

Пример. Найти общее решение уравнения $y' = 2x(x^2 + y)$.

Преобразуем уравнение к виду:

$$y' - 2xy = 2x^3.$$

Решим сначала однородное уравнение

$$y' - 2xy = 0.$$

Последовательно преобразуя, получим

$$\frac{dy}{dx} = 2xy, \quad \frac{dy}{y} = 2xdx, \quad \int \frac{dy}{y} = \int 2xdx + C_1, \quad \ln|y| = x^2 + C_1,$$

$$y = Ce^{x^2}, \quad e^{C_1} = C.$$

Пусть решение имеет вид

$$y = C(x)e^{x^2}.$$

Тогда получим

$$\frac{dy}{dx} = C'(x)e^{x^2} + C(x)e^{x^2} 2x.$$

Подставив выражения для y и y' в исходное уравнение и последовательно преобразуя, получим

$$C'(x)e^{x^2} + C(x)e^{x^2} 2x - 2xC(x)e^{x^2} = 2x^3,$$

$$C'(x)e^{x^2} = 2x^3$$

$$C'(x) = 2x^3 e^{-x^2},$$

$$\frac{dC}{dx} = 2x^3 e^{-x^2},$$

$$dC(x) = 2x^3 e^{-x^2} dx.$$

Сделаем замену переменной

$$x^2 = u, \text{ откуда } 2x dx = du.$$

Тогда, интегрируя уравнение $dC(x) = 2x^3 e^{-x^2} dx$, получим

$$\begin{aligned} C(x) &= \int u e^{-u} du + C_2 = -u e^{-u} + \int e^{-u} du + C_2 = -u e^{-u} - e^{-u} + C_2 = \\ &= -x^2 e^{-x^2} - e^{-x^2} + C_2. \end{aligned}$$

Следовательно, общее решение исходного уравнения имеет вид

$$y = (-x^2 e^{-x^2} - e^{-x^2} + C_2) e^{x^2} = C_2 e^{x^2} - x^2 - 1.$$

К линейному ДУ сводится уравнение Бернулли:

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = q(x)y^n, \quad n \geq 2. \quad (3.11)$$

Действительно, разделив уравнение на y^n , получим:

$$y^{-n} \frac{dy}{dx} + p(x)y^{1-n} = q(x).$$

Введем новую функцию $z = y^{1-n}$. Тогда получим

$$\frac{dz}{dx} = (1-n)y^{-n} \frac{dy}{dx} \quad \text{или} \quad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{(1-n)y^{-n}} \frac{dz}{dx}.$$

Используя эти соотношения, получим линейное дифференциальное уравнение относительно функции z :

$$\frac{1}{1-n} \frac{dz}{dx} + p(x)z = f(x).$$

Пример. Решить уравнение $y' = y^4 \cos x + y \operatorname{tg} x$.

Преобразуя заданное уравнение, получим:

$$y' - \operatorname{tg} x \cdot y = \cos x \cdot y^4,$$

$$\frac{1}{y^4} \frac{dy}{dx} - \operatorname{tg} x \frac{1}{y^3} = \cos x.$$

Введем новую переменную $z = y^{-3}$. Тогда получим

$$\frac{dz}{dx} = -\frac{3}{y^4} \frac{dy}{dx}, \quad \frac{dy}{dx} = -\frac{y^4}{3} \frac{dz}{dx}.$$

Относительно переменной z дифференциальное уравнение стало линейным:

$$-\frac{1}{3} z' - \operatorname{tg} x \cdot z = \cos x$$

или

$$\frac{1}{3} z' + \operatorname{tg} x \cdot z = -\cos x$$

Получили линейное неоднородное дифференциальное уравнение относительно переменной z .

Решаем сначала однородное ДУ

$$\frac{1}{3} \frac{dz}{dx} + z \operatorname{tg} x = 0.$$

Последовательно преобразуя, получим

$$\frac{dz}{z} = \frac{-3 \sin x dx}{\cos x}, \quad \int \frac{dz}{z} = -3 \int \frac{\sin x dx}{\cos x} + C_1,$$

Обозначим $C_1 = \ln C$. Тогда получим

$$\begin{aligned} \ln |z| &= 3 \ln |\cos x| + \ln C, \\ z &= C \cos^3 x. \end{aligned}$$

Применим метод вариации постоянной и положим $C = C(x)$. Тогда получим

$$z = C(x) \cos^3 x, \quad \frac{dz}{dx} = C' \cos^3 x - 3C(x) \cos^2 x \sin x.$$

Подставив z и $\frac{dz}{dx}$ в линейное ДУ относительно z , получим:

$$-\frac{1}{3}C'(x)\cos^3 x + C(x)\cos^2 x \sin x - C(x)\cos^3 x \operatorname{tg} x = \cos x,$$

$$C'(x) = -\frac{3}{\cos^2 x},$$

$$\frac{dC(x)}{dx} = -\frac{3}{\cos^2 x},$$

$$\int dC(x) = -\int \frac{3dx}{\cos^2 x},$$

$$C(x) = -\int \frac{3dx}{\cos^2 x} = -3 \operatorname{tg} x + C_2.$$

Окончательно получаем:

$$z = y^{-3} = (-3 \operatorname{tg} x + C_2)\cos^3 x = C_2 \cos^3 x - 3 \sin x \cos^2 x.$$

Это общее решение необходимо дополнить частным решением $y = 0$, потерянным при делении на y^4 .

Дифференциальное уравнение первого порядка в полных дифференциалах. Обыкновенное дифференциальное уравнение первого порядка, разрешенное относительно производной можно записать в виде

$$P(x; y)dx + Q(x; y)dy = 0, \quad (3.12)$$

где $P(x; y)$ и $Q(x; y)$ – известные функции. Если функции $P(x; y)$ и $Q(x; y)$ в уравнении (3.12) удовлетворяют условию

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}, \quad (3.13)$$

то левая часть уравнения (3.12) есть полный дифференциал некоторой функции $U(x, y)$. Действительно, в этом случае

$$dU = \frac{\partial U}{\partial x}dx + \frac{\partial U}{\partial y}dy = Pdx + Qdy \text{ и } \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}.$$

Тогда можно написать

$$dU(x, y) = \frac{\partial U}{\partial x}dx + \frac{\partial U}{\partial y}dy = P(x; y)dx + Q(x; y)dy = 0$$

и общий интеграл уравнения (3.12) имеет вид:

$$U(x, y) = C.$$

Пример. Найти частный интеграл уравнения $\frac{x^2 - y}{x^2} dx + \frac{x + 1}{x} dy = 0$

при начальных условиях $x_0 = 1, y_0 = 1$.

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{x^2 - y}{x^2} \right) = -\frac{1}{x^2} \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{x + 1}{x} \right) = -\frac{1}{x^2}$$

Так как условие (3.13) выполняется, интегрируя, получим:

при $y = \text{const}$: $U(x, y) = \int P(x, y) dx = \int \left(1 - \frac{y}{x^2} \right) dx = x + \frac{y}{x} + f(y),$

при $x = \text{const}$: $U(x, y) = \int Q(x, y) dy = \int \left(1 + \frac{1}{x} \right) dy = y + \frac{y}{x} + g(x).$

Сравнивая выражения для $U(x, y)$, имеем $U(x, y) = x + y + \frac{y}{x}.$

Следовательно, общий интеграл заданного уравнения имеет вид

$x + y + \frac{y}{x} = C.$ Учитывая н.у. находим $C = 3$ и частный интеграл есть

$$x + y + \frac{y}{x} = 3.$$

Если функции $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ в уравнении (3.12) не удовлетворяют условию (3.13), то левая часть уравнения (3.12) не является полным дифференциалом. Но иногда удастся подобрать такой множитель $\mu(x, y)$, называемый *интегрирующим множителем*, чтобы выражение $\mu(P(x, y)dx + Q(x, y)dy)$ стало полным дифференциалом некоторой функции $U(x, y)$. В этом случае выполняется условие

$$\frac{\partial(\mu P(x, y))}{\partial y} = \frac{\partial(\mu Q(x, y))}{\partial x},$$

а общий интеграл имеет вид

$$U(x, y) = C.$$

Пример. Левая часть уравнения $2ydx + xdy = 0$ не является полным дифференциалом, но при умножении на x получим $x(2ydx + xdy) = d(x^2 y)$.

$$x(2ydx + xdy) = x \cdot 0$$

$$2xydx + x^2 dy = 0$$

$$P(x, y) = 2xy, \quad \frac{\partial P}{\partial y} = 2x, \quad Q(x, y) = x^2, \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = 2x$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

$$U(x, y) = \int P dx = \int 2xy dx = x^2 y + f(y)$$

$$U(x, y) = \int Q dy = \int x^2 dy = x^2 y + g(x)$$

$$U(x, y) = x^2 y.$$

Общий интеграл имеет вид $x^2 y = C$.

Интегрирующий множитель имеет всякое дифференциальное уравнение, но общих приемов для его нахождения не существует.