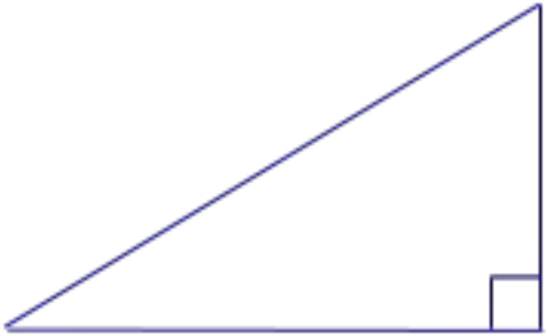


Прямоугольные треугольники

Подготовила Папуниди Лика, 9 «Б»

Вопросы:

1.Какой треугольник является прямоугольным?
(В котором один угол прямой (то есть составляет 90 градусов))
2.Что такое катет?
(Одна из двух сторон, образующих прямой угол в прямоугольном треугольнике)
3.Что такое гипотенуза?
(Сторона прямоугольного треугольника, лежащая против прямого угла.)
4.Где лежит центр описанной окружности прямоугольного треугольника?
(В середине гипотенузы.)
5.Чем является медиана прямоугольного треугольника, проведенная из вершины прямого угла на гипотенузу?
(Радиусом описанной около этого треугольника окружности)
6.Сформулируйте теорему Пифагора
(В прямоугольном треугольнике квадрат длины гипотенузы равен сумме квадратов длин катетов)

Теорема 1 (*первый признак равенства — по двум катетам*)

Если катеты одного треугольника соответственно равны катетам другого треугольника, то такие прямоугольные треугольники равны.

Теорема 2 (*второй признак равенства — по катету и прилежащему острому углу*)

Если катет и прилежащий острый угол одного треугольника соответственно равны катету и прилежащему острому углу другого треугольника, то такие прямоугольные треугольники равны.

Теорема 3 (*третий признак равенства — по гипотенузе и острому углу*)

Если гипотенуза и острый угол одного треугольника соответственно равны гипотенузе и острому углу другого треугольника, то такие прямоугольные треугольники равны.

Дано: $\triangle ABC$ и $\triangle A_1B_1C_1$, $\angle C = \angle C_1 = 90°$, $AB = A_1B_1$, $\angle A = \angle A_1$.

Требуется доказать: $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$.

Доказательство:

Доказываем наложением $\triangle ABC$ на $\triangle A_1B_1C_1$. Гипотенузы при этом совместятся. AC пойдёт по A_1C_1, так как $\angle A = \angle A_1$. Но $BC \perp AC$ и $B_1C_1 \perp A_1C_1$. BC совпадёт с B_1C_1.

Теорема 4 (*четвёртый признак равенства — по гипотенузе и катету*)

Если гипотенуза и катет одного треугольника соответственно равны гипотенузе и катету другого треугольника, то такие прямоугольные треугольники равны.

Дано: $\triangle ABC$ и $\triangle A_1B_1C_1$, $\angle C = \angle C_1 = 90^\circ$, $AB = A_1B_1$, $BC = B_1C_1$.

Требуется доказать: $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$.

Доказательство:

Для доказательства применим способ приложения, которым был доказан признак равенства всяких треугольников. Приложим $\triangle A_1B_1C_1$ и $\triangle ABC$ равными катетами. Тогда сумма двух прямых есть развёрнутый угол, стороны которого CA и CA_1 образуют одну прямую. $BC \perp AA_1$.

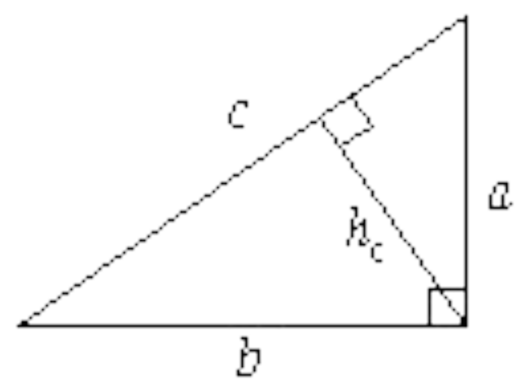
Из равенства наклонных BA и BA_1 следует: $AC = C_1A$. По трём сторонам или по двум катетам треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ равны.

Формулы площади:

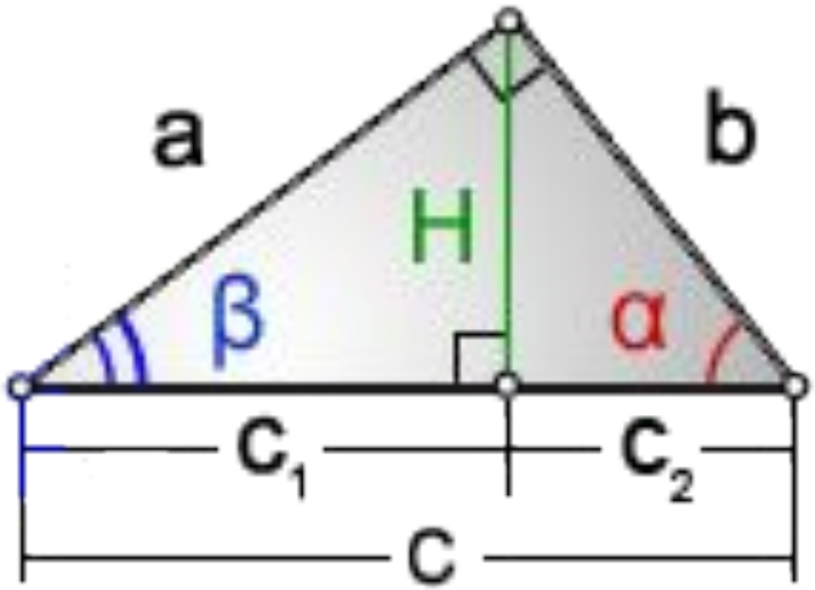
a, b — катеты; c — гипотенуза; h_c — высота, проведенная к стороне c.

$$S = \frac{1}{2}ab$$

$$S = \frac{1}{2}ch_c$$



Высота

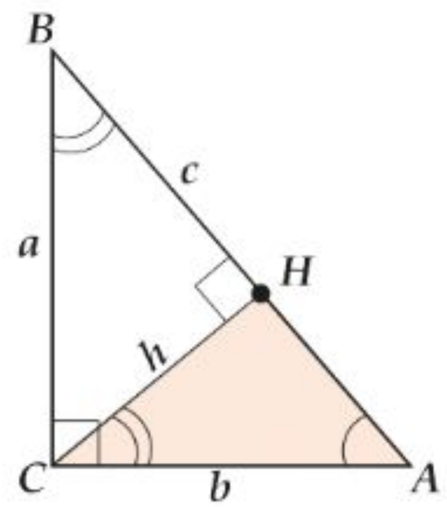


$$H = \frac{ab}{c} = \frac{ab}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

$$H = c\ \sin\alpha\cos\alpha = c\ \sin\beta\cos\beta$$

$$H = b\sin\alpha = a\sin\beta$$

$$H = \sqrt{c_1 c_2}$$



Чтобы писать меньше букв, обозначим: $AC = b$; $BC = a$; $AB = c$; $CH = h$ (посмотри на рисунке). Применяем подобие: $\Delta ABC \sim \Delta ACH$.

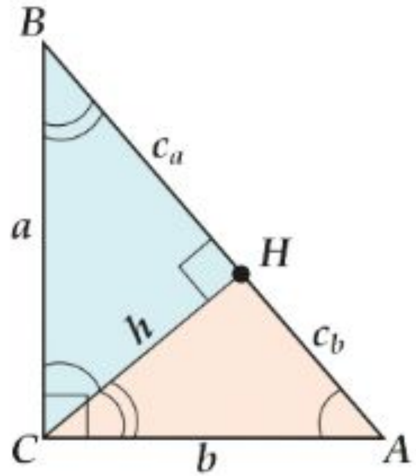
лежит напротив $\angle A$ в $\triangle ABC$

гипотенуза в в $\triangle ABC$

$$\frac{a}{h} = \frac{c}{b} \longrightarrow h = \frac{ab}{c}$$

лежит напротив $\angle A$ в $\triangle ACH$

гипотенуза в в $\triangle ACH$



Но сначала обозначим $BH = c_a$ и $CH = c_b$ (смотри на рисунок)

Итак, применим подобие: $\Delta BCH \sim \Delta CAH$.

лежит напротив $\angle B$ в $\triangle BCH$

лежит напротив $\angle BCH$ в $\triangle BCH$

$$\frac{h}{c_b} = \frac{c_a}{h}$$

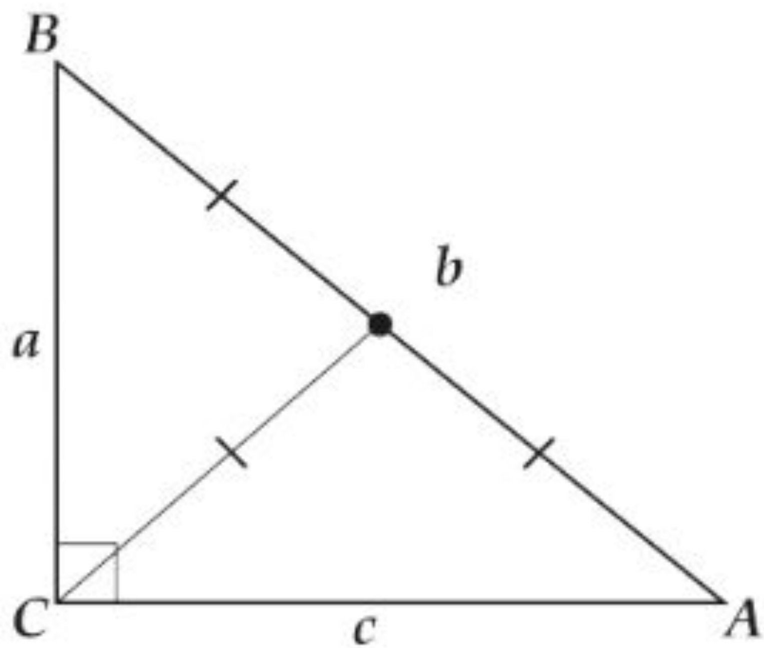
лежит напротив $\angle HCA = \angle B$ в $\triangle CAH$

лежит напротив $\angle A = \angle BCH$ в $\triangle CAH$

$$h = \frac{ab}{c}$$

$$h = \sqrt{c_a c_b}$$

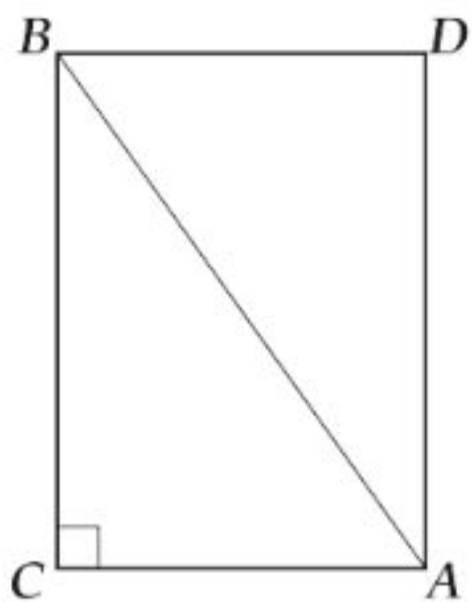
Медиана



В прямоугольном треугольнике **медиана, проведённая из вершины прямого угла, равна половине гипотенузы**

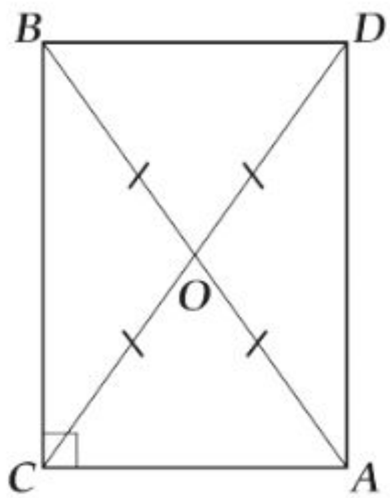
Почему это так?

Рассмотрим вместо прямоугольного треугольника целый прямоугольник.



Что видим? Треугольник ABC – половина прямоугольника.

Проведём диагональ CD и рассмотрим точку O - точку пересечения диагоналей. Что известно про диагонали прямоугольника?



- Точкой пересечения диагонали делятся пополам
- Диагонали равны

И что из этого следует?

- $BO = OA;\ CO = OD$
- $AB = CD \Rightarrow AO = CO$

Вот и получилось, что

1. CO – медиана:
2. $CO = \dfrac{AB}{2}$

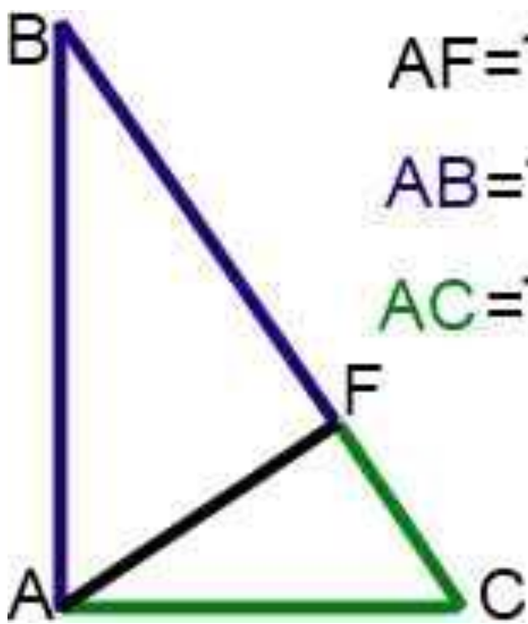
Проекция катета на гепотенузу

Свойства прямоугольного треугольника:

1. Высота, проведенная к гипотенузе, есть среднее пропорциональное между проекциями катетов на гипотенузу.

2. Катет есть среднее пропорциональное между гипотенузой и проекцией этого катета на гипотенузу.

Например, в треугольнике ABC AF — высота, проведенная к гипотенузе BC, BF — проекция катета AB на гипотенузу, FC — проекция катета AC на гипотенузу.



$$AF=\sqrt{BF\cdot FC}$$

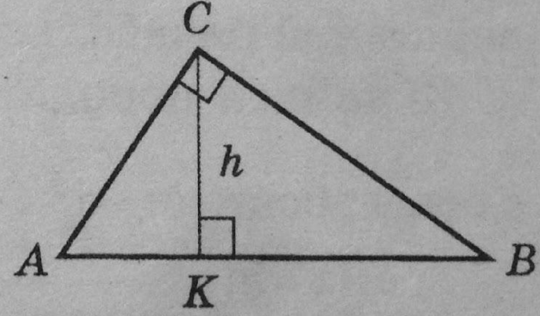
$$AB=\sqrt{BF\cdot BC}$$

$$AC=\sqrt{FC\cdot BC}$$

Вариант 71

4 Высота прямоугольного треугольника, опущенная на гипотенузу, делит ее на отрезки, равные 2 см и 8 см. Найдите эту высоту.

Решение.



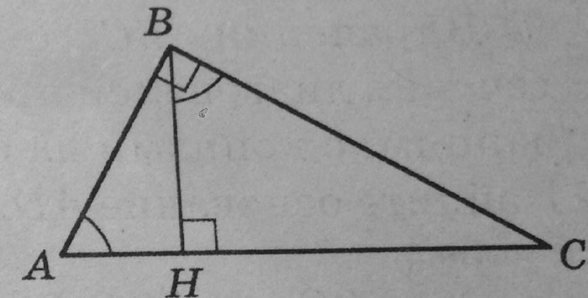
Пусть $\angle C = 90^\circ$, CK — высота, $AK = 2$ см, $KB = 8$ см. Высота, опущенная на гипотенузу, есть среднее пропорциональное (геометрическое) между проекциями катетов на гипотенузу. Так как AK и KB — проекции катетов на гипотенузу, то $CK = \sqrt{AK \cdot KB} = \sqrt{2 \cdot 8} = \sqrt{16} = 4$ (см).

Ответ: 4 см.

Вариант 140

9 Высота прямоугольного треугольника, проведенная к гипотенузе, делит треугольник на две части, площади которых равны 6 см^2 и 54 см^2. Найдите гипотенузу.

Решение.



1) $\Delta ABH \sim \Delta BCH$ (по двум углам),

тогда $\dfrac{S_{ABH}}{S_{BCH}} = k^2$; $k^2 = \dfrac{6}{54}$; $k^2 = \dfrac{1}{9}$; $k = \dfrac{1}{3}$;

$k = \dfrac{BH}{HC}$, т. е. $\dfrac{BH}{HC} = \dfrac{1}{3}$; $HC = 3BH$;

2) $S_{BHC} = \dfrac{1}{2} \cdot BH \cdot HC$; $54 = \dfrac{1}{2} \cdot BH \cdot 3 \cdot BH$;

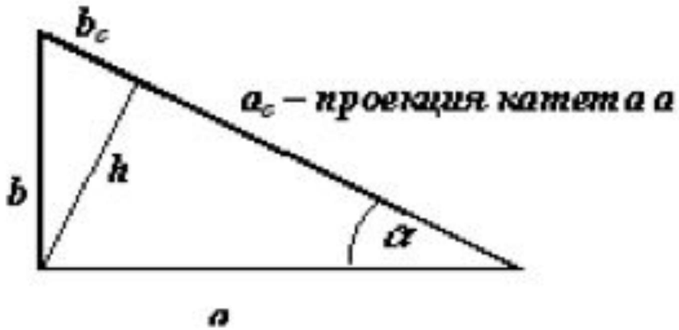
$BH^2 = 36$; $BH = 6$ см, тогда $HC = 18$ см;

3) $BH^2 = AH \cdot HC$; $AH = \dfrac{BH^2}{HC}$; $AH = \dfrac{36}{18} = 2$ см;

4) $AC = AH + HC$; $AC = 2 + 18 = 20$ (см).

Ответ: 20 см.

Выводы:



Теорема Пифагора: $c^2 = a^2 + b^2$ Площадь: $S = \frac{1}{2} a \cdot b$

Тригонометрические соотношения: $\cos\alpha = \frac{a}{c}; \quad \sin\alpha = \frac{b}{c}; \quad tg\alpha = \frac{b}{a}$

Центр описанной окружности лежит на середине гипотенузы.

Радиусы окружностей: $r = \frac{a+b-c}{2}; \quad R = \frac{c}{2}$

Высота, опущенная на гипотенузу: $h = \sqrt{a_c \cdot b_c} = \frac{a \cdot b}{c}; \quad \left(\frac{a}{b}\right)^2 = \frac{a_c}{b_c}$

Катеты: $a = \sqrt{a_c \cdot c}; \quad b = \sqrt{b_c \cdot c}$