

# Элементы нелинейного функционального анализа

## Глава 1. Дифференциальное исчисление в нормированных пространствах

## § 11. Теорема об обратном отображении.

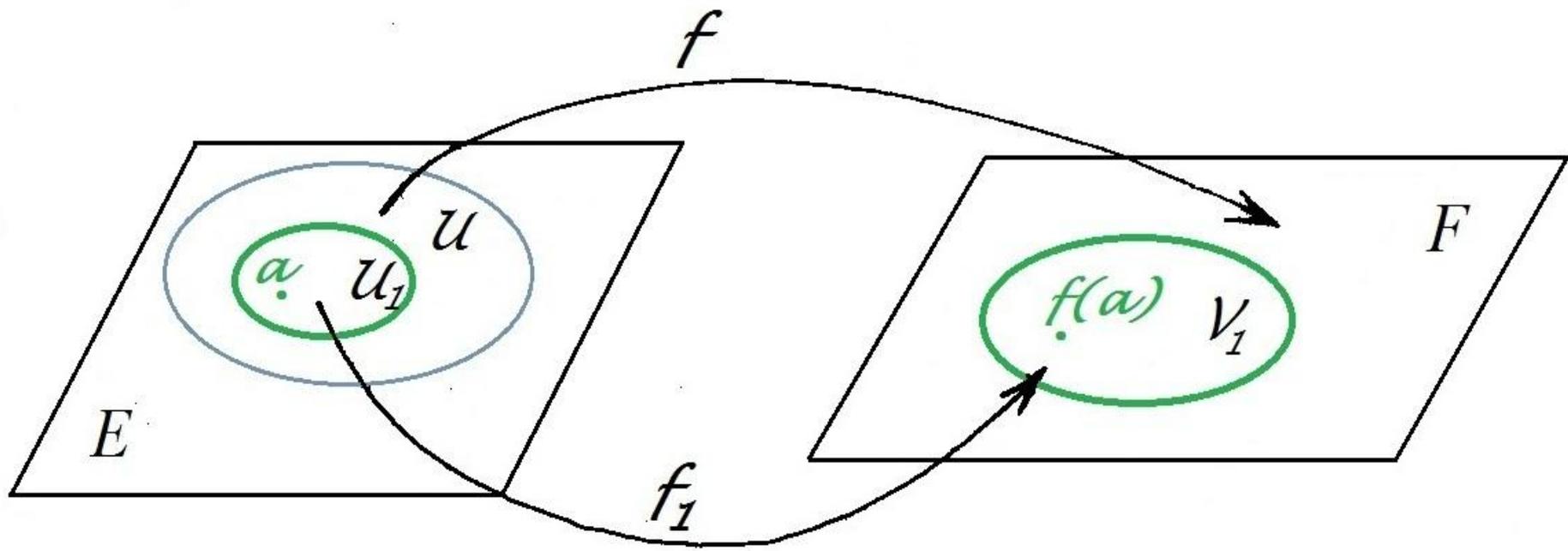
Опр. ЛОО  $A: E \rightarrow F$  называется изоморфизмом, если  $A$  отображает  $E$  на  $F$  взаимно-однозначно и обратный оператор  $A^{-1}$  также ограничен.

Теорема. Пусть  $E$  и  $F$  — банаховы  
нр-ва,  $U$  — открытое множ-во в  $E$ ,  
отображение  $f: U \rightarrow F$  — гладкое  
класса  $C^z$  ( $z \geq 1$ ) и в некоторой  
точке  $x_0 \in U$  лво  $f'(x_0)$  явл-ся изомор-  
физмом  $E$  на  $F$ . Тогда  $\exists$  открытое  
множ-во  $U_1 \ni x_0$  ( $U_1 \subset U$ ) и открытое  
множ-во  $V_1 \subset F$ , такие, что отображ-е

$$f_1 = f|_{U_1}: U_1 \rightarrow V_1 \text{ является}$$

$C^z$ -диффеоморфизмом.

При этом  $(f^{-1})'(y_0) = [f'(x_0)]^{-1}$  обрат.  
оператор ( $y_0 = f(x_0)$ ).



## Задачи

N10.1. Пусть  $U$  — открытое мн-во в ЛНП  $E$ ,  $V$  — открытое мн-во в ЛНП  $F$ ,  
 $f: U \rightarrow V$  —  $C^r$ -диффеоморфизм ( $r \geq 1$ ).  
Доказать, что  $(f^{-1})'(y) = [f'(x)]^{-1}$   
где  $\forall y \in V, x = f^{-1}(y)$ .

## Решение.

$$\text{Имеем: } (f \circ f^{-1})(y) = y \quad \forall y \in V.$$

Дифф-ем это равенство.

По теореме о производной композиции отображений:

$$\underline{f'(x) \cdot (f^{-1})'(y) = I_F} \quad (1).$$

$$\text{Имеем: } (f^{-1} \circ f)(x) = x \quad \forall x \in U.$$

$$\text{След-но, } \underline{(f^{-1})'(y) \cdot f'(x) = I_E} \quad (2).$$

$$(1), (2) \Rightarrow \underline{(f^{-1})'(y) = [f'(x)]^{-1}}.$$

N 10.2. Зная производную функции  $f(x)$ , найти производную обратной функции  $f^{-1}(y)$ .

- 1)  $y = \operatorname{tg} x$ ; 2)  $y = \sin x$ ; 3)  $y = e^x$ ;  
4)  $y = \operatorname{ch} x$ ; 5)  $y = \operatorname{sh} x$ .

$$1) y = \operatorname{tg} x = f(x); \quad f^{-1}(y) = \operatorname{arctg} y = x; \\ y \in \mathbb{R}^1.$$

$$f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x}; \quad \underline{(f^{-1})'(y) = [f'(x)]^{-1}}.$$

$$(\operatorname{arctg} y)' = \frac{1}{(\operatorname{tg} x)'}, = \cos^2 x = \cos^2(\operatorname{arctg} y);$$

$$\operatorname{tg}^2 x = \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1 - \cos^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} - 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \cos^2 x = \frac{1}{\operatorname{tg}^2 x + 1} = \frac{1}{y^2 + 1};$$

$$(f^{-1})'(y) = (\operatorname{arctg} y)' = \frac{1}{y^2 + 1}.$$

N 10.3. Для отображения  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$   
найти матрицу оператора  $(f^{-1})'(y^0)$ :

$$1) f(x) = f(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} x_1^2 \\ x_1 x_2 \end{pmatrix}, \quad y^0 = (1, 1);$$

$$2) f(x) = \begin{pmatrix} x_1^2 + x_2^2 \\ x_1^3 \end{pmatrix}, \quad y^0 = (2, 1).$$

Решение. 1)  $\frac{\partial f}{\partial x}(x) = \begin{pmatrix} 2x_1 & 0 \\ x_2 & x_1 \end{pmatrix}$  — м-ца  
кр-й  $f'(x)$ .

$\begin{cases} x_1^2 = 1, \\ x_1 x_2 = 1 \end{cases} \Rightarrow x^1 = (1, 1), x^2 = (-1, -1)$ . — два  
критических т.  $y^0 = (1, 1)$ .

$A_1 = \frac{\partial f}{\partial x}(1, 1) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$  — невырождена,

$A_2 = \frac{\partial f}{\partial x}(-1, -1) = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$  — невырожд.

$$A_1 = \frac{\partial f}{\partial x}(1, 1) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} - \text{невырождена,}$$

$$A_2 = \frac{\partial f}{\partial x}(-1, -1) = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} - \text{невырожд.}$$

След-но, операторы  $f'(x^1)$  и  $f'(x^2)$  —  
изоморфизмы  $\mathbb{R}^2$  на  $\mathbb{R}^2 \Rightarrow$  по теореме  
о локальном диффеом-ме (об обратном  
отображении)  $f$  — локальный дифф-м

(кл.  $C^\infty$ ) в окрестности т.  $x^1$  и  $x^2$ ;

т.е.  $\exists$  окрестность  $O_1$  точки  $x^1$  и окрестность  $V_1$  т.  $y^0$ , такие, что существуют

$f_1 = f|_{O_1} : O_1 \rightarrow V_1$  —  $C^\infty$ -диффеоморфизм,

такие  $\exists$  окрестность  $O_2$  т.  $x^2$  и окрестность

$V_2$  т.  $y^0$ , такие, что  $f_2 = f|_{O_2} : O_2 \rightarrow V_2$  —

$C^\infty$ -диффеоморфизм.

Тогда 
$$\frac{\partial f_1^{-1}}{\partial y}(y^0) = \left[ \frac{\partial f}{\partial x}(x_1) \right]^{-1} = A_1^{-1}.$$

$$\text{Тогда } \frac{\partial f_1^{-1}}{\partial y}(y^0) = \left[ \frac{\partial f}{\partial x}(x_1) \right]^{-1} = A_1^{-1}.$$

Найдем  $A_1^{-1}$ :

$$\left( \begin{array}{cc|cc} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right) \sim \left( \begin{array}{cc|cc} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 1 \end{array} \right) \sim \left( \begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 1 \end{array} \right).$$

$$A_1^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} = \frac{\partial f_1^{-1}}{\partial y}(y^0)$$

---

$$A_2^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & -1 \end{pmatrix} = \frac{\partial f_2^{-1}}{\partial y}(y^0)$$

---

N10.3    2)  $\frac{\partial f}{\partial x}(x) = \begin{pmatrix} 2x_1 & 2x_2 \\ 3x_1^2 & 0 \end{pmatrix}$  — м-ца  
кр-ї  $f'(x)$ .

$$\begin{cases} x_1^2 + x_2^2 = 2, \\ x_1^3 = 1. \end{cases} \Rightarrow x^1 = (1, 1) \text{ и } x^2 = (1, -1)$$

— гва координата т.  $y^0 = (2, 1)$ .

$$A_1 = \frac{\partial f}{\partial x}(1, 1) = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}; \quad A_2 = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$A_1^{-1} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} = \frac{\partial f_1^{-1}}{\partial y}(y^0);$$

$$A_2^{-1} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} = \frac{\partial f_2^{-1}}{\partial y}(y^0).$$

# Подготовка к КР

N1. Найдите матрицу производной Фреше отображения  $g \circ f$ , если  $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,  $g: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^1$ ,

$$f(x_1, x_2, x_3) = \begin{pmatrix} x_1 - x_3 \\ x_1 + x_2 + x_3 \\ \sin x_3 \end{pmatrix}, \quad g(y_1, y_2, y_3) = y_1 y_2 + y_3^2.$$

N2. Найдите кр-ю Фреше отображения  $f: E \rightarrow E$ , где  $E = \text{Mat}_2(n \times n, \mathbb{R})$  — кр-во матриц  $n \times n$ ,  $f(X) = X^3$ .

Ответ обосновать.

N3. Найдите кр-ю Фреше отображения  $f: C[0, 1] \rightarrow C[0, 1]$ ,  $f(x)(t) = x^2(t)$ . Ответ обосновать.

N4. Найдите кр-ю Фреше функционала  $f: C[0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^1$ :

а)  $f(x) = \int_0^1 x^2(t) dt$ ; б)  $f(x) = x^3(1)$ . Ответ обосновать.

N 5. Найдите матрицу производной Фреше отображения

$f^{-1}(y)$  при  $y = (1, 1)$ , если  $f(x) = \begin{pmatrix} x_1^2 \\ x_1 x_2 \end{pmatrix}$ ,

$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ . Ответ обосновать.

# **Глава 2.**

## **Гладкие многообразия**

## § 1. Топологическое пространство и непрерывное отображение

**1. Определение топологического пространства.** Пусть  $X$  — множество произвольной природы и  $\tau = \{U\}$  — совокупность его подмножеств, обладающая следующими свойствами:

- 1)  $\emptyset, X \in \tau$ ;
- 2) объединение любой совокупности множеств из  $\tau$  принадлежит  $\tau$ ;
- 3) пересечение любого конечного числа множеств из  $\tau$  принадлежит  $\tau$ .

Такая совокупность подмножеств  $\tau$  называется *топологией* на  $X$ . Множество  $X$  с заданной на нем топологией  $\tau$  называется *топологическим пространством* и обозначается  $(X, \tau)$ , подмножества из совокупности  $\tau$  называются *открытыми* (в пространстве  $(X, \tau)$ ).

**Пример 1.**  $X$  — числовая прямая  $\mathbb{R}^1$ . Топологию на  $\mathbb{R}^1$  можно задать следующим набором подмножеств: пустое множество  $\emptyset$ , всевозможные интервалы и их объединения  $U = \bigcup_{\alpha} (a_{\alpha}, b_{\alpha})$  (проверьте!).

**Пример 2.**  $X = \mathbb{R}^2$ . Открытым множеством назовем всякое множество в  $X = \mathbb{R}^2$ , которое вместе с каждой своей точкой содержит достаточно малый открытый круг с центром в этой точке, а также пустое множество. Легко проверить, что система всех открытых множеств в  $X = \mathbb{R}^2$  образует топологию.

**Пример 3.**  $X$  — произвольное множество. Совокупность  $\tau_0 = \{\emptyset, X\}$  задает топологию на  $X$  (проверьте!).

**Пример 4.**  $X$  — произвольное множество,  $\tau_1 = \{\text{всевозможные подмножества из } X\}$ . Совокупность  $\tau$  — топология на  $X$  (проверьте!).

Топология  $\tau_1$  называется *максимальной* или *дискретной*, а топология  $\tau_0$  — *минимальной* или *тривиальной*. Таким образом, на одном и том же множестве можно ввести различные топологии, например тривиальную и дискретную.

С понятием открытого множества в топологическом пространстве  $(X, \tau)$  тесно связано двойственное понятие *замкнутого множества*: так называют множество, дополнение которого открыто. Таким образом, если  $U \in \tau$ , то  $X \setminus U$  замкнуто, и обратно: если  $F$  замкнуто, то  $X \setminus F$  открыто.

*Упражнение 1°.* Проверьте, что следующие множества замкнуты: отрезок  $[a, b]$  в  $\mathbb{R}^1$  с топологией примера 1; замкнутый круг в  $\mathbb{R}^2$  с топологией примера 2.

**2. Непрерывное отображение. Гомеоморфизм.** Обсудим теперь определение непрерывного отображения топологических пространств.

Пусть  $(X, \tau)$ ,  $(Y, \sigma)$  — два топологических пространства с топологиями  $\tau$ ,  $\sigma$  соответственно. Пусть  $f: X \rightarrow Y$  — отображение множеств.

**Определение.** Говорят, что  $f$  — *непрерывное отображение* топологических пространств, если полный прообраз  $f^{-1}(V)$  любого открытого множества  $V$  пространства  $(Y, \sigma)$  является открытым множеством пространства  $(X, \tau)$ .

Если  $f: X \rightarrow Y$ ,  $g: Y \rightarrow Z$  — отображения топологических пространств, то естественно определяется суперпозиция  $gf: X \rightarrow Z$  по правилу  $(gf): x \mapsto g(f(x))$ .

**Теорема.** Если  $f, g$  непрерывны, то и  $gf$  непрерывно.  
Доказательство легко следует из замечания

$$(gf)^{-1}(W) = f^{-1}(g^{-1}(W)),$$

где  $W \subset Z$  — произвольное множество.

**Определение.** Два топологических пространства,  $(X, \tau)$ ,  $(Y, \sigma)$ , называются *гомеоморфными*, если существует отображение  $f: X \rightarrow Y$ , удовлетворяющее условиям: 1)  $f: X \rightarrow Y$  — биективное отображение; 2)  $f$  непрерывно; 3)  $f^{-1}$  непрерывно.

Отображение  $f$  в этом случае называется *гомеоморфизмом*.

**Подпространство топологического пространства.** Как видно из предыдущего, подмножества метрических и топологических пространств часто рассматриваются как самостоятельные объекты. При этом подмножество  $Y$  метрического пространства  $X$  естественно наследует метрику из  $X$ . Определим теперь понятие наследственной топологии на подмножестве  $Y$ , когда  $X$  — топологическое пространство.

Пусть  $(X, \tau)$  — топологическое пространство,  $Y \subset X$  — подмножество в  $X$ . Рассмотрим систему подмножеств множества  $Y$

$$\tau_Y = \{V: V = U \cap Y, U \in \tau\}.$$

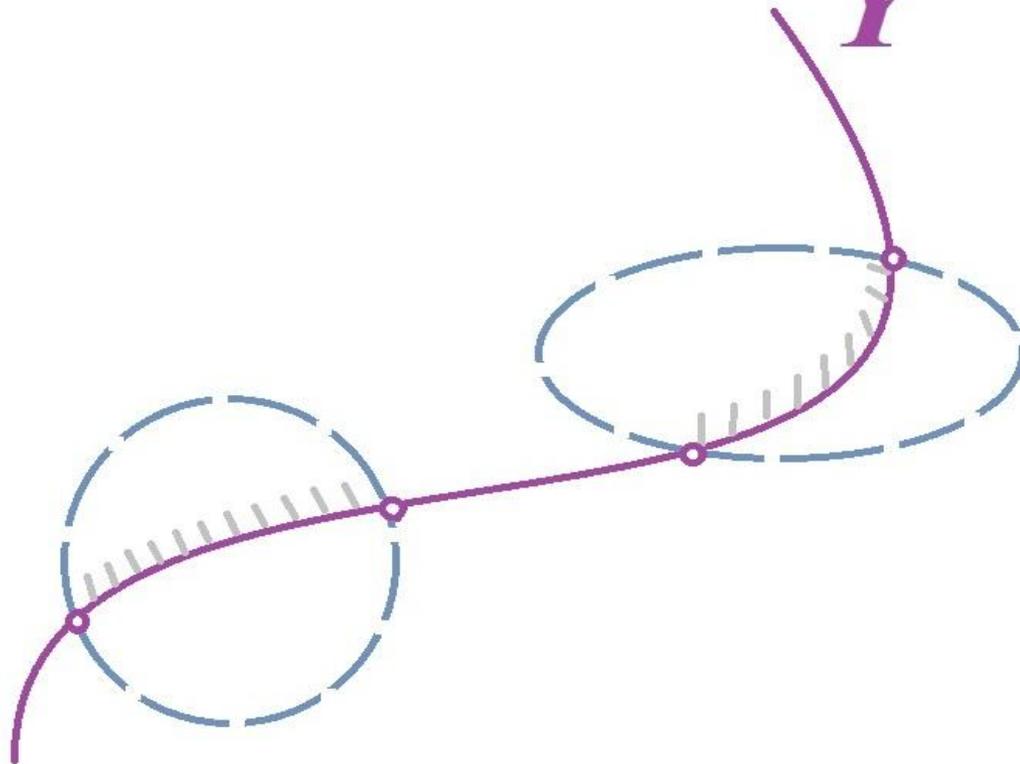
**Теорема.** Система  $\tau_Y$  является топологией на  $Y$ .

Доказательство предлагается провести читателю (оно очевидно).

Топология  $\tau_Y$  называется *индуцированной* или *наследственной топологией* из  $X$ . Пространство  $(Y, \tau_Y)$  называется *подпространством* пространства  $(X, \tau)$ .

$X$

$Y$

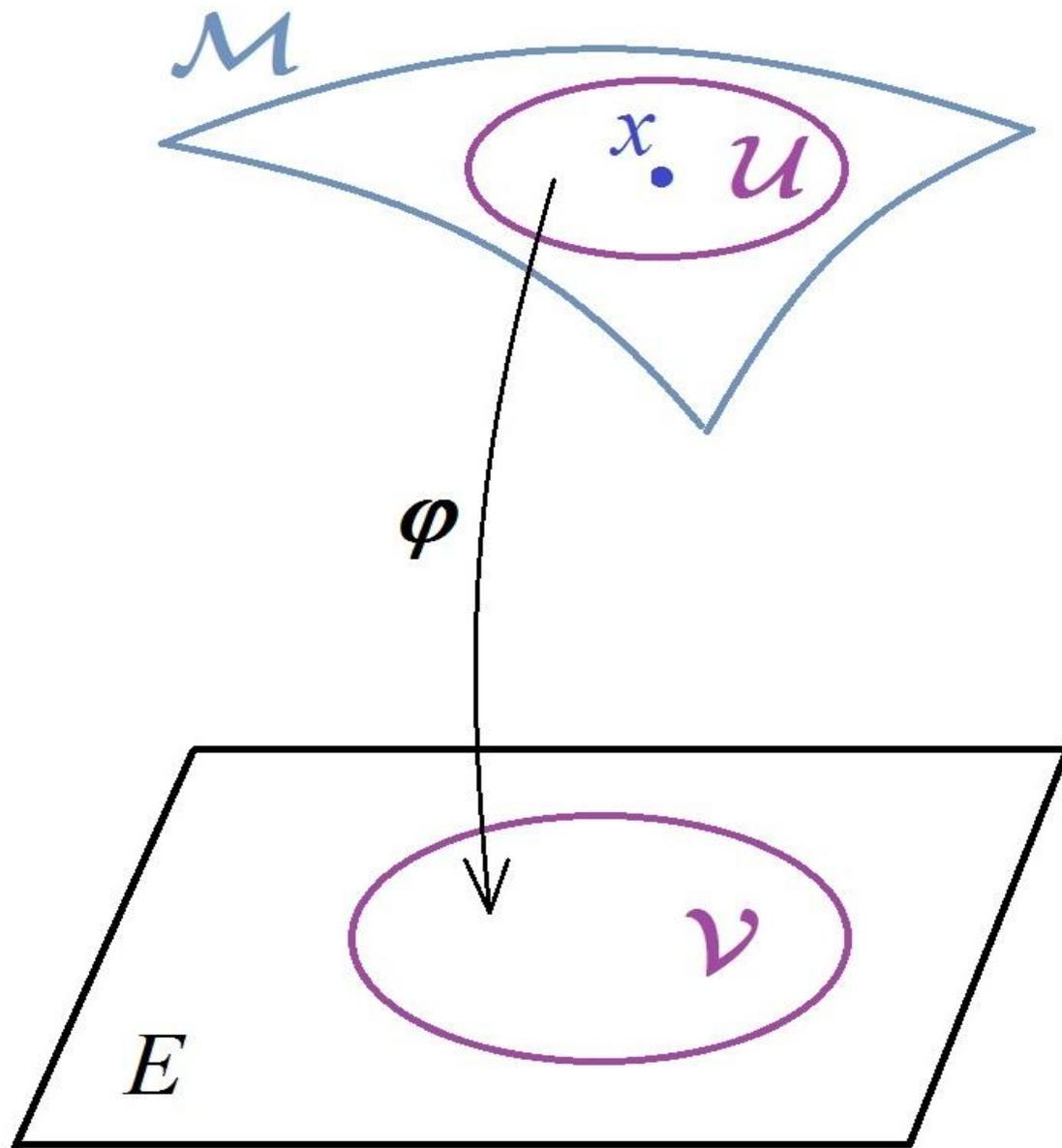


## **§ 2. Определение гладкого многообразия**

# 1. Топологические многообразия

Пусть  $M$  – топологическое пространство (ТП),  $E$  – банахово пространство (БП).

И пусть для каждой точки  $x \in M$  существуют окрестность  $U$  (то есть открытое в ТП  $M$  множество, содержащее точку  $x$ ), открытое в  $E$  множество  $V \subset E$  и гомеоморфизм  $\varphi: U \rightarrow V$  (другими словами, для каждой точки  $x \in M$  существует окрестность  $U$ , гомеоморфная некоторому открытому множеству  $V \subset E$ ).



Тогда ТП  $M$  называется *топологическим многообразием (ТМ)*, а БП  $E$  – *модельным пространством* многообразия  $M$ .

Пара  $(U, \varphi)$  называется *картой* точки  $x$ .

Набор карт (конечный или счетный)  $\{(U_i, \varphi_i)\}$  называется *атласом* многообразия  $M$ , если  $\bigcup_i U_i = M$  (то есть если совокупность множеств  $\{U_i\}$  является *открытым покрытием* многообразия  $M$ ).

Таким образом, если на  $M$  задан атлас  $\{(U_i, \varphi_i)\}$ , то для каждой точки  $x \in M$  найдется окрестность  $U_i$ , гомеоморфная открытому множеству  $V_i = \varphi_i(U_i) \subset E$ .

Если БП  $E$  конечномерно и  $\dim E = n$ , то ТМ  $M$  называется  $n$ -мерным и обозначается  $M^n$ .

Если БП  $E$  бесконечномерно, то ТМ  $M$  называется *бесконечномерным* или *банаховым*.

Рассмотрим **частный случай** :  $E = \mathbb{R}^n$  (то есть  $\dim M = n$ ). Пусть точке  $x \in M^n$  соответствует карта  $(U_i, \varphi_i)$ . Тогда  $\varphi_i(x) \in \mathbb{R}^n$  и  $\varphi_i(x) = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$ . Координаты  $(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$  называются **локальными координатами** точки  $x$  в карте  $(U_i, \varphi_i)$ .

## 2. Гладкие многообразия

Пусть  $\{(U_i, \varphi_i)\}$  – атлас многообразия  $M$ .

Карты  $(U_i, \varphi_i)$  и  $(U_j, \varphi_j)$  называются

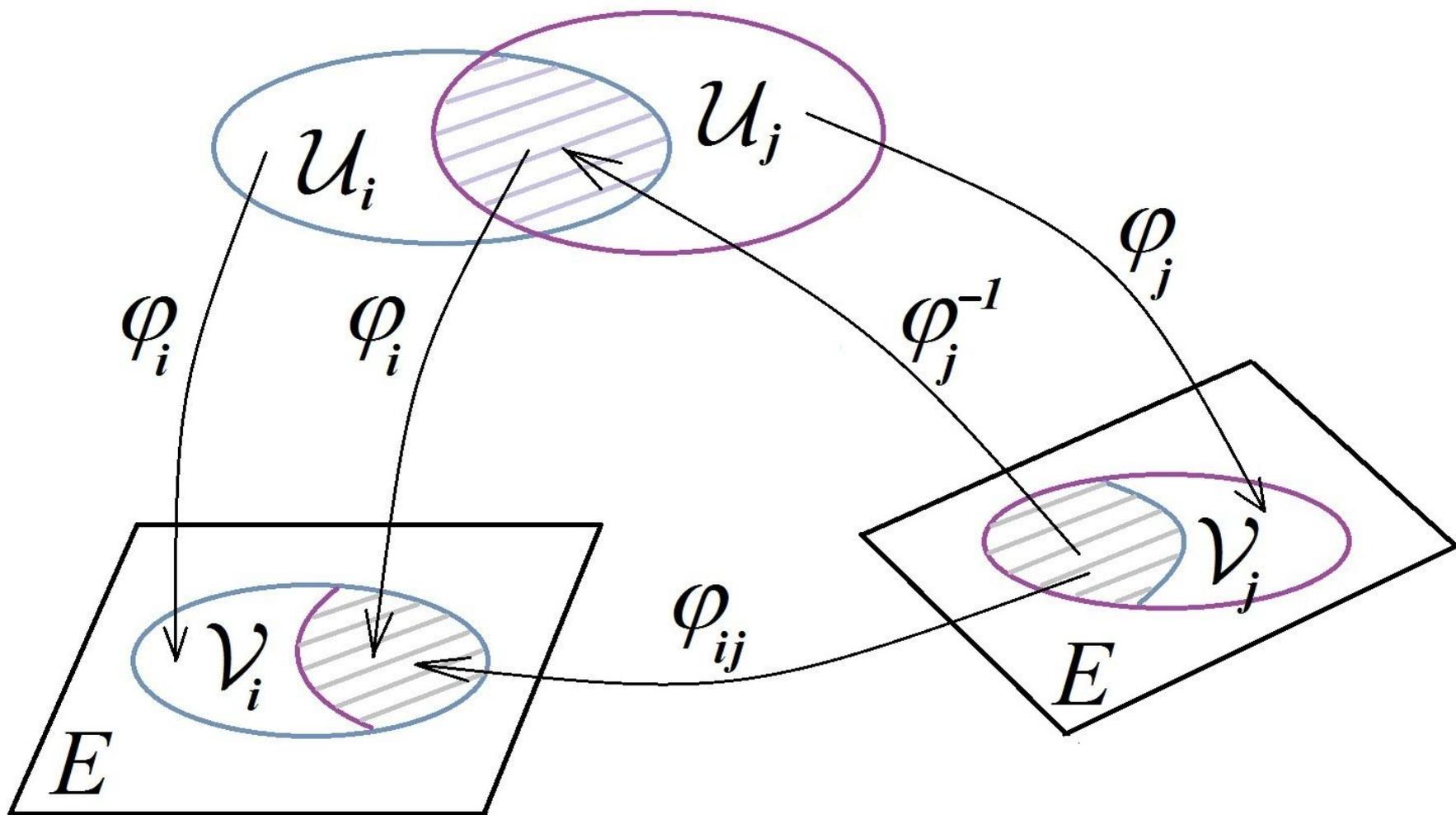
$C^r$  – *согласованными* ( $r \geq 1$ ), если выполняется одно из следующих двух условий:

1)  $U_i \cap U_j = \emptyset$ ;

2)  $U_i \cap U_j \neq \emptyset$  и отображение

$$\varphi_{ij} = \varphi_i \circ \varphi_j^{-1}: \varphi_j(U_i \cap U_j) \rightarrow \varphi_i(U_i \cap U_j)$$

является  $C^r$  – диффеоморфизмом.



Отображение  $\varphi_{ij} = \varphi_i \circ \varphi_j^{-1}: \varphi_j(U_i \cap U_j) \rightarrow \varphi_i(U_i \cap U_j)$  называется *функцией перехода* (или *отображением перехода*) от карты  $(U_j, \varphi_j)$  к карте  $(U_i, \varphi_i)$ .

Атлас, каждые две карты которого являются  $C^r$ -согласованными ( $r \geq 1$ ), называется  $C^r$ -*атласом*.

Топологическое многообразие, атлас которого является  $C^r$ -атласом, называется  $C^r$ -*многообразием* или *гладким многообразием класса  $C^r$* .

# *Литература*

Борисович Ю.Г. и др.  
«Введение в топологию»