая, допускает лишь прямолинейное поступательное относительное движение звеньев.

Классификация кинематических пар (продолжение)

- *Цилиндрическая пара* (рис. 2.5.3, *в*) – двухподвижная (2 *ц*), низшая, допускает независимые поступательное и вращательное относительные движения звеньев.
- *Сферическая пара* (рис. 2.5.3, *г*) – трехподвижная (3 *с*), низшая, допускает 3 независимых относительных вращения звеньев вокруг осей *x*, *y*, *z*.
- Примеры четырёх- и пятиподвижной пар и их условные обозначения (4 *л* и 5 *т*) находятся на рис. 2.5.3, *д*, *е*. Возможные независимые движения звеньев показаны стрелками. Это высшие пары, поскольку контакт элементов звеньев линейный (шар в цилиндре) и точечный (шар на плоскости).
- Одно из преимуществ низших КП по сравнению с высшими – возможность передачи *больших сил*, поскольку *контактная поверхность* звеньев такой пары может быть значительна. Применение высших пар позволяет *уменьшить трение* (каноничный пример – *шарикоподшипник*) и получать нужные разнообразные законы движения выходного звена механизма, *меняя форму* звеньев высшей пары.

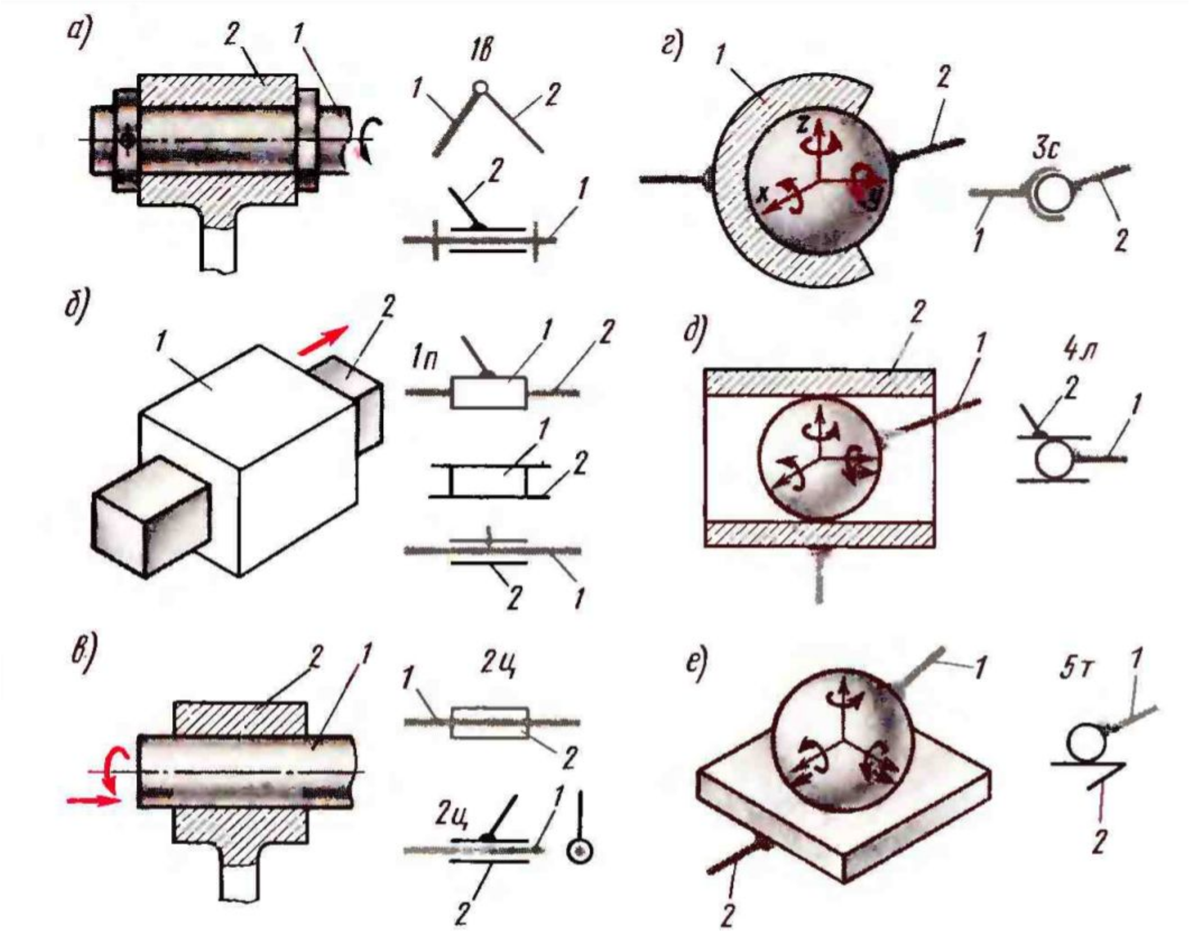


Рис. 2.5.3
Виды кинематических пар

Классификация кинематических пар (продолжение)

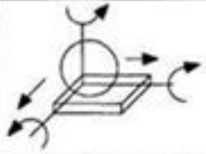
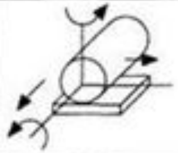
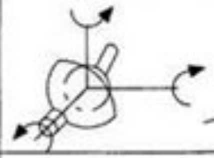
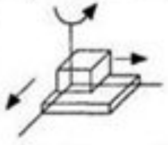
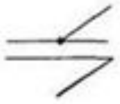
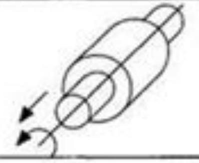
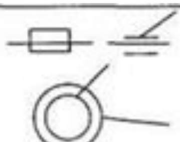
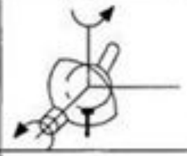
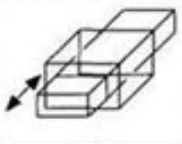
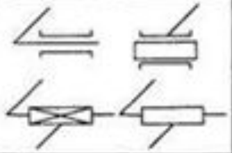
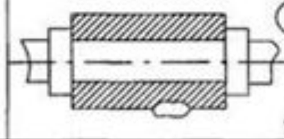
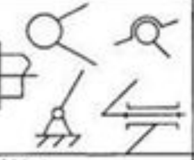
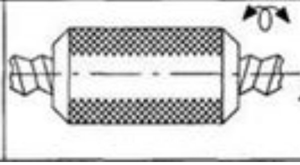
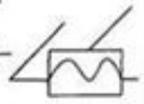
Класс пары	Число связей	ЧСС	Название пары	Вид кинематической пары		Рисунок	Графические обозначения	Обозначения
I	I	5	Пятиподвиж-вижная Шар-плоскость	Высшая	Пространственная			5Т
II	2	4	Четырехподвижная Цилиндр-плоскость	Высшая	Пространственная			4ЦП
III	3	3	Трехподвижная Сферическая	Низшая	Пространственная			3С
III	3	3	Трехподвижная Плоскостная	Низшая	Плоская			3ПЛ
IV	4	2	Двухподвижная Цилиндрическая	Низшая	Пространственная			2Ц
IV	4	2	Двухподвижная Сферическая с пальцем	Низшая	Пространственная			2СП
V	5	I	Одноподвижная Поступательная	Низшая	Плоская			1П
V	5	I	Одноподвижная Вращательная	Низшая	Плоская			1В
V	5	I	Одноподвижная Винтовая	Низшая	Пространственная			1ВИ

Таблица 2.5.1
Классификация кинематических пар

Степень подвижности

- *Число W степеней свободы* кинематической цепи относительно стойки называется числом *степеней подвижности* (степенью подвижности) кинематической цепи.
- Ограничения, накладываемые на независимые движения звеньев, образующих кинематическую пару, называются – *условия связи S*.
- *Число связей* (S) КП связаны с *числом степеней свободы* (H) по следующей формуле:

$$W_{КП} = S + H \quad (2.5.2)$$

Число степеней свободы	Число связей (класс пары)	Название пары	Пример	Условное обозначение
1	5	*Вращательная*		
1	5	*Поступательная*		
1	5	*Винтовая*		
2	4	*Цилиндрическая*		
2	4	*Сферическая с пальцем*		
3	3	*Сферическая*		
3	3	*Плоская*		
4	2	*Цилиндр-плоскость*		
5	1	*Шар-плоскость*		

Таблица 2.5.2
Классификация кинематических пар по числу степеней свободы и числу связей

Степень подвижности плоского механизма

- Если на движение звена в трехмерном шести подвижном пространстве не наложено ни каких условий связи, то оно обладает 6 степенями свободы.
- Тогда, если число звеньев кинетической цепи - К, то общее число степеней свободы, которым обладают К звеньев до их соединения в кинетическую цепь - 6К.

$$W_{\text{ПР}} = 6\text{К} \quad (2.5.3)$$

- Соединение звеньев в кинематическую цепь накладывает различное число связей на относительное движение звеньев, зависящее от класса пар. Следовательно если P_1 – число КП класса 1, P_2 – число КП класса 2 и т.д., после соединения в КЦ получаем формулу:

$$\text{W}_{\text{пр}} = 6\text{К} - 5P_5 - 4P_4 - 3P_3 - 2P_2 - P_1 \quad (2.5.4)$$

- Если одно из звеньев кинематической цепи будет неподвижным, то общее число степеней свободы цепи уменьшится на 6 и число степеней свободы W относительно неподвижного звена будет равно:

$$\text{W}_{\text{пр}} = 6(\text{К} - 1) - 5P_5 - 4P_4 - 3P_3 - 2P_2 - P_1 \ (2.5.5)$$

- Обозначим $\text{К} - 1 = \text{n}$, получим:

$$\text{W}_{\text{пр}} = 6\text{n} - 5P_5 - 4P_4 - 3P_3 - 2P_2 - P_1 \quad (2.5.6)$$

- Равенство (2.5.6) носит название *формулы подвижности,* или *формулы Сомова-Малышева.*

Степень подвижности плоского механизма

- Из формулы Сомова-Малышева можно получить формулу для определения степени подвижности *плоского механизма*. Так как движения происходят в плоскости, из возможных 6 степеней свободы в пространстве удаляются 3, отвечающие за 1 поступательное и 2 вращательных движения. При этом в состав плоских КЦ могут входить лишь КП 4 и 5 классов.

$$\mathrm{W}_{\text{пл}} = (6-3)\mathrm{n} - (5-3)P_5 - (4-3)P_4 \quad (2.5.7)$$

$$\mathrm{W}_{\text{пл}} = 3\mathrm{n} - 2P_5 - P_4 \quad (2.5.8)$$

- Данная формула носит название *формулы Чебышёва* для определения степени подвижности *плоского механизма*, где
- *n – число подвижных звеньев* механизма;
- P_5 – количество *одноподвижных* кинематических пар в механизме;
- P_4 – количество *двух подвижных* кинематических пар в механизме.

Структурные группы Ассура

- Разработанная Л. В. Ассуром структурная классификация плоских рычажных механизмов облегчает исследование имеющихся и создание новых механизмов без избыточных связей в их плоской схеме ($q_{\text{п}} = 0$). Основной её принцип состоит в том, что механизм может быть получен путем присоединения к одному или нескольким начальным звеньям и стойке кинематических цепей (структурных групп) нулевой подвижности относительно тех звеньев, к которым она присоединяется. Таким образом, *структурная группа – кинематическая цепь, присоединение которой к механизму не изменяет число степеней его свободы.*
- *Первичный механизм* (по И. И. Артоболевскому – *механизм I класса*) – простейший двухзвенный механизм, состоящий из стойки и подвижного звена.
- Число степеней свободы механизма равно числу первичных механизмов.
- Для структурных групп Ассура, согласно определению и формуле Чебышева, то есть при отсутствии избыточных связей и высших пар группы:

$$W_{\text{п.г.}} = 3n_{\text{п.г.}} - 2p_{\text{н.г.}} = 0 \quad (2.6.1)$$

- Здесь $W_{\text{п.г.}}$ – число степеней свободы структурной (поводковой) группы относительно тех звеньев, к которым она присоединяется; $n_{\text{п.г.}}$ и $p_{\text{н.г.}}$ – число звеньев группы и число её низших связей.
- Поскольку эти величины могут быть только натуральными числами, возможны следующие их значения: $n_{\text{п.г.}} = 2, 4, 6, \ldots; p_{\text{н.г.}} = 3, 6, 9, \ldots$.
- Первая группа присоединяется к первичному механизму, каждая последующая к имеющемуся механизму.
- Группа, имеющая 2 подвижных звена и 3 одноподвижные пары, называется *двух поводковой группой Ассура*.

Классификация структурных групп

- Конечные звенья групп Ассура, входящие в две кинематические пары, из которых одна имеет свободный элемент звена, называются *поводками*.
- Структурные группы Ассура делятся (по Артоболевскому) на *классы* в зависимости от *числа кинематических пар, образующих наиболее сложный замкнутый контур* группы. *Двухзвенным* группам принудительно присвоен *второй* класс.
- В пределах класса (по Ассуру) группы подразделяются по числу поводков на *порядки* (порядок группы равен числу ее поводков).
- Класс и порядок механизма определяется классом и порядком *наиболее сложной из входящих в него групп*. Особенность структурных групп Ассура - их *статическая определимость*. Если группу Ассура свободными элементами звеньев присоединить к стойке, то образуется *статически определимая ферма*.

- Наиболее широко применяются простые рычажные механизмы, состоящие из групп Ассура 2-го класса 2-го порядка. Число разновидностей таких групп для плоских механизмов с низшими парами невелико, их всего *пять*, приведены на рис. 2.6.1.

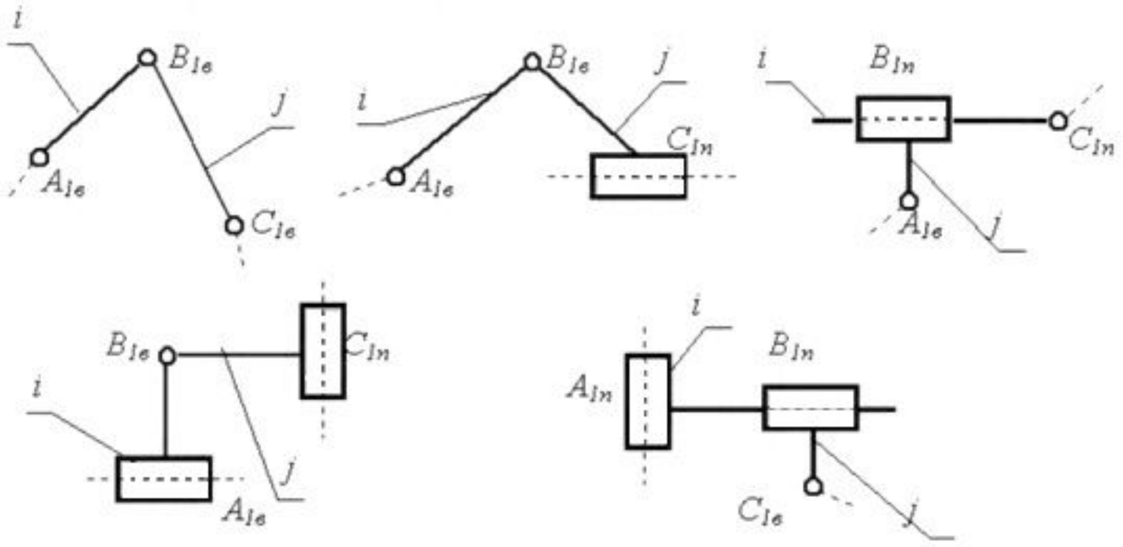


Рис. 2.6.1

Структурный анализ с помощью СГ

- Задачей *структурного анализа* является задача определения *параметров структуры* заданного механизма – числа звеньев и структурных групп, числа и вида КП, числа подвижностей (основных и местных), числа контуров и числа избыточных связей.
- Структурному анализу по Ассуру можно подвергать *только механизмы не содержащие избыточных связей и подвижностей*. Наиболее простой и эффективный способ устранения избыточных связей в механизмах приборов — применение высшей пары с точечным контактом взамен звена с двумя низшими парами; степень подвижности плоского механизма в этом случае не меняется, поскольку по формуле Чебышева (при $q_п = 0$):

$$W_п = 3n - 2P_н - P_в =$$
$$= 3(n-1) - 2(P_н - 2) - (P_в + 1) \quad (2.6.2)$$

- Затем необходимо выбрать *первичные механизмы* (входные звенья) и, начиная с выходных звеньев, *выделять* из состава механизма *структурные группы нулевой подвижности*
- На рис. 2.6.2 приведен пример структурного анализа 6-звенного механизма 2 класса 2-го порядка (механизм поршневого насоса, n = 5, $p_H = 7$).

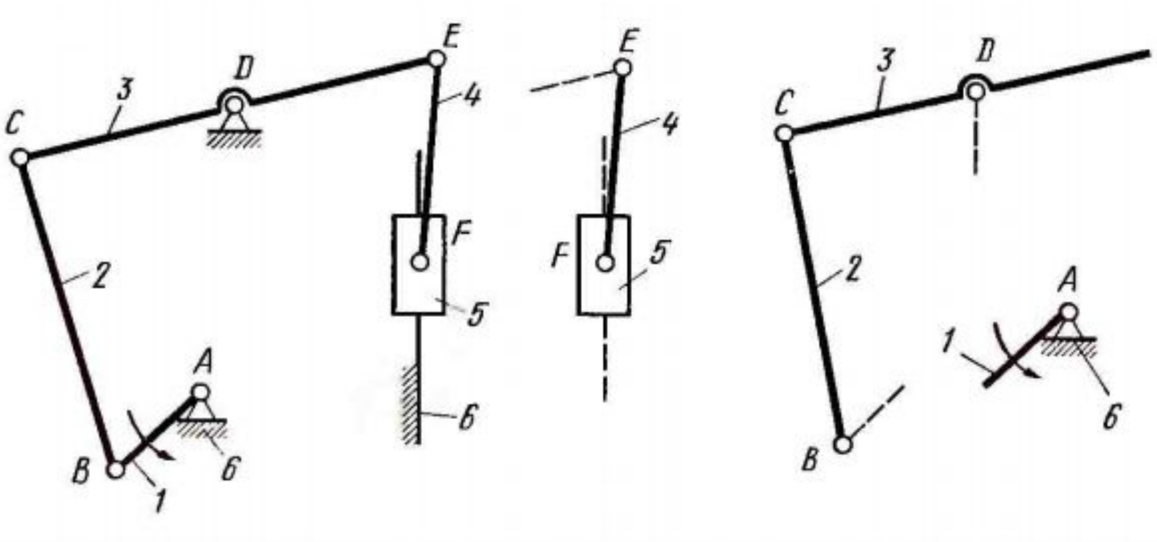


Рис. 2.6.2

Структурные формулы механизмов

- После отсоединения от механизма всех структурных групп останется стойка и начальные звенья, число которых равно фактической степени подвижности механизма.
- *Таким образом*, механизм состоит из *W начальных механизмов* и некоторого количества *структурных групп*, присоединенных в *строго определенном порядке*, который отражают в специальной записи, называемой *формулой строения*.
- *Например*, механизм с одной степенью свободы, содержащий две структурные группы 2 класса 2 порядка, может иметь строение и формулу, приведённую на рис. 2.6.3.
- В скобках указаны номера звеньев, составляющих структурную группу (или первичный механизм). Стрелки показывают, в каком порядке части механизма соединены друг с другом.
- Класс механизма определяется классом наиболее сложной его структурной группы.

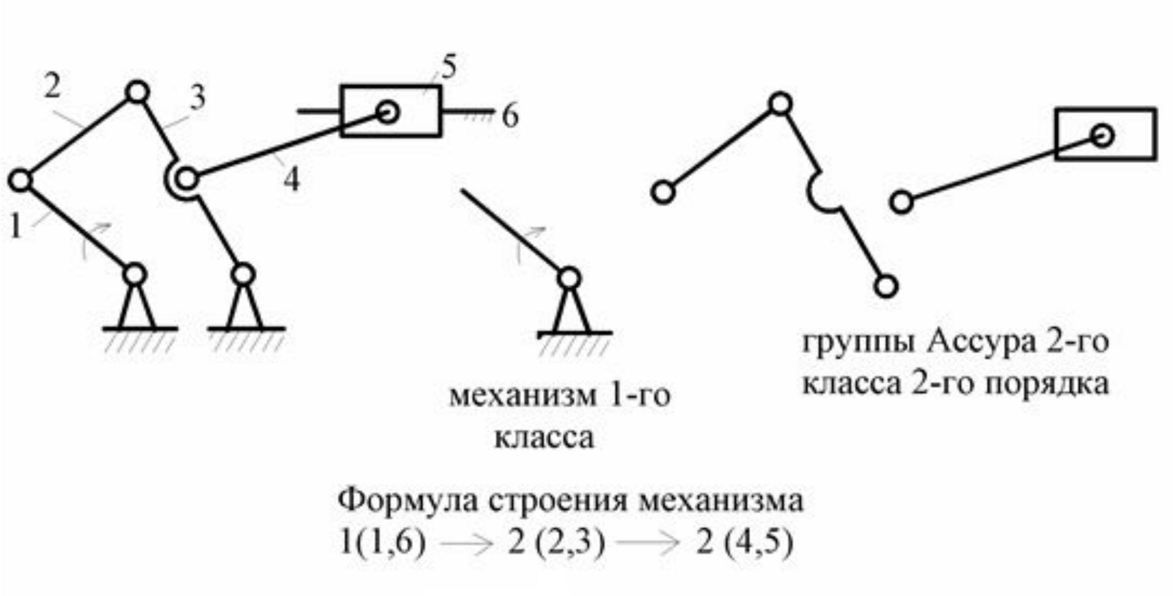


Рис. 2.6.3

Структурный синтез по Ассуру

- Задачей *структурного синтеза* является задача синтеза структуры нового механизма, обладающего заданными свойствами: числом подвижностей, отсутствием местных подвижностей и избыточных связей, минимумом числа звеньев и парами определенного вида (например, только вращательными, как наиболее технологичными) и т.п.
- При структурном синтезе механизма по Ассуру к выбранным первичным механизмам с заданной подвижностью W_0 последовательно присоединяются структурные группы с нулевой подвижностью. Полученный таким образом механизм обладает рациональной структурой, т.е. не содержит избыточных связей и подвижностей.
- Пример структурного синтеза изображен на рис. 2.6.4.

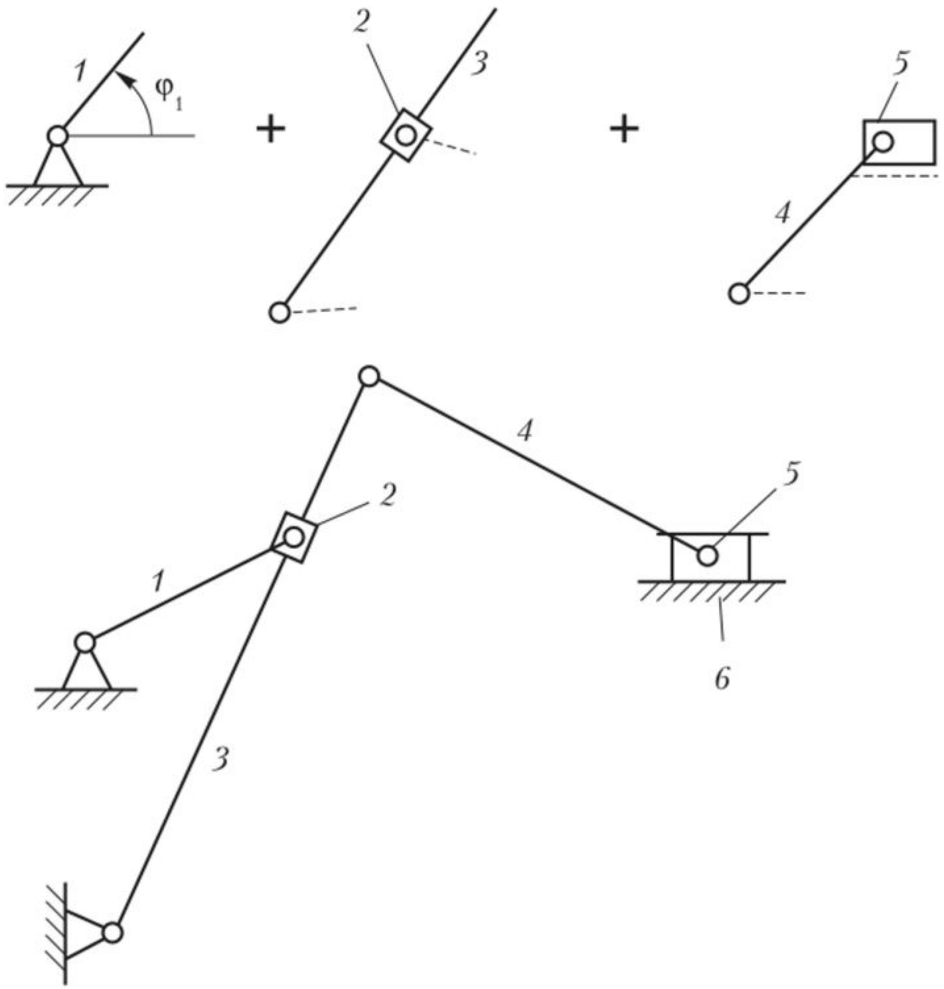


Рис. 2.6.4

ДЗ №1

- Движение точки на плоскости задано системой параметрических уравнений.

$$\begin{cases} x(t) = -4t^2 - 1 \\ y(t) = 8 - 3t \qquad (3.1.1) \\ t = 1/2 \end{cases}$$

Необходимо найти:

1. Траекторию точки
2. Положение точки в заданный момент времени
3. Вычислить следующие величины:

$v_x, v_y, v_z, v, v_r, v_\tau, v_\varphi, a_x, a_y, a_z, a_\varphi, a_r, a_\tau, a_n, a, \rho$

Определение траектории

- Для определения траектории точки нам необходимо избавиться от параметра времени t в уравнениях. Выразим t через y во втором уравнении системы, подставим полученное выражение в первое уравнение:

$$y = 8 - 3t, \qquad t = \frac{8 - y}{3}$$

$$x = -4 \cdot \left(\frac{8 - y}{3}\right)^2 - 1 \quad (3.1.2)$$

$$y^2 - 16y + \frac{9}{4}x + 66\frac{1}{4} = 0 \quad (3.1.3)$$

ДЗ №1

- *Определение положения точки при* $t = 1/2$
- Для этого подставим значение параметра t в уравнения системы:

$$x\left(\frac{1}{2}\right) = -2, \qquad y\left(\frac{1}{2}\right) = 6.5 \quad (3.1.4)$$

- Траектория движения точки и её положение при $t = 1/2$ изображены на рис. 3.1.1.

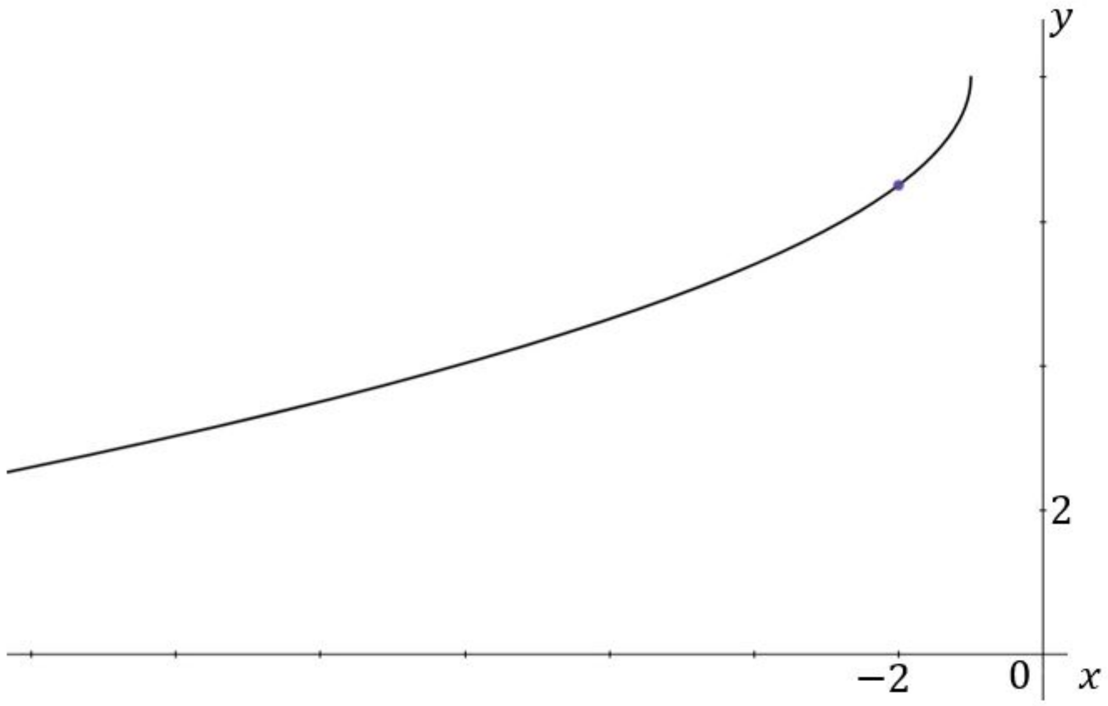


Рис. 3.1.1

ДЗ №1

- *Определение кинематических характеристик в различных системах координат*
- Найдем скорость по оси x и y дифференцированием параметрической функции:

$$v_x = x'(t) = -8t, \qquad v_y = y'(t) = -3 \quad (3.1.5)$$

- Подставив значение $t = 1/2$, получим значения:

$$v_x = -4, v_y = -3, v = \sqrt{{v_x}^2 + {v_y}^2} = 5 \quad (3.1.6)$$

- Найдем ускорение в проекциях на оси ДСК:

$$a_x = x''(t) = -8, \qquad a_y = y''(t) = 0$$

$$a = const = 8 \quad (3.1.7)$$

- Очевидно, что движение происходит в плоскости,

$$v_z = 0, \qquad a_z = 0 \quad (3.1.8)$$

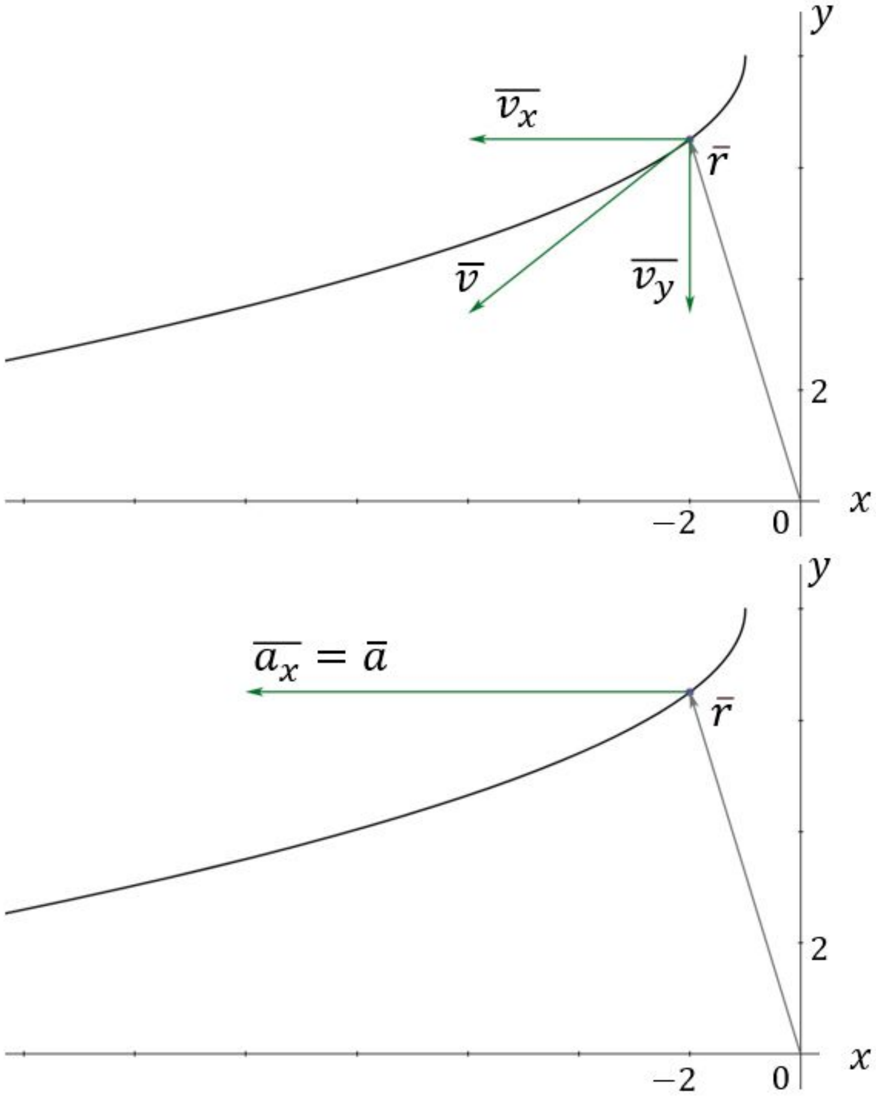


Рис. 3.1.2

ДЗ №1

- *Определение кинематических характеристик в различных системах координат*

- Для дальнейших расчетов необходимо найти модуль радиус вектора:

$$r(t) = \sqrt{x(t)^2 + y(t)^2} = \sqrt{16t^2 + 17t^2 - 48t + 65}$$

$$r\left(\frac{1}{2}\right) = 6.801 \quad (3.1.9)$$

- Найдем радиальную и трансверсальную составляющие скорости в полярной СК, воспользовавшись формулами связи между ПСК и ДСК:

$$\dot{r} = \frac{x\dot{x} + y\dot{y}}{r} \rightarrow v_r = \dot{r} = -1.691 \quad (3.1.10)$$

$$\varphi = \operatorname{arctg}\left(\frac{y}{x}\right) = -1.272, \dot{\varphi} = \frac{x\dot{y} - y\dot{x}}{r^2} = 0.692 \ \ (3.1.11)$$

$$v_\varphi = r \cdot \dot{\varphi} = 4.705 \ \ (3.1.12)$$

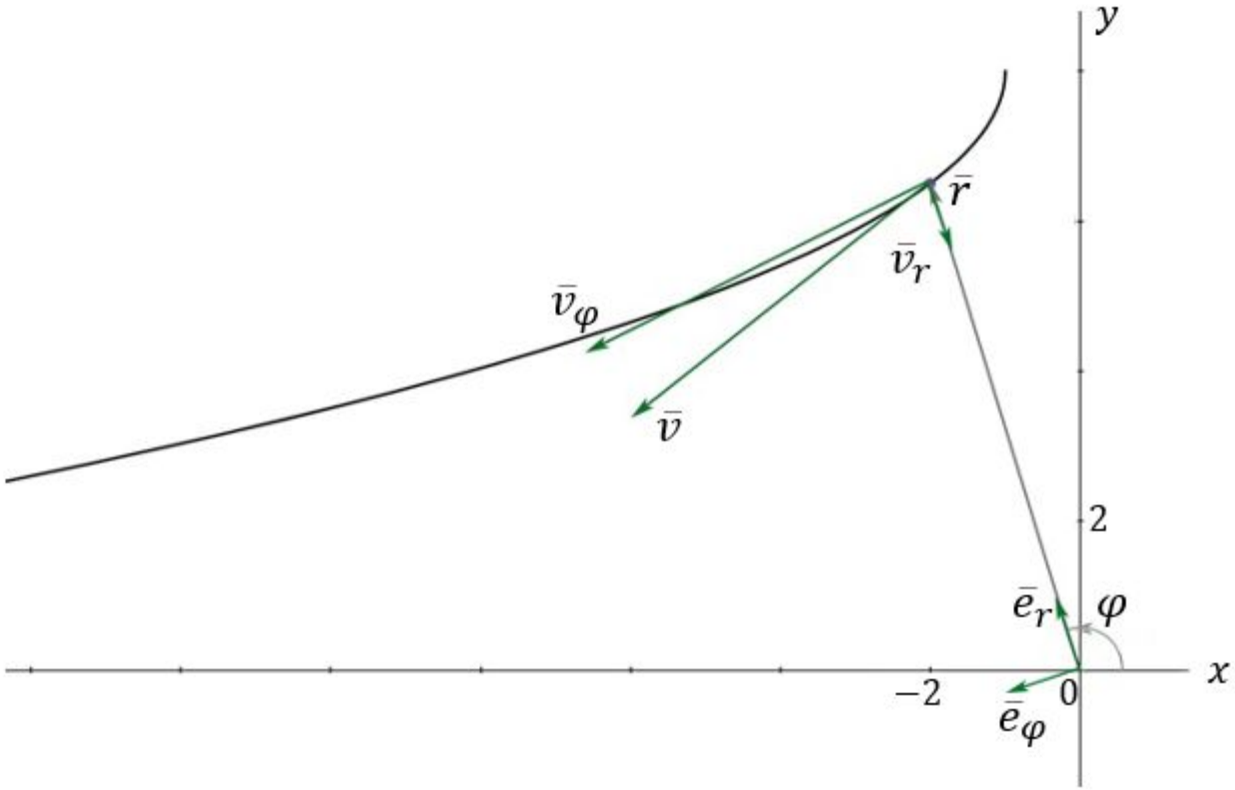


Рис. 3.1.3

ДЗ №1

- *Определение кинематических характеристик в различных системах координат*

- Найдем нормальную и трансверсальную составляющие ускорения, также воспользовавшись формулами связи ПСК и ДСК.

$$\overline{a} = \dot{\overline{v}} = \ddot{\overline{r}} =$$

$$= \ddot{r} \cdot \overline{e_r} + \dot{r} \cdot \dot{\overline{\mathrm{e_r}}} + \dot{r} \cdot \dot{\varphi} \cdot \overline{e_\varphi} + r \cdot \ddot{\varphi} \cdot \overline{e_\varphi} + r \cdot \dot{\varphi} \cdot \dot{\overline{e_\varphi}}$$

$$= (\ddot{r} - r \cdot \varphi^2)\overline{e_r} + (2\dot{r} \cdot \dot{\varphi} + r \cdot \ddot{\varphi})\overline{e_\varphi} \quad (3.1.13)$$

- Следовательно, радиальная и трансверсальная составляющие ускорения выражаются как множители при соответствующих векторах:

$$a_r = \ddot{r} - r\dot{\varphi}^2, a_\varphi = 2\dot{r}\dot{\varphi} + r\ddot{\varphi} \quad (3.1.14)$$

$$\ddot{r} = \frac{\dot{x}^2 + x\dot{x} + \dot{y}^2 + y\dot{y} - \dot{r}^2}{r} \quad (3.1.15)$$

$$\ddot{\varphi} = \frac{x\ddot{y} - y\ddot{x} - 2r\dot{r}\dot{\varphi}}{r^2} \quad (3.1.16)$$

$$a_r = 2.353, a_\varphi = -7.646 \quad (3.1.17)$$

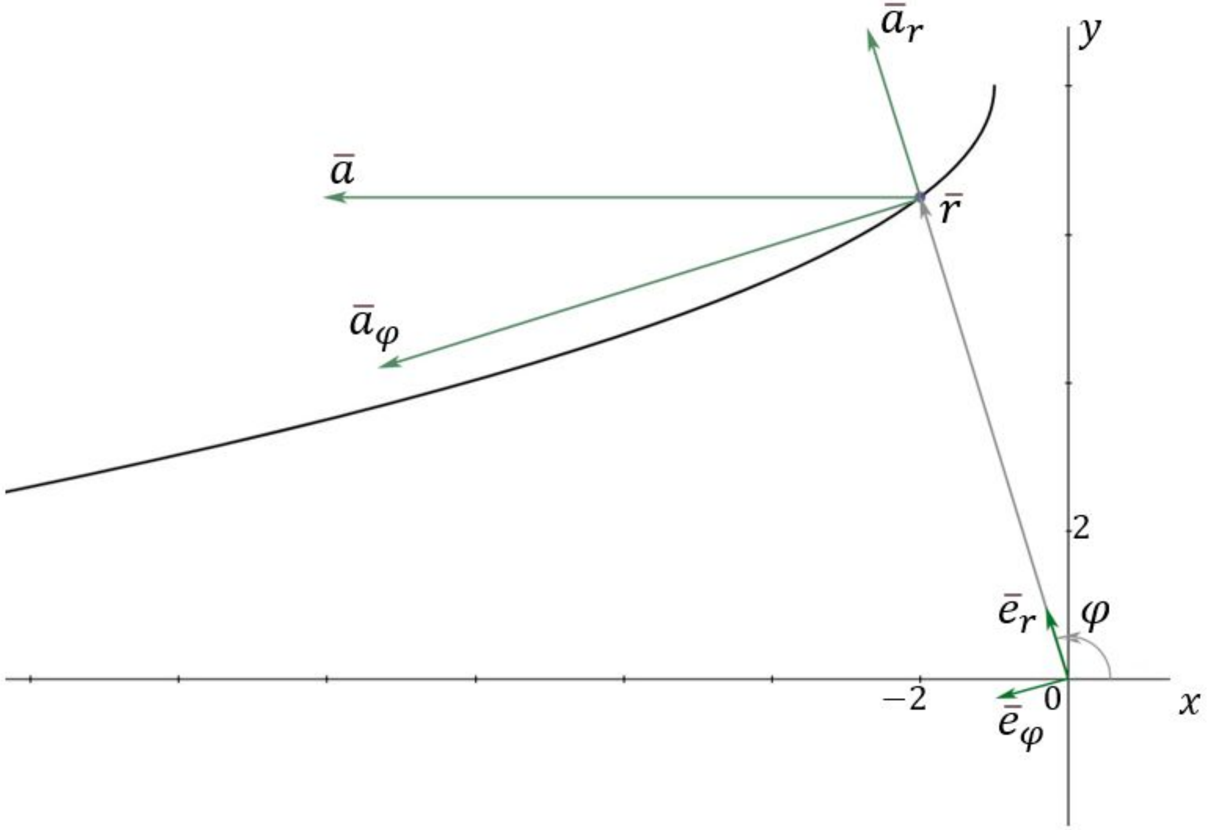


Рис. 3.1.4

ДЗ №1

- *Определение кинематических характеристик в различных системах координат*
- В естественной системе координат есть только одна составляющая скорости, а именно касательная – вектор

$$\overline{v} = \overline{v_\tau} = \dot{s}\overline{\tau}$$

$$v_\tau = \dot{s} = v = \sqrt{x^2 + y^2} = 5 \quad (3.1.18)$$

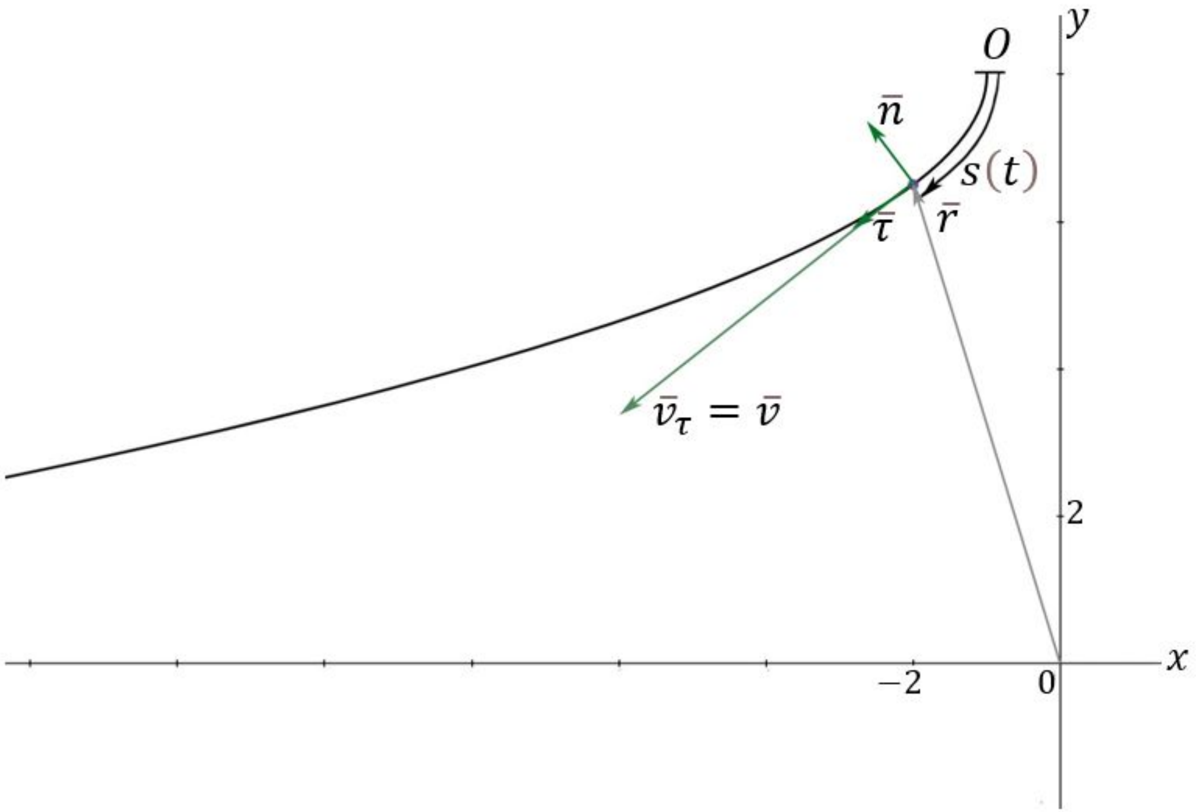


Рис. 3.1.5

ДЗ №1

- *Определение кинематических характеристик в различных системах координат*

- Определим нормальную и касательную составляющие ускорения точки:

$$\bar{a} = \dot{\bar{v}} = \ddot{s}\bar{\tau} + \dot{s}\dot{\bar{\tau}} = \ddot{s}\bar{\tau} + \frac{\dot{s}^2}{\rho}\bar{n} \quad (3.1.19)$$

$$a_\tau = \ddot{s} = \dot{v}_\tau = 6.4, \qquad a_n = \sqrt{a^2 - a_\tau{}^2} = 4.8 \quad (3.1.20)$$

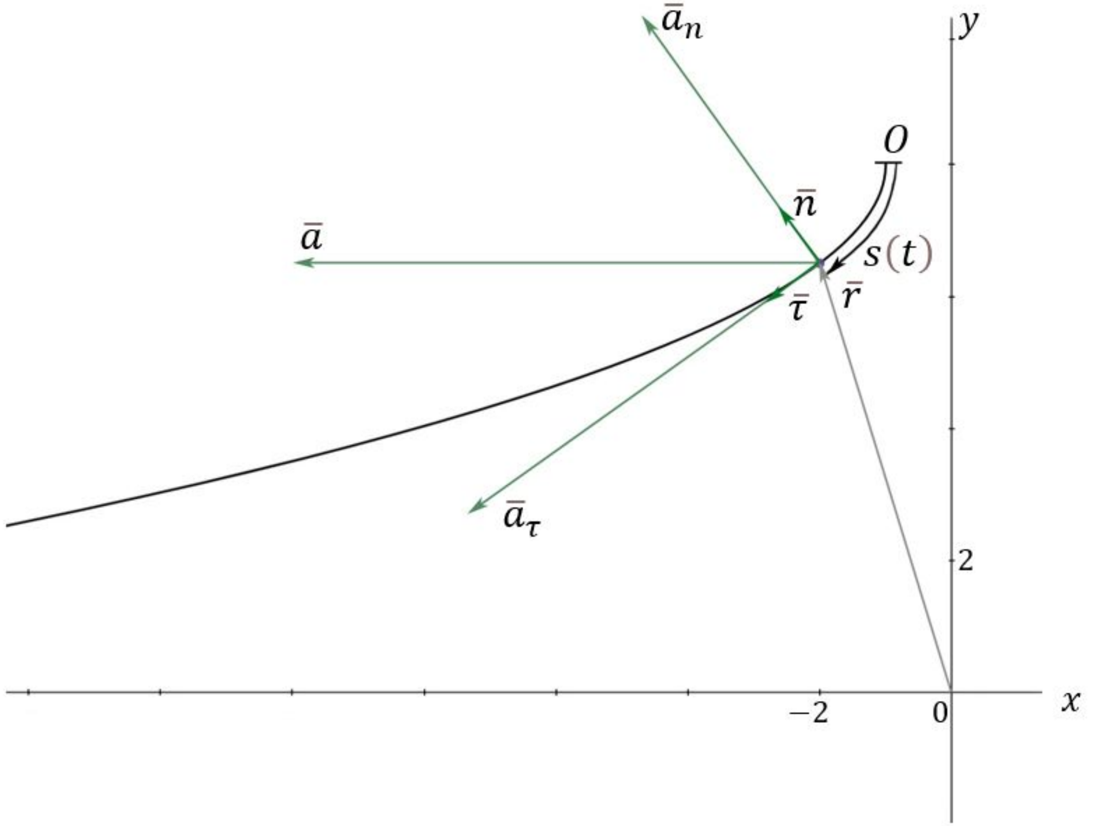


Рис. 3.1.6

ДЗ №1

- *Определение кинематических характеристик в различных системах координат*

- Определим радиус кривизны траектории в нашей точке из формулы полного ускорения в естественной системе координат:

$$\rho(t) = \sqrt{\frac{\dot{s}^4}{a^2 - \ddot{s}^2}} = 5.208 \quad (3.1.21)$$

Таким образом, все необходимые величины были найдены. Заметим, что векторные суммы кинематических характеристик (скоростей и ускорений) во всех системах координат тождественно равны, что свидетельствует о правильности полученных результатов.

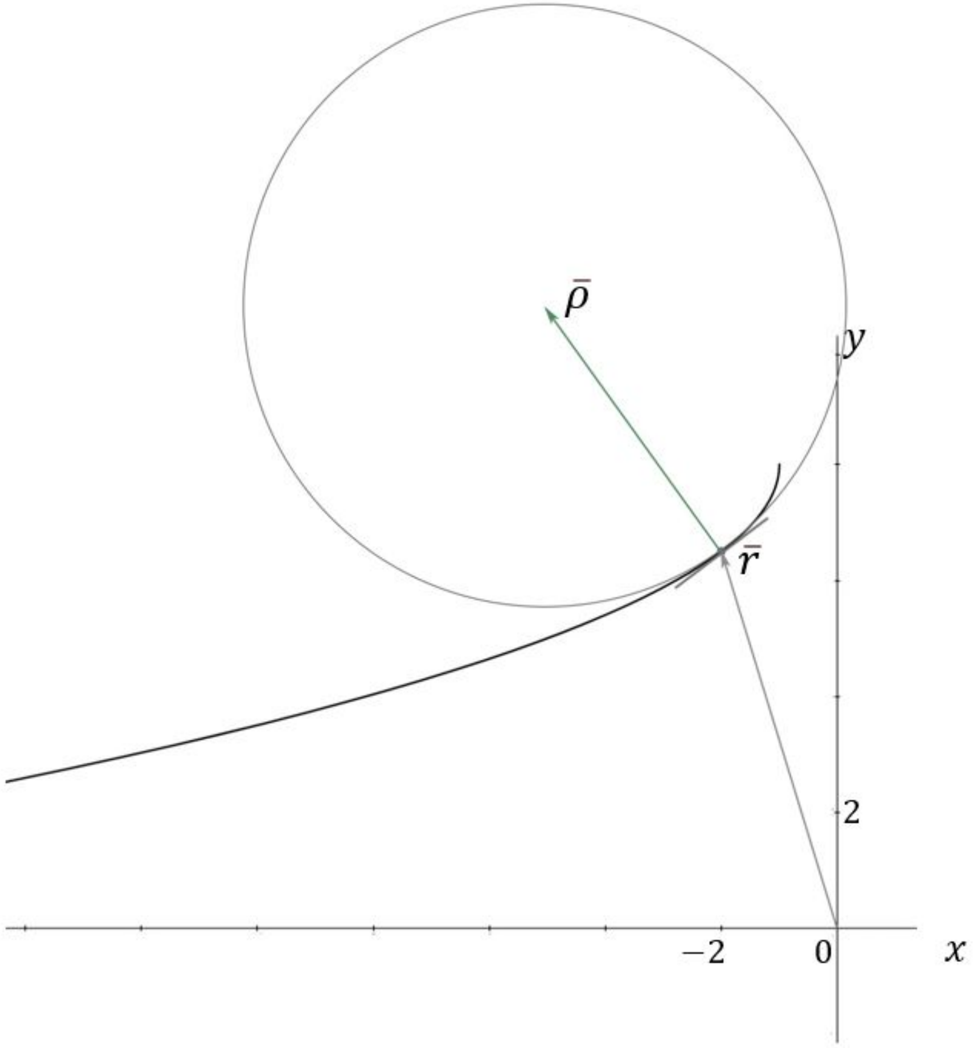


Рис. 3.1.7

ДЗ №2

Для данного механизма:

1. *Определить число звеньев и кинематических пар.*
2. *Указать виды абсолютных движений, совершаемых отдельными звеньями механизма.*
3. *Для всех центров КП и всех характерных точек механизма описать траектории (прямые, окружности, кривые второго порядка, кривые сложнее второго порядка) и выбрать СК, в которой рационально изучать движение этих точек.*
4. *Составить структурную схему и произвести структурный анализ по Ассуру.*
5. *Составить описание работы механизма, определить входное и выходное звенья.*

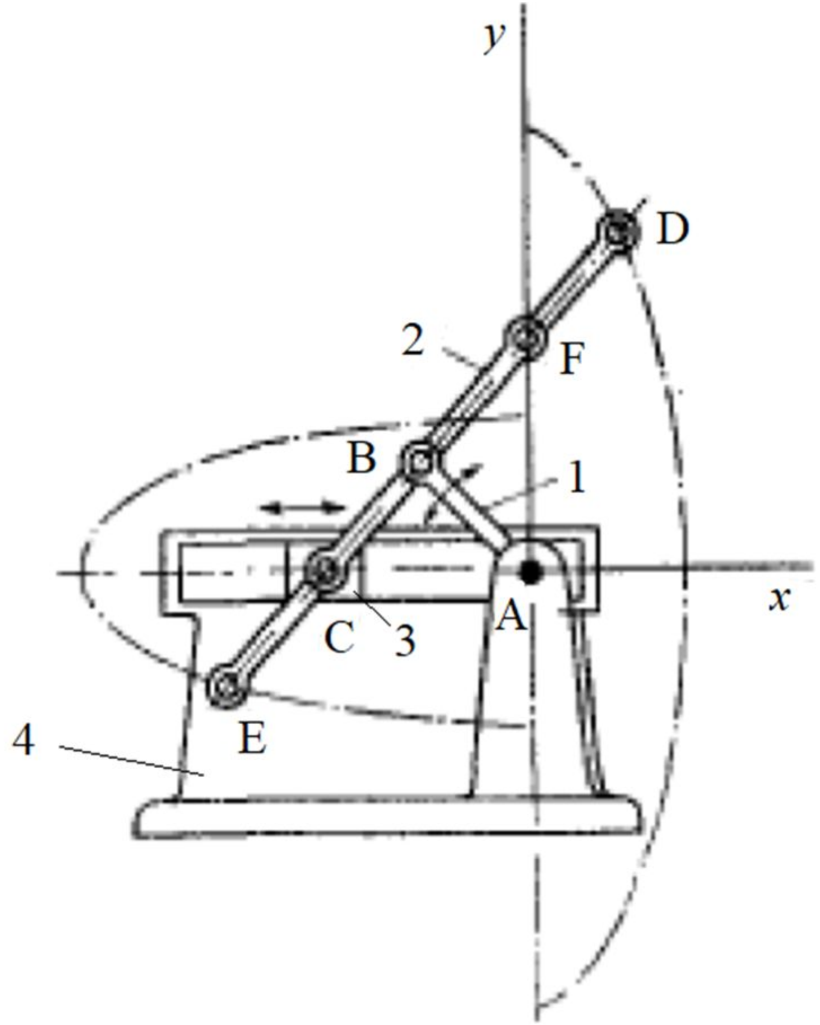


Рис. 3.2.1

ДЗ №2 (1)

- Число звеньев имеющегося механизма – 4 (включая стойку), а именно:
    - *Коромысло* 1
    - *Шатун* 2
    - *Ползун* 3
    - *Стойка* 4
- Число кинематических пар – 4.
    - КП (А) между звеном 1 и стойкой (*одноподвижная вращательная*).
    - КП (В) между звеньями 1 и 2 (*одноподвижная вращательная*).
    - КП (С) между шатуном 2 и ползуном 3 (*одноподвижная вращательная*).
    - КП (С) между стойкой 4 и ползуном 3 (*одноподвижная поступательная*).

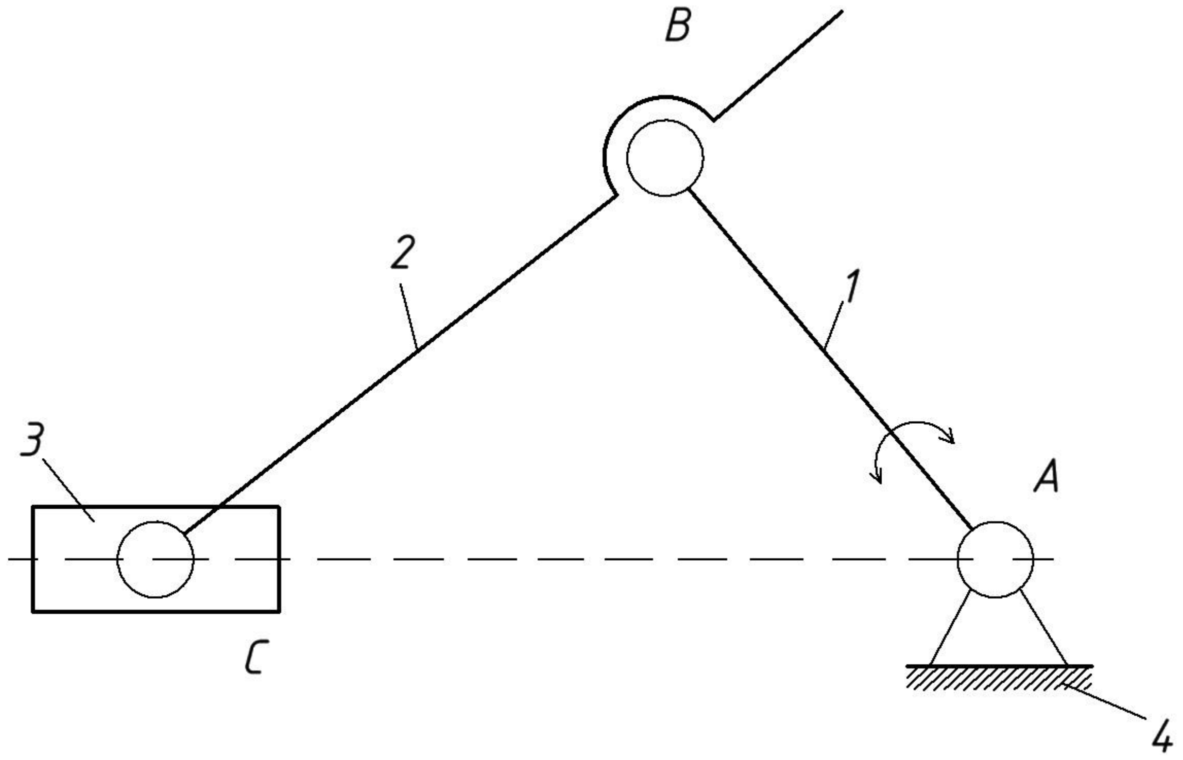


Рис. 3.2.2

ДЗ №2 (2,3)

- Траектории характерных точек:
  - A – *неподвижная.*
  - B – *окружность.*
  - C – *прямая.*
  - D – *кривая 2 порядка.*
  - E – *кривая 2 порядка*.
  - F – *прямая.*
- Траектории удобнее всего рассматривать в ДСК, поскольку точки C и F двигаются по прямым, а движение по окружности точки B легко перевести в ДСК, используя тригонометрические функции от аргумента – угла поворота кривошипа вокруг оси Z. Траектории концов шатуна E и F представляют собой *кривые второго порядка* (полу-эллипсы, если быть конкретнее, это нетрудно доказать, разложив плоское движение на сумму поступательного и вращательного), поэтому тоже легко представимы в ДСК.
- Звено 1 совершает *возвратно-вращательное* движение вокруг неподвижной оси Z.
- Звено 2 совершает *плоское* движение в плоскости XY.
- Звено 3 совершает *возвратно-поступательные* движения вдоль оси X.

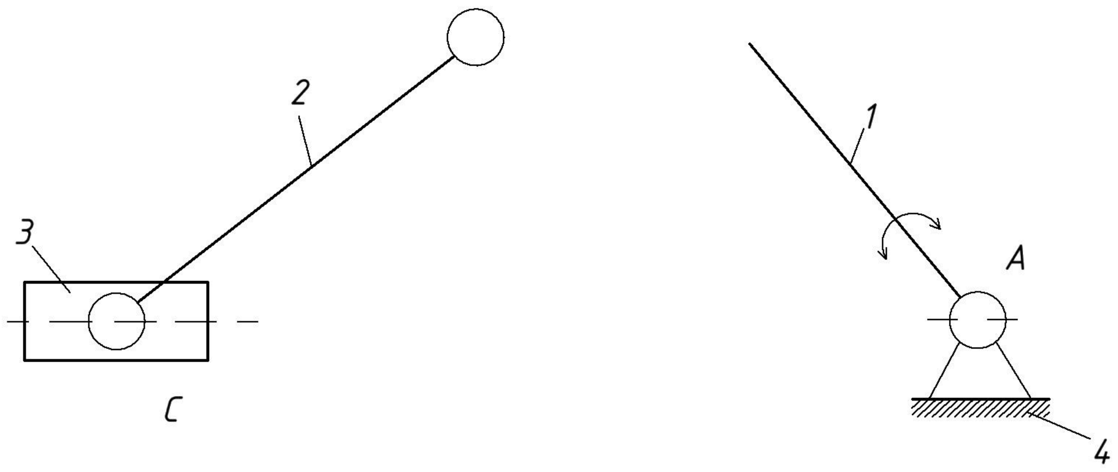


Рис. 3.2.3

ДЗ №2 (4,5)

- Произведем структурный анализ по Ассуру. Будем считать, что входным звеном является коромысло 1. В таком случае можем удалить из механизма двух-поводковую структурную группу Ассура 2 класса 2 порядка вида ВВП, состоящую из звеньев 2 и 3.

Остается единственный первичный механизм – коромысло 1. Структурная схема и процесс структурного анализа представлен на рис. 3.2.2-3.

Структурная формула нашего механизма:

$$1(1,4) \rightarrow 2(2,3) \quad (3.2.1)$$

По формуле Чебышёва имеем:

$$W_{\text{пл}} = 3n - 2P_1 - P_2 = 3 \cdot 3 - 2 \cdot 4 - 0 = 1 \quad (3.2.2)$$

Класс механизма – 2, число подвижностей – 1.

- Представленный механизм может производить различную работу по превращению движения в зависимости от выбора входного и выходного звеньев. Если мы предполагаем, что входным звеном является звено с наименьшим номером 1 (что скорее всего является правдой, поскольку перед нами *эллипсограф*), оно является *коромыслом* и может поворачиваться только в пределах слева от оси Y (иначе нарушается условие существования механизма в плоскости), его *возвратно-вращательное* движение может быть переведено в *непрерывное возвратно-поступательное* движение *ползуна* 3 или в *качательное* движение *концов шатуна 2*, двигающихся по некоторым *полу-эллипсам.* Соответственно, при таких сценариях использования выходными звеньями также будут *ползун* 3 или *шатун* 2.

ДЗ №3

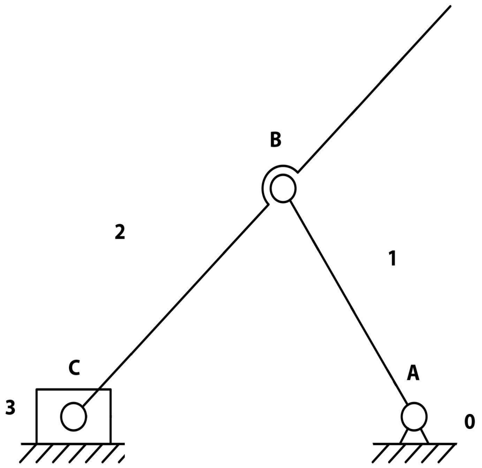
- Требуется определить виды напряженно-деформированных состояний звеньев и рассмотреть все возможные их комбинации. Заметим, что звенья нагружены по-разному в зависимости от выбора входного звена. Так, им может являться коромысло 1 или верхняя часть звена 2 (BD). Для удобства нумерации обозначим данный участок второго звена цифрой 4. Он находится в состоянии изгиба при приложении к его концу силы. В свою очередь оставшаяся часть шатуна испытывает растяжение-сжатие (меняется за время поворота коромысла 1) либо комбинированное нагружение. Ползун 3 и коромысло 1 также сжимаются.
- В случае, когда входным звеном является коромысло 1, оно будет находиться в состоянии изгиба. НДС ползуна и промежутка BC шатуна остаются прежними. Однако промежуток BD более не находится в напряженном состоянии (т. к. имеет свободный конец, к которому не приложена сила).
- В табл. 3.3.1-2 приведены комбинации НДС звеньев. Синим выделены повторяющиеся комбинации. Чтобы не перегружать страницы, номера рисунков записаны в сокращенном виде, т.е. без (3.3).

Рис.	1	2	3	4
1	А	А	А	А
2	И	А	А	А
3	А	Р	А	А
4	И	Р	А	А
5	А	К	А	А
6	И	К	А	А
7	А	А	Р	А
8	И	А	Р	А
9	А	Р	Р	А
10	И	Р	Р	А
11	А	К	Р	А
12	И	К	Р	А

Таблица 3.3.1

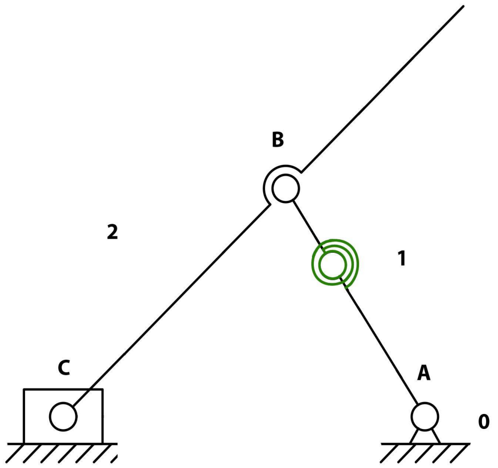
Рис.	1	2	3	4
1	А	А	А	А
13	Р	А	А	А
3	А	Р	А	А
14	Р	Р	А	А
5	А	К	А	А
15	Р	К	А	А
7	А	А	Р	А
16	Р	А	Р	А
9	А	Р	Р	А
17	Р	Р	Р	А
11	А	К	Р	А
18	Р	К	Р	А
19	А	А	А	И
20	Р	А	А	И
21	А	Р	А	И
22	Р	Р	А	И
23	А	К	А	И
24	Р	К	А	И
25	А	А	Р	И
26	Р	А	Р	И
27	А	Р	Р	И
28	Р	Р	Р	И
29	А	К	Р	И
30	Р	К	Р	И

Таблица 3.3.2



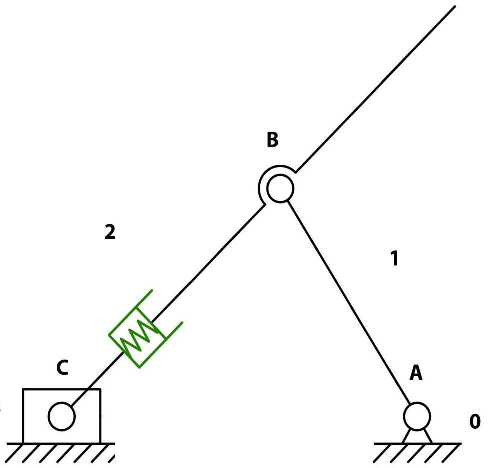
$$W_{\text{пл}} = 3 \cdot 3 - 2 \cdot 4 = 1$$

1



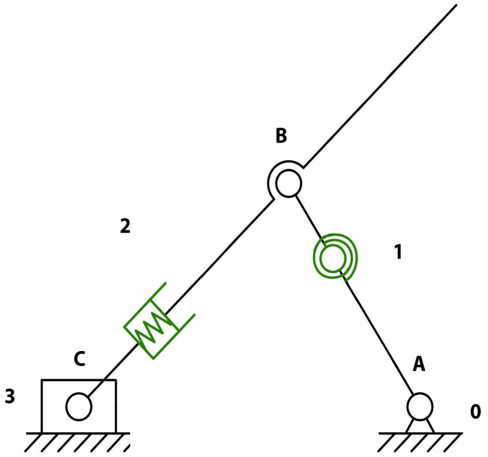
$$W_{\text{пл}} = 3 \cdot 4 - 2 \cdot 5 = 2$$

2



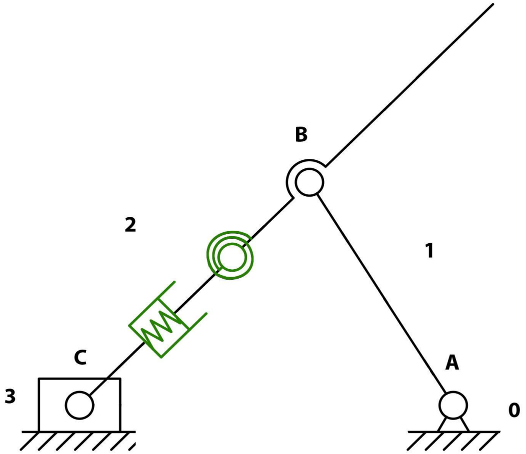
$$W_{\text{пл}} = 3 \cdot 4 - 2 \cdot 5 = 2$$

3



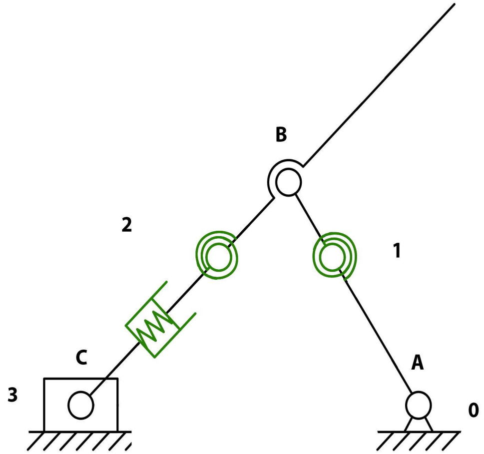
$$W_{\text{пл}} = 3 \cdot 5 - 2 \cdot 6 = 3$$

4



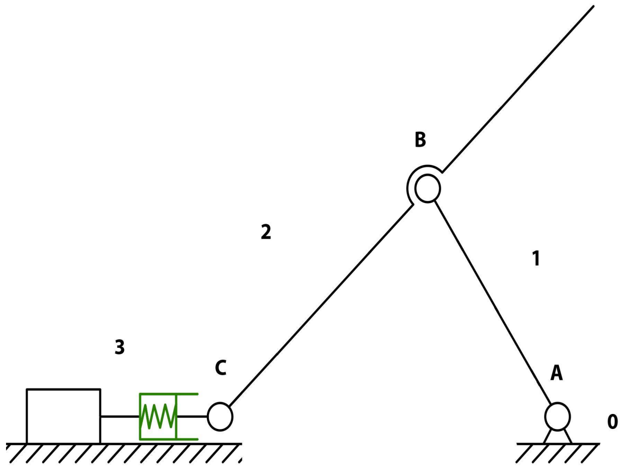
$$W_{\text{пл}} = 3 \cdot 5 - 2 \cdot 6 = 3$$

5



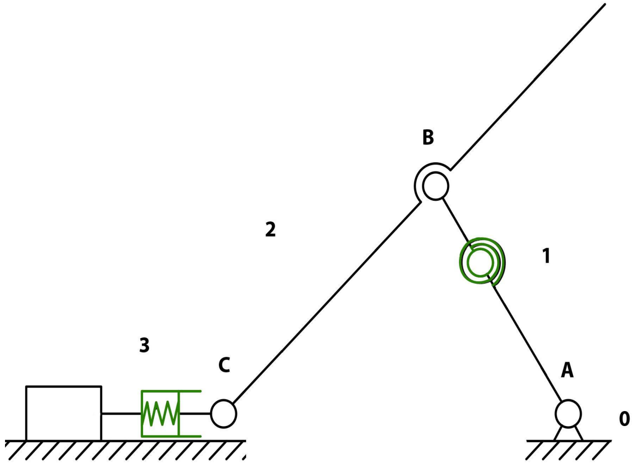
$$W_{\text{пл}} = 3 \cdot 6 - 2 \cdot 7 = 4$$

6



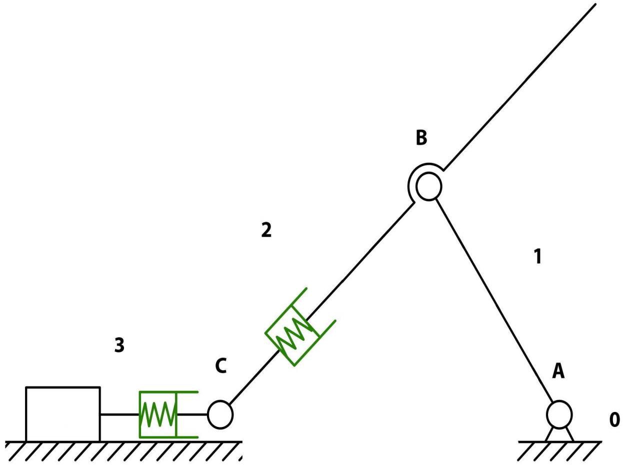
$$W_{\text{пл}} = 3 \cdot 4 - 2 \cdot 5 = 2$$

7



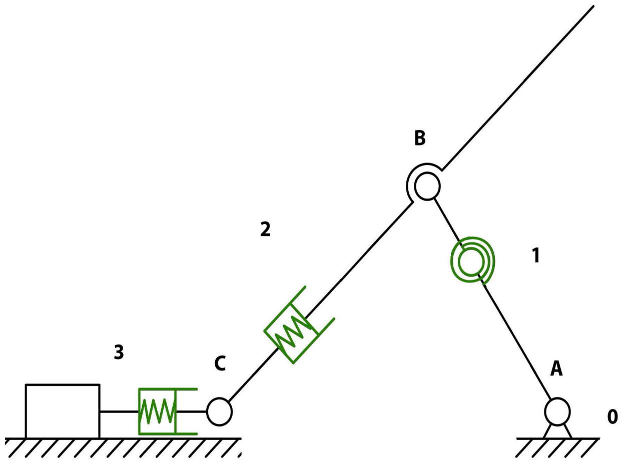
$$W_{\text{пл}} = 3 \cdot 5 - 2 \cdot 6 = 3$$

8



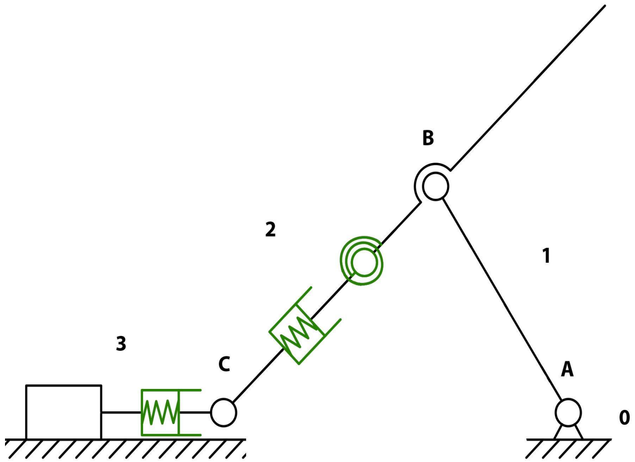
$$W_{\text{пл}} = 3 \cdot 5 - 2 \cdot 6 = 3$$

9



$$W_{\text{пл}} = 3 \cdot 6 - 2 \cdot 7 = 4$$

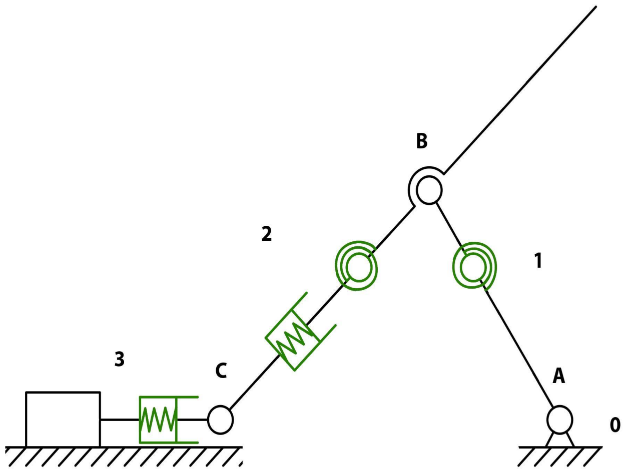
10



$$W_{\text{пл}} = 3 \cdot 6 - 2 \cdot 7 = 4$$

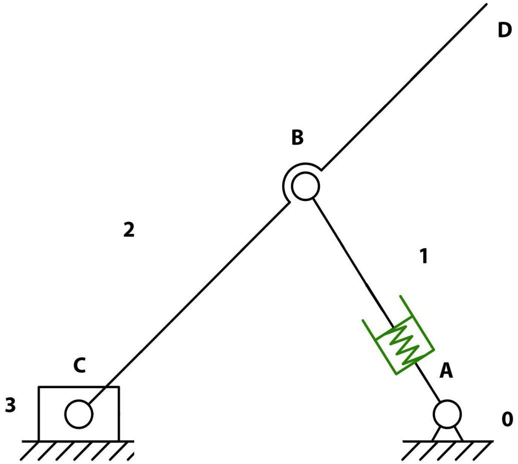
1

1



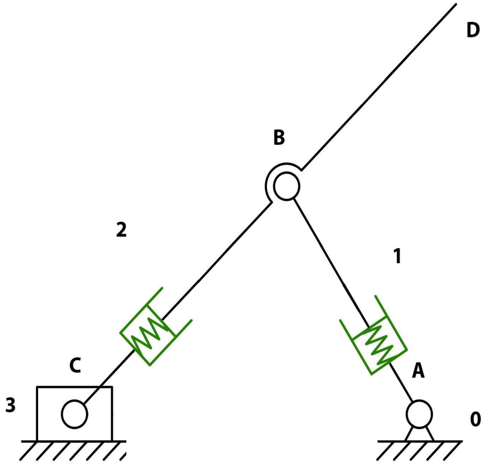
$$W_{\text{пл}} = 3 \cdot 7 - 2 \cdot 8 = 5$$

12



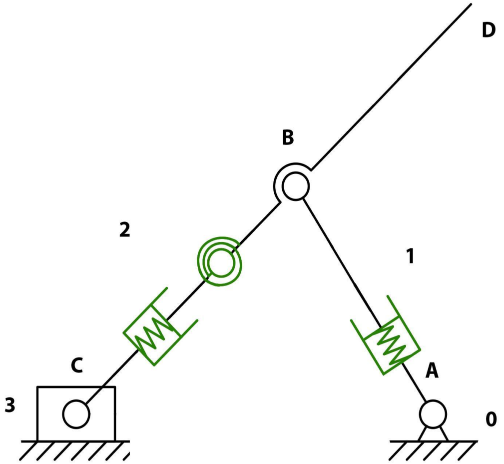
$$W_{\text{пл}} = 3 \cdot 4 - 2 \cdot 5 = 2$$

13



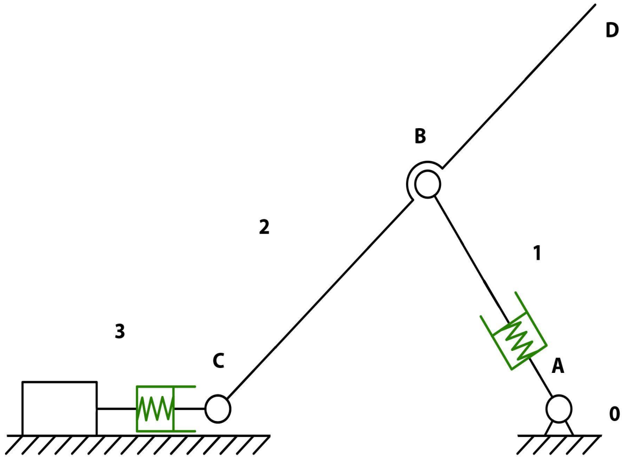
$$W_{\text{пл}} = 3 \cdot 5 - 2 \cdot 6 = 3$$

14



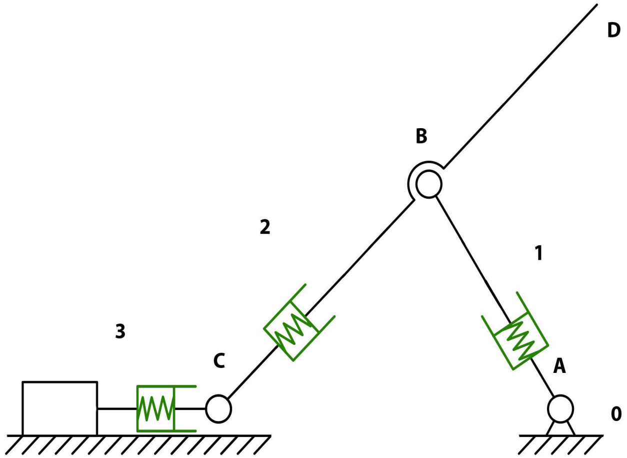
$$W_{\text{пл}} = 3 \cdot 6 - 2 \cdot 7 = 4$$

15



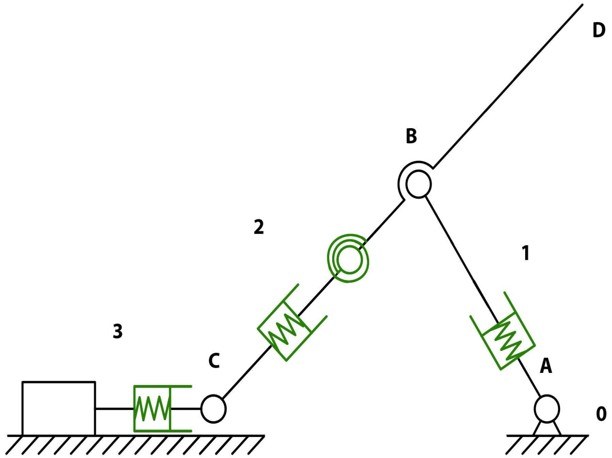
$$W_{\text{пл}} = 3 \cdot 5 - 2 \cdot 6 = 3$$

16



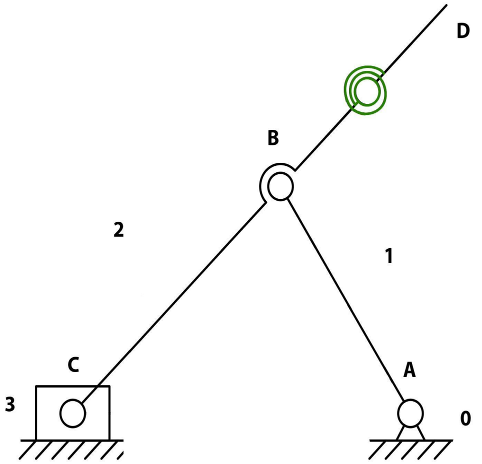
$$W_{\text{пл}} = 3 \cdot 6 - 2 \cdot 7 = 4$$

17



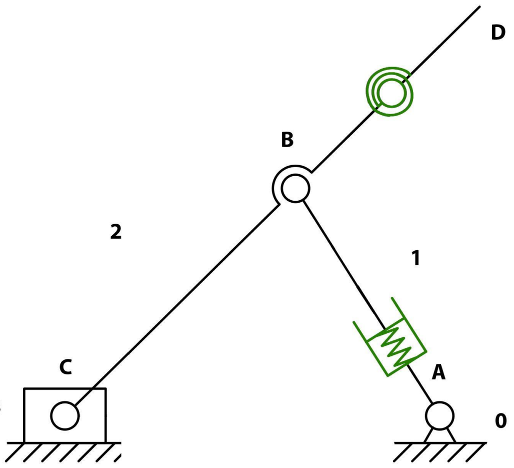
$$W_{\text{пл}} = 3 \cdot 7 - 2 \cdot 8 = 5$$

18



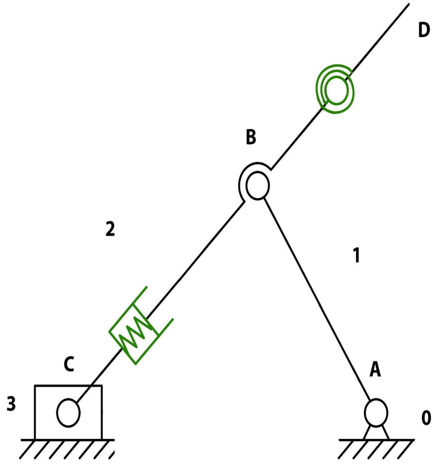
$$W_{\text{пл}} = 3 \cdot 4 - 2 \cdot 5 = 2$$

19



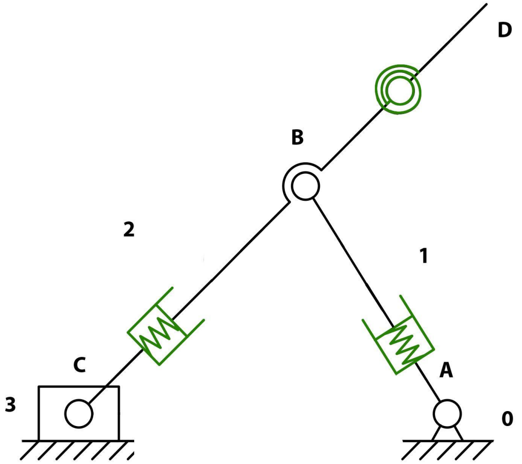
$$W_{\text{пл}} = 3 \cdot 5 - 2 \cdot 6 = 3$$

20



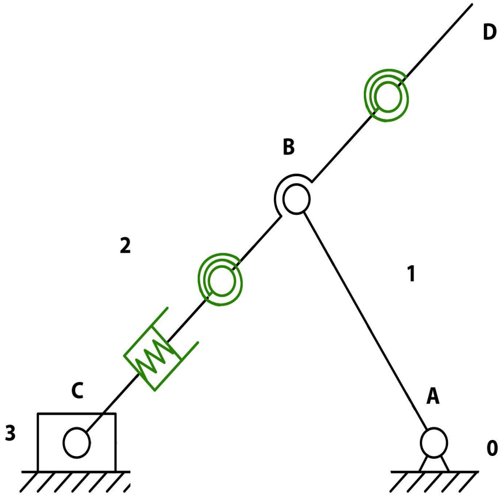
$$W_{\text{пл}} = 3 \cdot 5 - 2 \cdot 6 = 3$$

21



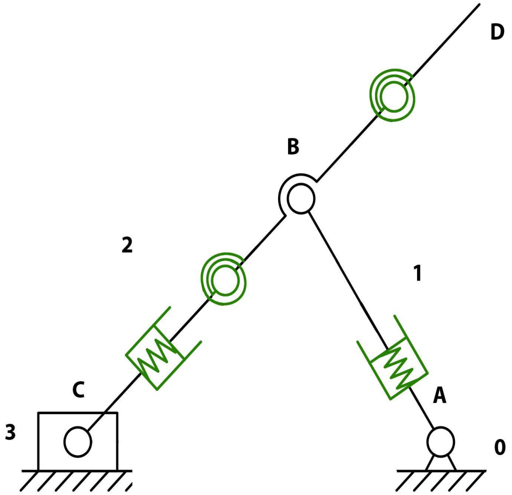
$$W_{\text{пл}} = 3 \cdot 6 - 2 \cdot 7 = 4$$

22



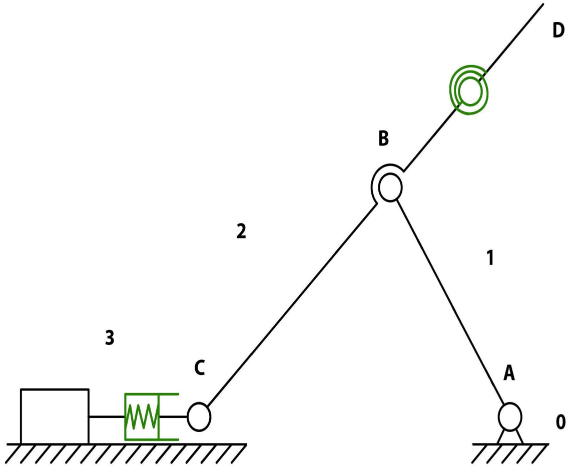
$$W_{\text{пл}} = 3 \cdot 6 - 2 \cdot 7 = 4$$

23



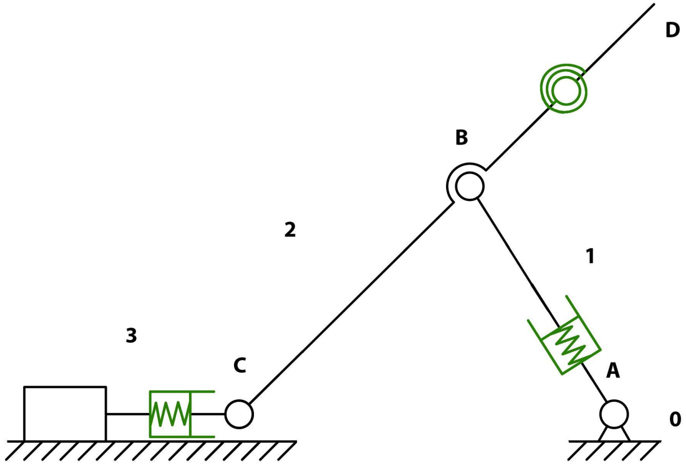
$$W_{\text{пл}} = 3 \cdot 7 - 2 \cdot 8 = 5$$

24



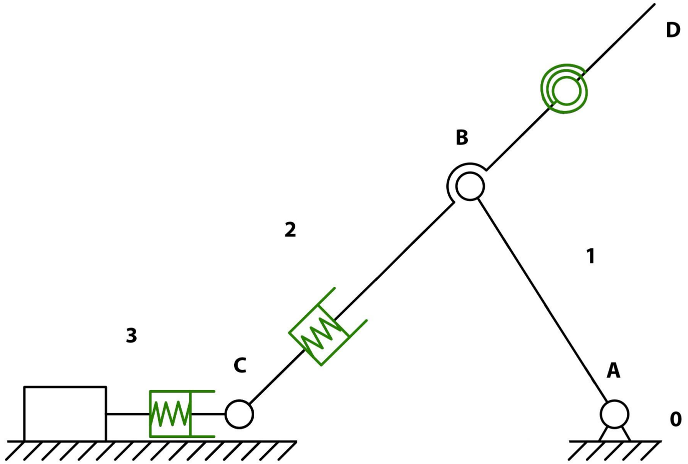
$$W_{\text{пл}} = 3 \cdot 5 - 2 \cdot 6 = 3$$

25



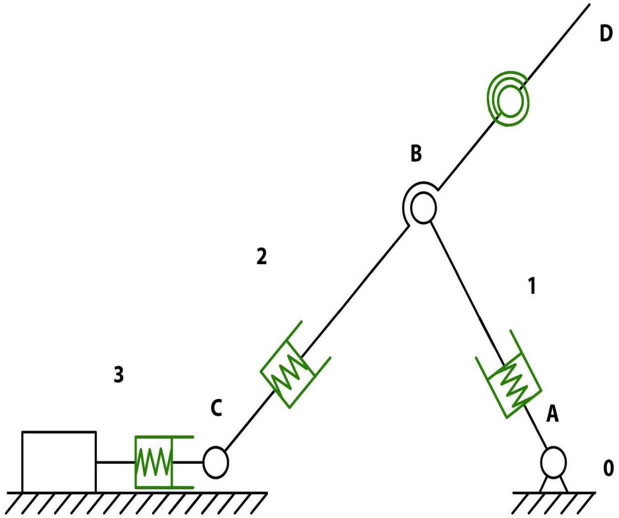
$$W_{\text{пл}} = 3 \cdot 6 - 2 \cdot 7 = 4$$

26



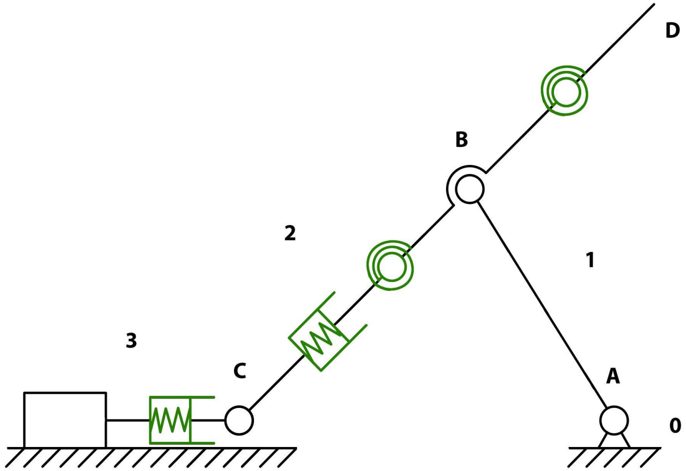
$$W_{\text{пл}} = 3 \cdot 6 - 2 \cdot 7 = 4$$

27



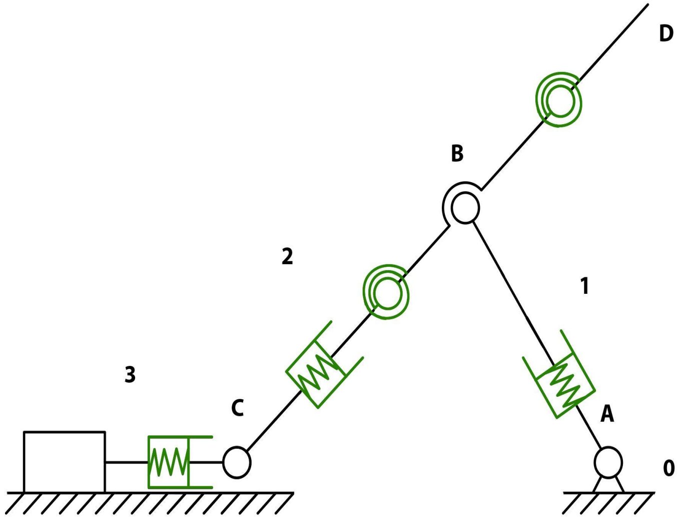
$$W_{\text{пл}} = 3 \cdot 7 - 2 \cdot 8 = 5$$

28



$$W_{\text{пл}} = 3 \cdot 7 - 2 \cdot 8 = 5$$

29



$$W_{\text{пл}} = 3 \cdot 8 - 2 \cdot 9 = 6$$

30

ДЗ №3

- На рис. 3.3.31 представлен *эскиз формы звеньев*, соответствующий структурной схеме, изображенной на рис. 3.3.30. Показаны характерные размеры: постоянная площадь сечения коромысла 1 A_1,части шатуна 2 A_2, ползуна 3 A_3, а также радиусы кривизны для шатуна 2 (т.к. он работает на изгиб/нагружен комбинированно, площадь его сечения должна изменяться по квадратичному закону, но из соображений технологичности выбрана форма дуги окружности радиуса, много большего ширины сечения).
- К слову о количестве степеней свободы полученного механизма: нетрудно заметить, что при учете одного возможного перемещения, соответствующего некоторой деформации определенного звена, структурная схема приобретает одно новое звено и одну новую одноподвижную КП. Таким образом, при учёте x возможных перемещений общая подвижность механизма увеличивается на x, соответствующий числу местных подвижностей в кинематических цепях механизма.

$$W_{\text{общ.п}} = W_{\text{нач.п}} + W_{\text{местн.п}} \quad (3.3.1)$$

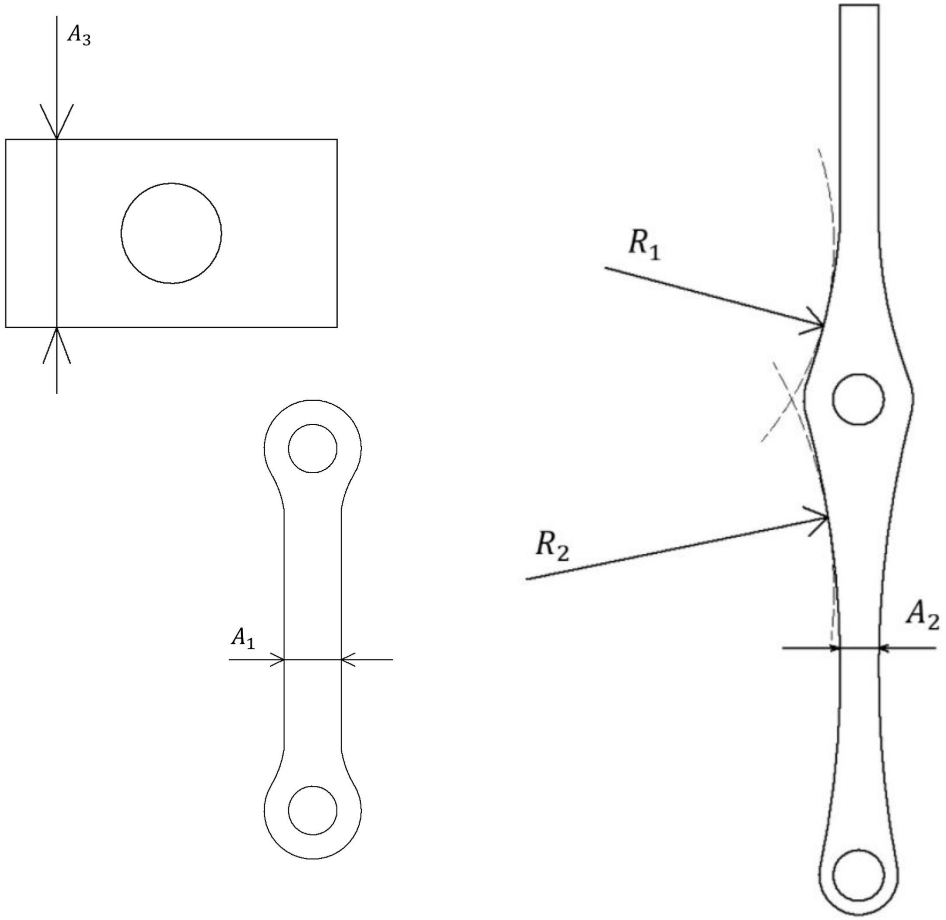


Рис. 3.3.31
Эскиз с примерной формой звеньев для наиболее сложной конфигурации их НДС

Список литературы

- Березкин Е.Н. Курс теоретической механики. М.: МГУ, 1974. - 647 с.
- Ю. Г Игнатьев. Дифференциальная геометрия кривых и поверхностей в евклидовом пространстве. Учебное пособие. IV семестр. - Казань: Казанский университет, 2013, - 204 с
- Теория механизмов и машин: Учеб. для втузов/ К. В. Фролов, С.А. Попов, А.К. Мусатов и др.; Под ред. К. В. Фролова. – М.: Высш.шк., 1987.–496 с.: ил.
- Семинары по теоретической механике осеннего семестра. МФТИ. URL: https://mipt1.ru/3_teormeh/AutumnALL.1.pdf
- Лекции по курсу «Теория механизмов и машин». МГТУ. URL: http://tmm-umk.bmstu.ru/lectures/
- Теория механизмов и машин: учеб. Пособие /А.Ю. Муйземнек, А.В. Шорин. – Пенза: изд-во ПГУ, 2019.-160с.