Предел функции в точке и на бесконечности. Предел числовой последовательности.

...

Наиболее удобный способ задания последовательности — это задать ее общий член a_n. Например, $a_n = 3n + 1$, $a_n = \sqrt{n^2 - 1}$, или $a_n = n^2 - 2$. Иногда последовательность задается рекуррентной формулой через предыдущие члены. Например, $a_n = 2a_{n-1} + a_{n-2}$, где $a_1 = 1$ и $a_2 = 2$, $n > 2$.

Числовая последовательность также может быть задана словесным описанием ее членов. Например, десятичные приближения числа $\sqrt{2}$ запишем так: 1; 1,4; 1,41; 1,414; 1,4142; 1,41 421, ...

Числовую последовательность можно рассматривать как числовую функцию, заданную на множестве натуральных чисел N. Например, $a_n = f(n) = \sqrt{n^2 + 1}$. Тогда (a_n) : $\sqrt{2}; \sqrt{5}; \sqrt{10}$, ...

Также как и функции, числовые последовательности бывают ограниченными сверху или снизу, монотонно возрастающими или убывающими.

...

Рассмотрим примеры числовых последовательностей.

ПРИМЕР

1. Пусть задана последовательность $2; \frac{3}{2}; \frac{4}{3}; \frac{5}{4}, \ldots, \frac{n+1}{n}$. Ее общий член $a_n = \frac{n+1}{n} = 1 + \frac{1}{n}$. Из этой формулы видно, что при $n \to \infty$ значение разности $|a_n - 1|$ стремится к нулю.

ПРИМЕР

2. 1) Выпишем несколько членов последовательности (a_n), где $a_n = \frac{\sin n}{n}$: $\frac{\sin 1}{1}; \frac{\sin 2}{2}; \frac{\sin 3}{3}; \frac{\sin 4}{4}; \ldots$. Так как функция sinx ограниченная, а знаменатель дроби стремится к бесконечности, то последовательность стремится к 0.

2) Рассмотрим последовательность 1; 1,4; 1,41; 1,414; 1,4142; 1,41 421; ... , это приближения с недостатком числа $\sqrt{2}$. Члены этой последовательности при возрастании n приближаются к числу $\sqrt{2}$.

Определение. ***Пределом последовательности*** (x_n) ***при*** n***, стремящемся к бесконечности,*** *называется такое число* A*, если для любого числа* $\varepsilon > 0$ *можно указать такое* N_0*, что для любого* n*, удовлетворяющему неравенству* $n > N_0$*, выполняется неравенство* $|x_n - A| < \varepsilon$.

Записывают: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = A$.

ПРИМЕР

3. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n+1}{n} = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right) = 1$, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sin n}{n} = 0$.

Очевидно, что если числовая последовательность имеет предел, то этот предел единственный.

Пусть значения функции $y = f(x)$ при x, стремящемся к числу a, неограниченно приближаются к числу 5, принимая при этом значения: 4,9; 4,99; 4,999; ... или 5,1; 5,01; 5,001; ... .

В этих случаях модуль значения разности между каждым из этих чисел и числом 5 стремится к нулю.

Действительно, $|4{,}9 - 5| = 0{,}1$; $|4{,}99 - 5| = 0{,}01$; $|4{,}999 - 5| = 0{,}001$; ... или $|5{,}1 - 5| = 0{,}1$; $|5{,}01 - 5| = 0{,}01$; $|5{,}001 - 5| = 0{,}001$; ... .

$0{,}1;\ 0{,}01;\ 0{,}001;\ \ldots \to 0$.

Число 5 в приведенном примере называют *пределом функции* $y = f(x)$ при x, стремящемся к числу a.

...

Определение 1. ***Пределом функции*** *$y = f(x)$ при x, стремящемся к числу a, называется такое число A, если для любого числа $\varepsilon > 0$ можно указать такое $\delta > 0$, что для любого $x \neq a$, удовлетворяющему неравенству $0 < |x - a| < \delta$, выполняется неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$.*

Записывают: $\lim\limits_{x \to a} f(x) = A$.

Определение 2. *Если число A_1 есть предел функции $y = f(x)$ при x, стремящемся к числу a так, что x принимает только значения меньшие числа a, то число A_1 называется* ***левым пределом функции*** *$y = f(x)$ в точке a.*

Записывают: $\lim\limits_{x \to a-0} f(x) = A_1$.

Определение 3. *Если число A_2 есть предел функции $y = f(x)$ при x, стремящемся к числу a так, что x принимает только значения большие числа a, то число A_2 называется* ***правым пределом функции*** *$y = f(x)$ в точке a.*

Записывают: $\lim\limits_{x \to a+0} f(x) = A_2$.

...

Теорема 1. *Если существуют пределы функций $y = f(x)$ и $y = q(x)$ при x, стремящемся к числу a, то существует предел их суммы, равный сумме пределов этих функций.*

$$\lim_{x \to a} (f(x) + q(x)) = \lim_{x \to a} f(x) + \lim_{x \to a} q(x).$$

Теорема 2. *Если существуют пределы функций $y = f(x)$ и $y = q(x)$ при x, стремящемся к числу a, то существует предел их произведения, равный произведению пределов этих функций.*

$$\lim_{x \to a} (f(x) \cdot q(x)) = \lim_{x \to a} f(x) \cdot \lim_{x \to a} q(x).$$

Теорема 3. *Если существуют пределы функций $y = f(x)$ и $y = q(x)$ при x, стремящемся к числу a и $\lim\limits_{x \to a} q(x) \neq 0$, то существует предел их отношения, равный отношению пределов этих функций.*

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{q(x)} = \frac{\lim\limits_{x \to a} f(x)}{\lim\limits_{x \to a} q(x)}.$$

Следствие 1. *Постоянный множитель можно вынести за знак предела:*

$$\lim_{x \to a} k \cdot f(x) = k \cdot \lim_{x \to a} f(x).$$

Следствие 2. *Если n — натуральное число, то выполняются равенства:*

$$\lim_{x \to a} x^n = a^n; \quad \lim_{x \to a} \sqrt[n]{x} = \sqrt[n]{a}.$$

Следствие 3. *Предел многочлена* $P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_1x^{n-1} + \ldots + a^{n-1}x^1 + a_n$ *(целой рациональной функции) при x, стремящемся к числу a, равен значению этого многочлена при x = a:*

$$\lim_{x \to a} P(x) = P(a).$$

Следствие 4. *Предел дробно-рациональной функции* $F(x) = \frac{a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \ldots + a_{n-1}x^1 + a_n}{b_0x^n + b_1x^{n-1} + b_2x^{n-2} + \ldots + b_{n-1}x^1 + b_n}$ *при x, стремящемся к числу a, равен значению этой функции при x = a, если число a принадлежит ее области определения:*

$$\lim_{x \to a} F(x) = F(a).$$

ПРИМЕР

4. Вычислим $\lim\limits_{x \to 2} \frac{5x^3 - 4x^2 + 18}{-7x^2 + 9}$.

Решение. $\lim\limits_{x \to 2} \frac{5x^3 - 4x^2 + 18}{-7x^2 + 9} = \frac{5 \cdot 2^3 - 4 \cdot 2^2 + 18}{-7 \cdot 2^2 + 9} = \frac{42}{-19} = -2\frac{4}{19}$.

Ответ: $-2\frac{4}{19}$.

Введем обозначения.

Если значения переменной x неограниченно увеличиваются, то пишут $x \to \infty$

Если значения переменной x неограниченно уменьшаются, то пишут $x \to -\infty$

Определение. *Функция $y = f(x)$ называется* ***бесконечно малой*** *при $x \to a$ $(x \to \infty)$, если* $\lim\limits_{x \to a\,(x \to \infty)} f(x) = 0$.

Докажите, что функции $y = \operatorname{tg} x$, $y = \sin x$, $y = x$, $y = x^n$, где $n > 0$ — являются бесконечно малыми при $x \to 0$. Функция $y = (x - 3)^2$ является бесконечно малой при $x \to 3$.

Определение. Функция $y = f(x)$ называется ***бесконечно большой*** при $x \to a$ $(x \to \infty)$, если $\lim\limits_{x \to a\,(x \to \infty)} f(x) = \infty$

При нахождении некоторых пределов функций могут получиться неопределенности вида: $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$, $0 \cdot \infty$, $\infty - \infty$. Конечно, это только символы, которые числового смысла не несут.

Определение. *Вычисление пределов функций, представляющих собой неопределенности при $x \to a$ или $x \to \infty$ называется* ***раскрытием неопределенностей.***

Для раскрытия неопределенностей можно использовать способы: деление числителя и знаменателя на степень x, разложение числителя и знаменателя на множители и т. п.

ПРИМЕР

5. Вычислим $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{\sqrt{n-2}-1}{n^2-9}$.

Решение. При $x \to \infty$ выражение, стоящее под знаком предела, представляет собой неопределенность вида $\dfrac{\infty}{\infty}$. Преобразуем это выражение, умножив числитель и знаменатель дроби на выражение, сопряженное числителю, и в знаменателе применив формулу разности квадратов. Получим: $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{\sqrt{n-2}-1}{n^2-9} = \lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{n-2-1}{(n^2-9)(\sqrt{n-2}+1)} = \lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{n-3}{(n^2-9)(\sqrt{n-2}+1)} = \lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{1}{(n+3)(\sqrt{n-2}+1)} =$

$= \dfrac{1}{\infty \cdot \infty} = 0.$

Ответ: 0.

ПРИМЕР

6. Найдем $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2-3x+2}{x^2-1}$.

Решение. При $x \to 1$ выражение, стоящее под знаком предела, представляет собой неопределенность вида $\dfrac{0}{0}$. Преобразуем это выражение, разложив числитель и знаменатель на множители.

Получим: $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2-3x+2}{x^2-1} = \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{(x-1)(x-2)}{(x-1)(x+1)} = \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{(x-2)}{(x+1)} = \dfrac{1-2}{1+1} = \dfrac{-1}{2} = -\dfrac{1}{2}.$

Ответ: $-\dfrac{1}{2}$.

ПРИМЕР

7. Найдем $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x^2+3}{3x^2+4x+1}$.

Решение. При $x \to \infty$ выражение, стоящее под знаком предела, представляет собой неопределенность вида $\frac{\infty}{\infty}$. Преобразуем это выражение, разделив числитель и знаменатель почленно на x^2. Получим: $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2+\frac{3}{x^2}}{3+\frac{4}{x}+\frac{1}{x^2}}=\frac{2}{3}$.

Ответ: $\frac{2}{3}$.

ПРИМЕР

8. Вычислим $\lim\limits_{x\to-3}\frac{x^2-9}{x+3}$.

Решение. При $x \to -3$ выражение, стоящее под знаком предела, представляет собой неопределенность вида $\frac{0}{0}$. Преобразуем это выра жение, разложив числитель на множители, используя формулу сокращенного умножения. Получим:

$$\lim_{x\to-3}\frac{x^2-9}{x+3}=\lim_{x\to-3}\frac{(x-3)(x+3)}{x+3}=\lim_{x\to-3}(x-3)=-3-3=-6.$$

Ответ: -6.

ПРИМЕР

9. Вычислим $\lim\limits_{x\to4}\dfrac{\sqrt{x-3}-1}{x^2-16}$.

Решение. При $x \to 4$ выражение, стоящее под знаком предела, представляет собой неопределенность вида $\frac{0}{0}$. Преобразуем это выражение, умножив числитель и знаменатель дроби на выражение, сопряженное числителю, и в числителе применив формулу разности квадратов.

Получим: $\lim\limits_{x\to4}\dfrac{\sqrt{x-3}-1}{x^2-16}=\lim\limits_{x\to4}\dfrac{x-3-1}{(x^2-16)(\sqrt{x-3}+1)}=$

$$=\lim_{x\to4}\frac{x-4}{(x^2-16)(\sqrt{x-3}+1)}=\lim_{x\to4}\frac{1}{(x+4)(\sqrt{x-3}+1)}=\frac{1}{(4+4)(\sqrt{4-3}+1)}=\frac{1}{8\cdot2}=\frac{1}{16}.$$

Ответ: $\frac{1}{16}$.

Домашнее задание:

Краткий конспект

Выписать свойства, теоремы, формулы

Решить задачи

36.1. Найдите предел последовательности:

1) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n-1}{n}$; 2) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n^2-n+3}{n^2}$;

36.2. Используя определение предела функции в точке, докажите, что:

1) $\lim\limits_{x\to 1}(3x-1)=2$; 2) $\lim\limits_{x\to 2}(3x-2)=4$;

36.3. Найдите предел функции:

1) $\lim\limits_{x\to -1}(x^2+1)$; 2) $\lim\limits_{x\to 2}(x^2-1)$;

36.7. Найдите предел функции $y=f(x)$ при $x\to x_0$:

1) $f(x)=x^2-3x$ при $x\to 1$;

2) $f(x)=2x^2+x-5$ при $x\to -2$;

36.9. Найдите предел:

1) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x-6}{x+2}$; 2) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{3x-5}{x-3}$;