Пример. Найти общее решение уравнения $y' = 2x(x^2 + y)$.

Преобразуем уравнение к виду:

$$y' - 2xy = 2x^3.$$

Решим сначала однородное уравнение

$$y' - 2xy = 0.$$

Последовательно преобразуя, получим

$$\frac{dy}{dx} = 2xy,\quad \frac{dy}{y} = 2xdx,\quad \int\frac{dy}{y} = \int 2xdx + C_1,\quad \ln|y| = x^2 + C_1,$$

$$y = Ce^{x^2},\quad e^{C_1} = C.$$

Пусть решение имеет вид

$$y = C(x)e^{x^2}.$$

Тогда получим

$$\frac{dy}{dx} = C'(x)e^{x^2} + C(x)e^{x^2}2x.$$

Подставив выражения для y и y' в исходное уравнение и последовательно преобразуя, получим

$$C'(x)e^{x^2} + C(x)e^{x^2}2x - 2xC(x)e^{x^2} = 2x^3,$$

$$C'(x)e^{x^2} = 2x^3$$

$$C'(x) = 2x^3e^{-x^2},$$

$$\frac{dC}{dx} = 2x^3e^{-x^2},$$

$$dC(x) = 2x^3e^{-x^2}dx.$$

Сделаем замену переменной

$$x^2 = u\text{, откуда } 2xdx = du.$$

Тогда, интегрируя уравнение $dC(x) = 2x^3e^{-x^2}dx$, получим

$$C(x) = \int ue^{-u}du + C_2 = -ue^{-u} + \int e^{-u}du + C_2 = -ue^{-u} - e^{-u} + C_2 =$$

$$= -x^2e^{-x^2} - e^{-x^2} + C_2.$$

Следовательно, общее решение исходного уравнения имеет вид

$$y = (-x^2e^{-x^2} - e^{-x^2} + C_2)e^{x^2} = C_2e^{x^2} - x^2 - 1.$$

К линейному ДУ сводится *уравнение Бернулли*:

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = q(x)y^n, \quad n \geq 2. \tag{3.11}$$

Действительно, разделив уравнение на y^n, получим:

$$y^{-n}\frac{dy}{dx} + p(x)y^{1-n} = q(x).$$

Введем новую функцию $z = y^{1-n}$. Тогда получим

$$\frac{dz}{dx} = (1-n)y^{-n}\frac{dy}{dx} \text{ или } \frac{dy}{dx} = \frac{1}{(1-n)y^{-n}}\frac{dz}{dx}.$$

Используя эти соотношения, получим линейное дифференциальное уравнению относительно функции z:

$$\frac{1}{1-n}\frac{dz}{dx} + p(x)z = f(x).$$

Пример. Решить уравнение $y' = y^4 \cos x + y \operatorname{tg} x$.

Преобразуя заданное уравнение, получим:

$$y' - \operatorname{tg} x \cdot y = \cos x \cdot y^4,$$

$$\frac{1}{y^4}\frac{dy}{dx} - \operatorname{tg} x \frac{1}{y^3} = \cos x.$$

Введем новую переменную $z = y^{-3}$. Тогда получим

$$\frac{dz}{dx} = -\frac{3}{y^4}\frac{dy}{dx}, \quad \frac{dy}{dx} = -\frac{y^4}{3}\frac{dz}{dx}.$$

Относительно переменной z дифференциальное уравнение стало линейным:

$$-\frac{1}{3}z' - \operatorname{tg} x \cdot z = \cos x$$

или

$$\frac{1}{3}z' + \operatorname{tg} x \cdot z = -\cos x$$

Получили линейное неоднородное дифференциальное уравнение относительно переменной z.

Решаем сначала однородное ДУ

$$\frac{1}{3}\frac{dz}{dx}+z\,\mathrm{tg}\,x=0.$$

Последовательно преобразуя, получим

$$\frac{dz}{z}=\frac{-3\sin x dx}{\cos x},\ \int\frac{dz}{z}=-3\int\frac{\sin x dx}{\cos x}+C_1,$$

Обозначим $C_1=\ln C$. Тогда получим

$$\ln|z|=3\ln|\cos x|+\ln C,$$

$$z=C\cos^3 x.$$

Применим метод вариации постоянной и положим $C=C(x)$. Тогда получим

$$z=C(x)\cos^3 x,\ \ \frac{dz}{dx}=C'\cos^3 x-3C(x)\cos^2 x\sin x.$$

Подставив z и $\frac{dz}{dx}$ в линейное ДУ относительно z, получим:

$$-\frac{1}{3}C'(x)\cos^3 x + C(x)\cos^2 x\sin x - C(x)\cos^3 x\,\mathrm{tg}\,x = \cos x\,,$$

$$C'(x) = -\frac{3}{\cos^2 x},$$

$$\frac{dC(x)}{dx} = -\frac{3}{\cos^2 x},$$

$$\int dC(x) = -\int\frac{3dx}{\cos^2 x},$$

$$C(x) = -\int\frac{3dx}{\cos^2 x} = -3\,\mathrm{tg}\,x + C_2.$$

Окончательно получаем:

$$z = y^{-3} = (-3\,\mathrm{tg}\,x + C_2)\cos^3 x = C_2\cos^3 x - 3\sin x\cos^2 x.$$

Это общее решение необходимо дополнить частным решением $y = 0$, потерянным при делении на y^4.

Дифференциальное уравнение первого порядка в полных дифференциалах. Обыкновенное дифференциальное уравнение первого порядка, разрешенное относительно производной можно записать в виде

$$P(x;y)dx + Q(x;y)dy = 0, \tag{3.12}$$

где $P(x;y)$ и $Q(x;y)$ – известные функции. Если функции $P(x,y)$ и $Q(x,y)$ в уравнении (3.12) удовлетворяют условию

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}, \tag{3.13}$$

то левая часть уравнения (3.12) есть полный дифференциал некоторой функции $U(x,y)$. Действительно, в этом случае

$$dU = \frac{\partial U}{\partial x}dx + \frac{\partial U}{\partial y}dy = P\,dx + Q\,dy \text{ и } \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}.$$

Тогда можно написать

$$dU(x,y) = \frac{\partial U}{\partial x}dx + \frac{\partial U}{\partial y}dy = P(x;y)dx + Q(x;y)dy = 0$$

и общий интеграл уравнения (3.12) имеет вид:

$$U(x,y) = C.$$

Пример. Найти частный интеграл уравнения $\frac{x^2-y}{x^2}dx+\frac{x+1}{x}dy=0$ при начальных условиях $x_0=1, y_0=1$.

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{x^2-y}{x^2}\right)=-\frac{1}{x^2}\quad \frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x+1}{x}\right)=-\frac{1}{x^2}$$

Так как условие (3.13) выполняется, интегрируя, получим:

при $y=\text{const}$: $\quad U(x,y)=\int P(x,y)dx=\int\left(1-\frac{y}{x^2}\right)dx=x+\frac{y}{x}+f(y)$,

при $x=\text{const}$: $\quad U(x,y)=\int Q(x,y)dy=\int\left(1+\frac{1}{x}\right)dy=y+\frac{y}{x}+g(x)$.

Сравнивая выражения для $U(x,y)$, имеем $U(x,y)=x+y+\frac{y}{x}$. Следовательно, общий интеграл заданного уравнения имеет вид $x+y+\frac{y}{x}=C$. Учитывая н.у. находим $C=3$ и частный интеграл есть

$$x+y+\frac{y}{x}=3.$$

Если функции $P(x,y)$ и $Q(x,y)$ в уравнении (3.12) не удовлетворяют условию (3.13), то левая часть уравнения (3.12) не является полным дифференциалом. Но иногда удается подобрать такой множитель $\mu(x,y)$, называемый *интегрирующим множителем*, чтобы выражение $\mu(P(x,y)dx+Q(x,y)dy)$ стало полным дифференциалом некоторой функции $U(x,y)$. В этом случае выполняется условие

$$\frac{\partial(\mu P(x,y))}{\partial y}=\frac{\partial(\mu Q(x,y))}{\partial x},$$

а общий интеграл имеет вид

$$U(x,y)=C.$$

Пример. Левая часть уравнения $2ydx + xdy = 0$ не является полным дифференциалом, но при умножении на x получим $x(2ydx + xdy) = d(x^2 y)$.

$$x(2ydx + xdy) = x \cdot 0$$

$$2xydx + x^2 dy = 0$$

$$P(x, y) = 2xy, \quad \frac{\partial P}{\partial y} = 2x, \quad Q(x, y) = x^2, \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = 2x$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

$$U(x, y) = \int P dx = \int 2xy dx = x^2 y + f(y)$$

$$U(x, y) = \int Q dy = \int x^2 dy = x^2 y + g(x)$$

$$U(x, y) = x^2 y.$$

Общий интеграл имеет вид $x^2 y = C$.

Интегрирующий множитель имеет всякое дифференциальное уравнение, но общих приемов для его нахождения не существует.