Лекция № 1

Баутин Сергей Петрович,
доктор физико-математических наук,
профессор

Правила взаимодействия:

1. Взаимные приветствия, перекличка.
2. Дежурная группа, главный – староста.
3. Доска, мел, журнал на подпись в конце лекции.
4. **Опоздавших в аудиторию не пускаю!**
5. Выход из аудитории с разрешения лектора.
6. Не есть, не жевать, не разговаривать.
7. **Мобильную связь отключать до лекции!!!**

Системы линейных алгебраических уравнений

Определение. Система линейных алгебраических уравнений (СЛАУ)

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \,, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \,, \\ \cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \,. \end{cases}$$

m уравнений и n неизвестных: $x_1, x_2, \ldots, x_n$.
В общем случае $m \neq n$.
Заданные числа a_{ij} – коэффициенты системы
двойной индекс $1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n$
первый i – номер уравнения, в котором находится данный коэффициент,
второй j – номер неизвестной, перед которой он стоит.
Заданные числа $b_1, b_2, \ldots, b_m$ называются свободными членами, правыми частями СЛАУ, неоднородностями.

Определение. Решением СЛАУ называется такой набор чисел

$$x_1 = \alpha_1,\ x_2 = \alpha_2,\ \ldots,\ x_n = \alpha_n,$$

который при подстановке в СЛАУ обращает в тождество каждое уравнение системы.

В решение входит n чисел, но этот набор задает только одно решение СЛАУ.

Определение. Если СЛАУ не имеет ни одного решения, то она называется **несовместной**. Если имеет решения, то — **совместной**.

Матрицы

Матрицы необходимы для решения **системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ)**.

Определение. Матрица это прямоугольная **таблица чисел**.

Пример.

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}, B=\begin{bmatrix} 2.24 \\ -11 \\ 3.68 \\ -0.5 \end{bmatrix}, C=\begin{Vmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{Vmatrix}, D=\begin{pmatrix} d_1; & d_2; & d_3 \end{pmatrix}$$

Определение. Числа, составляющие матрицу, называются ее **элементами**.

Обычно между элементами матрицы разделительные знаки не пишут, но лучше их разделять между собой точкой с запятой.

Элементы располагаются по **строкам** и **столбцам** матрицы.

Произведение числа строк на число столбцов матрицы определяет **размеры матрицы**:

A имеет размеры 2×3; B – 4×1; C – 2×2; D – 1×3.

Определение. Если у матрицы только одна строка, то она называется **матрица-строка** (или **вектор-строка**).

Если у матрицы только один столбец – **матрица-столбец** (или **вектор-столбец**).

Определение. Если у матрицы число строк m и число столбцов n одинаковое: $m = n$ – то она называется **квадратной**.

Общий случай матрицы $m \times n$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ & & \dots & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Элементы матрицы a_{ij}:

первый индекс i указывает **номер строки**, в которой стоит данный элемент,

второй индекс j — **номер столбца**.

Квадратная **диагональная** матрица:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Квадратная **единичная** матрица E:

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Матрица, все элементы которой равны нулю, называется **нулевой**.

Операции над матрицами

Равенство матриц. Матрицы A и B называются равными, если они имеют одинаковые размеры и на одинаковых местах стоят одинаковые элементы.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ & & \dots & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1\ell} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2\ell} \\ & & \dots & \\ b_{k1} & b_{k2} & \dots & b_{k\ell} \end{pmatrix}$$

$$A = B$$

если $k = m$, $\ell = n$ и $a_{ij} = b_{ij}$ при всех $1 \le i \le m$, $1 \le j \le n$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Умножение матрицы на число. Чтобы матрицу умножить на число, надо каждый элемент матрицы умножить на это число

$$c \cdot A = \begin{pmatrix} c \cdot a_{11}; & c \cdot a_{12}; & \dots & c \cdot a_{1n} \\ c \cdot a_{21}; & c \cdot a_{22}; & \dots & c \cdot a_{2n} \\ & & \dots & \\ c \cdot a_{m1}; & c \cdot a_{m2}; & \dots & c \cdot a_{mn} \end{pmatrix}$$

Сложение матриц. $A = (a_{ij})$ и $B = (b_{ij})$ одинаковых размеров

$$A + B = C = (c_{ij}) \ , \quad c_{ij} = a_{ij} + b_{ij} \ ; \ 1 \le j \le n,$$

складываются элементы, стоящие на одинаковых местах.

Вычитание матриц: $A - B = A + (-1)B$

Умножение матриц. Чтобы умножить матрицу $A = (a_{ij})_{mn}$ на матрицу $B = (b_{ij})_{k\ell}$ надо **каждую строку** первого сомножителя "умножить" **на каждый столбец** второго сомножителя и результат поставить в "соответствующее" место

$$C = A \cdot B = AB$$

Умножение строки на столбец.

$$(a_{i1}, a_{i2}, \dots\ a_{in-1}, a_{in}) \cdot \begin{pmatrix} b_{1j} \\ b_{2j} \\ \cdots \\ b_{k-1j} \\ b_{kj} \end{pmatrix} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \dots + a_{in}b_{kj} =$$

$$= c_{ij} \text{ – число}$$

При умножении строки на столбец элементы, стоящие на одинаковых местах от начала строки и от начала столбца, перемножаются, а полученнные произведения складываются.

Число элементов в строке матрицы A должно быть равно числу элементов в матрице B: $n = k$, т.е. **число столбцов в A должно совпадать с числом строк в B.**

Во всех других случаях перемножать матрицы A и B нельзя!!!

$$A \cdot B = AB = \left(\begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \\ \hline 4 & 5 & 6 \end{array}\right) \cdot \left(\begin{array}{c|c|c} 7 & 8 & 9 \\ 10 & 11 & 12 \\ 13 & 14 & 15 \end{array}\right) =$$

$$= \left(\begin{array}{c|c|c} 1 \cdot 7 + 2 \cdot 10 + 3 \cdot 13 & 1 \cdot 8 + 2 \cdot 11 + 3 \cdot 14 & 1 \cdot 9 + 2 \cdot 12 + 3 \cdot 15 \\ \hline 4 \cdot 7 + 5 \cdot 10 + 6 \cdot 13 & 4 \cdot 8 + 5 \cdot 11 + 6 \cdot 14 & 4 \cdot 9 + 5 \cdot 12 + 6 \cdot 15 \end{array}\right) =$$

$$= \left(\begin{array}{c|c|c} 66 & 72 & 78 \\ \hline 156 & 171 & 186 \end{array}\right)$$

$$\boxed{\begin{matrix} & B \\ A & C \end{matrix}} \qquad \left(\begin{array}{c|c|c} 7 & 8 & 9 \\ 10 & 11 & 12 \\ 13 & 14 & 15 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \\ \hline 4 & 5 & 6 \end{array}\right) \qquad \left(\begin{array}{c|c|c} 66 & 72 & 78 \\ \hline 156 & 171 & 186 \end{array}\right)$$

Запись СЛАУ в матричной форме

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1\ , \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2\ , \\ \cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m\ . \end{cases}$$

Вводятся такие матрицы:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \ldots \\ b_m \end{pmatrix},\ X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix}$$

A – матрица коэффициентов СЛАУ;

B – матрица свободных членов (матрица-столбец);

X – матрица-столбец неизвестных.

СЛАУ кратко записывается в **матричной форме**:

$$\boxed{AX = B}$$

Определители и их свойства

Для любой квадратной матрицы $A = (a_{ij})$, размеров $n \times n$, по специальному правилу вычисляется число: **определитель n-го порядка** (или **детерминант n-го порядка**) данной матрицы

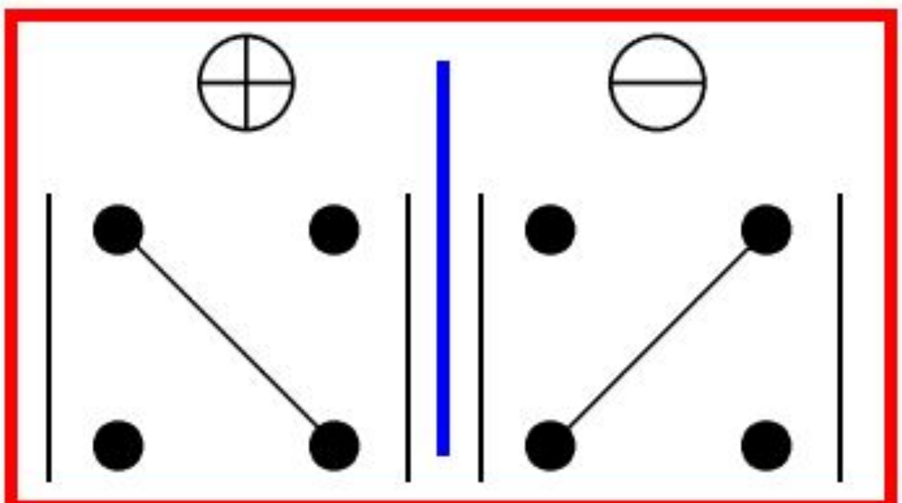
$$\det A = \Delta(A) = \Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Правило вычисления определителя дается по индукции: сначала для $n = 1$; затем для $n = 2, 3$;
далее для произвольного n в предположении, что для значения $(n-1)$ правило уже известно.

Определение. Для квадратной матрицы размеров 1×1, т.е. в случае $A = (a_{11})$, ее определитель совпадает с единственным элементом этой матрицы: $\det A = a_{11}$.

Определение. Для квадратной матрицы размеров 2×2, ее определитель – определитель второго порядка – вычисляется по формуле

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \ ,$$

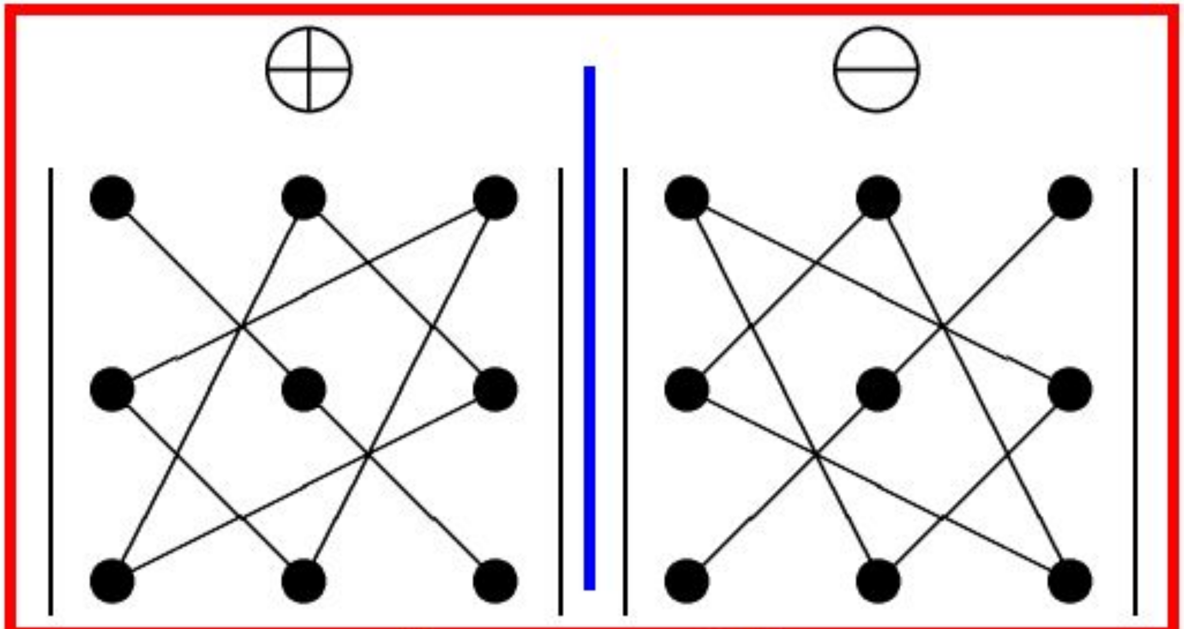


$$\boxed{n = 2}$$

Определение. Для квадратной матрицы размеров 3×3 определитель третьего порядка вычисляется по формуле

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{21}a_{32}a_{13}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{23}a_{32}a_{11}$$



$$\boxed{n = 3}$$

Определение. Для квадратной матрицы размеров $n \times n$ ее определитель n-го порядка

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

вычисляется с помощью разложения по первой строке:

$$\det A = \begin{vmatrix} \boxed{a_{11} \quad a_{12} \quad \dots \quad a_{1n}} \\ a_{21} \quad a_{22} \quad \dots \quad a_{2n} \\ \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\ a_{n1} \quad a_{n2} \quad \dots \quad a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + \ldots + a_{1n}A_{1n}$$

т.е. все члены первой строки a_{1j} $(1 \leq j \leq n)$ умножаются на свои алгебраические дополнения (числа A_{1j}) и полученные произведения складываются.

Определение. A_{ij} — алгебраическое дополнение элемента a_{ij} вычисляется по формуле

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij} \ ,$$

где M_{ij} — минор элемента a_{ij}
т.е.

$$A_{ij} = M_{ij}, \quad \text{если сумма } (i+j) \ \textbf{четное} \text{ число}$$

$$A_{ij} = -M_{ij}, \quad \text{если сумма } (i+j) \ \textbf{нечетное} \text{ число}$$

Определение. M_{ij} – минор элемента a_{ij} есть определитель $(n-1)$-го порядка , который получается из исходного определителя n-го порядка вычеркиванием строки с номером i и столбца с номером j, в которых стоит этот элемент a_{ij}:

Определение. M_{ij} – минор элемента a_{ij} есть определитель $(n-1)$-го порядка, который получается из исходного определителя n-го порядка вычеркиванием строки с номером i и столбца с номером j, в которых стоит этот элемент a_{ij}:

$$M_{ij} = \begin{vmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,j-1} & a_{1,j} & a_{1,j+1} & \dots & a_{1,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i-1,1} & \dots & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j} & a_{i-1,j+1} & \dots & a_{i-1,n} \\ a_{i,1} & \dots & a_{i,j-1} & a_{i,j} & a_{i,j+1} & \dots & a_{i,n} \\ a_{i+1,1} & \dots & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j} & a_{i+1,j+1} & \dots & a_{i+1,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n,1} & \dots & a_{n,j-1} & a_{n,j} & a_{n,j+1} & \dots & a_{n,n} \end{vmatrix}$$

Т.е. с помощью миноров – определителей $(n-1)$-го порядка – вычисляется определитель n-го порядка.

Свойства определителей

Свойство 1. *При транспонировании матрицы ее определитель не меняется:*

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Доказательства проделать самим на примере произвольных определителей третьего порядка.

Например, для свойства 1:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33}+a_{21}a_{32}a_{13}+a_{12}a_{23}a_{31}- \\ -a_{31}a_{22}a_{13}-a_{21}a_{12}a_{33}-a_{32}a_{23}a_{11}$$

Теорема. *Если какое-нибудь свойство справедливо для строк определителя, то оно будет справедливо и для его столбцов.*

Свойство 2. *Определитель можно считать, раскладывая по любой строке (по любому столбцу).*

Например:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \boxed{a_{12}} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{12}A_{12} + a_{22}A_{22} + a_{32}A_{32} =$$

$$= a_{12}(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{22}(-1)^{2+2}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} +$$

$$+ a_{32}(-1)^{3+2}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix} = -a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}) +$$

$$+ a_{22}(a_{11}a_{33} - a_{13}a_{31}) - a_{32}(a_{11}a_{23} - a_{13}a_{21}) = -a_{12}a_{21}a_{33} +$$

$$+ a_{12}a_{23}a_{31} + a_{22}a_{11}a_{33} - a_{22}a_{13}a_{31} - a_{32}a_{11}a_{23} + a_{32}a_{13}a_{21}$$

Свойство 3. *Если в определителе две строки (два столбца) поменять местами, то определитель сменит знак.*

Например:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a_{13} & a_{12} & a_{11} \\ a_{23} & a_{22} & a_{21} \\ a_{33} & a_{32} & a_{31} \end{vmatrix}$$

Свойство 4. *Чтобы определитель умножить на число, надо все элементы только одной строки (только одного столбца) умножить на это число.*

Например:

$$k \cdot \Delta = \begin{vmatrix} a_{11}; & a_{12}; & a_{13} \\ a_{21}; & a_{22}; & a_{23} \\ k \cdot a_{31}; & k \cdot a_{32}; & k \cdot a_{33} \end{vmatrix}$$

Умножение определителя на число отличается

от умножения матрицы на число!!!

Свойство 6. *Определитель заведомо равен нулю в следующих случаях:*

a) *если в нем есть строка (столбец), состоящая только из нулей;*

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ \boxed{0 \quad 0 \quad 0} \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = 0$$

b) *если в нем есть равные строки (столбцы);*

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 0$$

c) *если в нем есть пропорциональные строки (столбцы);*

$$\begin{vmatrix} a_{11}; & a_{12}; & a_{13} \\ k \cdot a_{11}; & k \cdot a_{12}; & k \cdot a_{13} \\ a_{31}; & a_{32}; & a_{33} \end{vmatrix} = 0\,, \quad \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 8 & 6 \\ 7 & 14 & 9 \end{vmatrix} = 0$$