

Предел функции в точке и на
бесконечности. Предел
числовой последовательности.

■ ■ ■

Наиболее удобный способ задания последовательности — это задать ее общий член a_n . Например, $a_n = 3n + 1$, $a_n = \sqrt{n^2 - 1}$, или $a_n = n^2 - 2$. Иногда последовательность задается рекуррентной формулой через предыдущие члены. Например, $a_n = 2a_{n-1} + a_{n-2}$, где $a_1 = 1$ и $a_2 = 2$, $n > 2$.

Числовая последовательность также может быть задана словесным описанием ее членов. Например, десятичные приближения числа $\sqrt{2}$ запишем так: 1; 1,4; 1,41; 1,414; 1,4142; 1,41 421,

Числовую последовательность можно рассматривать как числовую функцию, заданную на множестве натуральных чисел N . Например, $a_n = f(n) = \sqrt{n^2 + 1}$. Тогда $(a_n) : \sqrt{2}; \sqrt{5}; \sqrt{10}, \dots$.

Также как и функции, числовые последовательности бывают ограниченными сверху или снизу, монотонно возрастающими или убывающими.

■ ■ ■

Рассмотрим примеры числовых последовательностей.

ПРИМЕР

1. Пусть задана последовательность $2; \frac{3}{2}; \frac{4}{3}; \frac{5}{4}; \dots; \frac{n+1}{n}$. Ее общий член $a_n = \frac{n+1}{n} = 1 + \frac{1}{n}$. Из этой формулы видно, что при $n \rightarrow \infty$ значение разности $|a_n - 1|$ стремится к нулю.

ПРИМЕР

2. 1) Выпишем несколько членов последовательности (a_n) , где $a_n = \frac{\sin n}{n}; \frac{\sin 1}{1}; \frac{\sin 2}{2}; \frac{\sin 3}{3}; \frac{\sin 4}{4}; \dots$. Так как функция $\sin x$ ограниченная, а знаменатель дроби стремится к бесконечности, то последовательность стремится к 0.

2) Рассмотрим последовательность $1; 1,4; 1,41; 1,414; 1,4142; 1,41421; \dots$, это приближения с недостатком числа $\sqrt{2}$. Члены этой последовательности при возрастании n приближаются к числу $\sqrt{2}$.

Определение. *Пределом последовательности (x_n) при n , стремящемся к бесконечности, называется такое число A , если для любого числа $\varepsilon > 0$ можно указать такое N_0 , что для любого n , удовлетворяющему неравенству $n > N_0$, выполняется неравенство $|x_n - A| < \varepsilon$.*

Записывают: $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = A$.

ПРИМЕР

$$\text{з. } \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right) = 1, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin n}{n} = 0.$$

Очевидно, что если числовая последовательность имеет предел, то этот предел единственный.

Пусть значения функции $y = f(x)$ при x , стремящемся к числу a , неограниченно приближаются к числу 5 , принимая при этом значения: $4,9; 4,99; 4,999; \dots$ или $5,1; 5,01; 5,001; \dots$.

В этих случаях модуль значения разности между каждым из этих чисел и числом 5 стремится к нулю.

Действительно, $|4,9 - 5| = 0,1; |4,99 - 5| = 0,01; |4,999 - 5| = 0,001; \dots$ или $|5,1 - 5| = 0,1; |5,01 - 5| = 0,01; |5,001 - 5| = 0,001; \dots$.

$0,1; 0,01; 0,001; \dots \rightarrow 0$.

Число 5 в приведенном примере называют *пределом функции $y = f(x)$ при x , стремящемся к числу a .*

■ ■ ■

Определение 1. *Пределом функции $y = f(x)$ при x , стремящемся к числу a , называется такое число A , если для любого числа $\varepsilon > 0$ можно указать такое $\delta > 0$, что для любого $x \neq a$, удовлетворяющему неравенству $0 < |x - a| < \delta$, выполняется неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$.*

Записывают: $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$.

Определение 2. *Если число A_1 есть предел функции $y = f(x)$ при x , стремящемся к числу a так, что x принимает только значения меньше числа a , то число A_1 называется левым пределом функции $y = f(x)$ в точке a .*

Записывают: $\lim_{x \rightarrow a-0} f(x) = A_1$.

Определение 3. *Если число A_2 есть предел функции $y = f(x)$ при x , стремящемся к числу a так, что x принимает только значения больше числа a , то число A_2 называется правым пределом функции $y = f(x)$ в точке a .*

Записывают: $\lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = A_2$.

■ ■ ■

Теорема 1. Если существуют пределы функций $y = f(x)$ и $y = q(x)$ при x , стремящемся к числу a , то существует предел их суммы, равный сумме пределов этих функций.

$$\lim_{x \rightarrow a} (f(x) + q(x)) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) + \lim_{x \rightarrow a} q(x).$$

Теорема 2. Если существуют пределы функций $y = f(x)$ и $y = q(x)$ при x , стремящемся к числу a , то существует предел их произведения, равный произведению пределов этих функций.

$$\lim_{x \rightarrow a} (f(x) \cdot q(x)) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow a} q(x).$$

Теорема 3. Если существуют пределы функций $y = f(x)$ и $y = q(x)$ при x , стремящемся к числу a и $\lim_{x \rightarrow a} q(x) \neq 0$, то существует предел их отношения, равный отношению пределов этих функций.

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{q(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}{\lim_{x \rightarrow a} q(x)}.$$

Следствие 1. *Постоянный множитель можно вынести за знак предела:*

$$\lim_{x \rightarrow a} k \cdot f(x) = k \cdot \lim_{x \rightarrow a} f(x).$$

Следствие 2. *Если n — натуральное число, то выполняются равенства:*

$$\lim_{x \rightarrow a} x^n = a^n; \quad \lim_{x \rightarrow a} \sqrt[n]{x} = \sqrt[n]{a}.$$

Следствие 3. *Предел многочлена $P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_1x^{n-1} + \dots + a^{n-1}x^1 + a_n$ (целой рациональной функции) при x , стремящемся к числу a , равен значению этого многочлена при $x = a$:*

$$\lim_{x \rightarrow a} P(x) = P(a).$$

Следствие 4. *Предел дробно-рациональной функции $F(x) = \frac{a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \dots + a_{n-1}x^1 + a_n}{b_0x^n + b_1x^{n-1} + b_2x^{n-2} + \dots + b_{n-1}x^1 + b_n}$ при x , стремящемся к числу a , равен значению этой функции при $x = a$, если число a принадлежит ее области определения:*

$$\lim_{x \rightarrow a} F(x) = F(a).$$

ПРИМЕР

4. Вычислим $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{5x^3 - 4x^2 + 18}{-7x^2 + 9}$.

Решение. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{5x^3 - 4x^2 + 18}{-7x^2 + 9} = \frac{5 \cdot 2^3 - 4 \cdot 2^2 + 18}{-7 \cdot 2^2 + 9} = \frac{42}{-19} = -2\frac{4}{19}$.

Ответ: $-2\frac{4}{19}$.

Введем обозначения.

Если значения переменной x неограниченно увеличиваются, то пишут $x \rightarrow \infty$

Если значения переменной x неограниченно уменьшаются, то пишут $x \rightarrow -\infty$

Определение. Функция $y = f(x)$ называется *бесконечно малой* при $x \rightarrow a$ ($x \rightarrow \infty$), если $\lim_{x \rightarrow a(x \rightarrow \infty)} f(x) = 0$.



Докажите, что функции $y = \operatorname{tg}x$, $y = \sin x$, $y = x$, $y = x^n$, где $n > 0$ — являются бесконечно малыми при $x \rightarrow 0$. Функция $y = (x - 3)^2$ является бесконечно малой при $x \rightarrow 3$.

Определение. Функция $y = f(x)$ называется *бесконечно большой* при $x \rightarrow a$ ($x \rightarrow \infty$), если $\lim_{x \rightarrow a(x \rightarrow \infty)} f(x) = \infty$

При нахождении некоторых пределов функций могут получиться неопределенности вида: $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$, $0 \cdot \infty$, $\infty - \infty$. Конечно, это только символы, которые числового смысла не несут.

Определение. Вычисление пределов функций, представляющих собой неопределенности при $x \rightarrow a$ или $x \rightarrow \infty$ называется *раскрытием неопределенностей*.

Для раскрытия неопределенностей можно использовать способы: деление числителя и знаменателя на степень x , разложение числителя и знаменателя на множители и т. п.

ПРИМЕР

5. Вычислим $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n-2} - 1}{n^2 - 9}$.

Решение. При $x \rightarrow \infty$ выражение, стоящее под знаком предела, представляет собой неопределенность вида $\frac{\infty}{\infty}$. Преобразуем это выражение, умножив числитель и знаменатель дроби на выражение, сопряженное числителю, и в знаменателе применив формулу разности квадратов. Получим:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n-2} - 1}{n^2 - 9} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n - 2 - 1}{(n^2 - 9)(\sqrt{n-2} + 1)} =$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n - 3}{(n^2 - 9)(\sqrt{n-2} + 1)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{(n + 3)(\sqrt{n-2} + 1)} =$$

$$= \frac{1}{\infty \cdot \infty} = 0.$$

Ответ: 0.

ПРИМЕР

6. Найдем $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 1}$.

Решение. При $x \rightarrow 1$ выражение, стоящее под знаком предела, представляет собой неопределенность вида $\frac{0}{0}$. Преобразуем это выражение, разложив числитель и знаменатель на множители.

Получим: $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x-2)}{(x-1)(x+1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-2)}{(x+1)} = \frac{1-2}{1+1} = \frac{-1}{2} = -\frac{1}{2}$.

Ответ: $-\frac{1}{2}$.

ПРИМЕР

7. Найдем $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 + 3}{3x^2 + 4x + 1}$.

Решение. При $x \rightarrow \infty$ выражение, стоящее под знаком предела, представляет собой неопределенность вида $\frac{\infty}{\infty}$. Преобразуем это выражение, разделив числитель

и знаменатель почленно на x^2 . Получим:
$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2 + \frac{3}{x^2}}{3 + \frac{4}{x} + \frac{1}{x^2}} = \frac{2}{3}.$$

Ответ: $\frac{2}{3}$.

ПРИМЕР

8. Вычислим $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^2 - 9}{x + 3}$.

Решение. При $x \rightarrow -3$ выражение, стоящее под знаком предела, представляет собой неопределенность вида $\frac{0}{0}$. Преобразуем это выражение, разложив числитель на множители, используя формулу сокращенного умножения. Получим:

$$\lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^2 - 9}{x + 3} = \lim_{x \rightarrow -3} \frac{(x - 3)(x + 3)}{x + 3} = \lim_{x \rightarrow -3} (x - 3) = -3 - 3 = -6.$$

Ответ: -6 .

ПРИМЕР

9. Вычислим $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{x-3} - 1}{x^2 - 16}$.

Решение. При $x \rightarrow 4$ выражение, стоящее под знаком предела, представляет собой неопределенность вида $\frac{0}{0}$. Преобразуем это выражение, умножив числитель и знаменатель дроби на выражение, сопряженное числителю, и в числителе применив формулу разности квадратов.

$$\begin{aligned} \text{Получим: } \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{x-3} - 1}{x^2 - 16} &= \lim_{x \rightarrow 4} \frac{x-3-1}{(x^2-16)(\sqrt{x-3}+1)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 4} \frac{x-4}{(x^2-16)(\sqrt{x-3}+1)} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{1}{(x+4)(\sqrt{x-3}+1)} = \frac{1}{(4+4)(\sqrt{4-3}+1)} = \frac{1}{8 \cdot 2} = \frac{1}{16}. \end{aligned}$$

Ответ: $\frac{1}{16}$.

Домашнее задание:

Краткий конспект

Выписать свойства, теоремы, формулы

Решить задачи

36.1. Найдите предел последовательности:

$$1) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n - 1}{n}; \quad 2) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2 - n + 3}{n^2};$$

36.2. Используя определение предела функции в точке, докажите, что:

$$1) \lim_{x \rightarrow 1} (3x - 1) = 2; \quad 2) \lim_{x \rightarrow 2} (3x - 2) = 4;$$

36.3. Найдите предел функции:

$$1) \lim_{x \rightarrow -1} (x^2 + 1); \quad 2) \lim_{x \rightarrow 2} (x^2 - 1);$$

36.7. Найдите предел функции $y = f(x)$ при $x \rightarrow x_0$:

$$1) f(x) = x^2 - 3x \text{ при } x \rightarrow 1;$$
$$2) f(x) = 2x^2 + x - 5 \text{ при } x \rightarrow -2;$$

36.9. Найдите предел:

$$1) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x - 6}{x + 2}; \quad 2) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x - 5}{x - 3};$$