

# Математика

## часть 1

*Лекцию читает*

К.Т.Н.,

**Яскин Сергей Васильевич**

## **1.4. Системы линейных уравнений**

# 1.4.1. Основные понятия

Система двух линейных уравнений с двумя неизвестными

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases}$$

$x_1, x_2$  - переменные

$a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}$  - коэффициенты системы

$b_1, b_2$  - свободные члены



Решением системы линейных уравнений  
называется совокупность значений  
неизвестных, которая при подстановке в  
систему обращает все уравнения в тождества

Пример 1

Решением системы

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 = 1 \\ 2x_1 - 2x_2 = 7 \end{cases}$$

являются значения:  $x_1 = 1$ ;  $x_2 = -2$

$$\begin{cases} 3 \cdot 1 + (-2) = 1 \\ 2 \cdot 1 - 2 \cdot (-2) = 7 \end{cases}$$

Система линейных уравнений называется **совместной**, если она имеет хотя бы одно решение, и **несовместной**, если она не имеет ни одного решения

Если решение одно – система **определенная**, если больше чем одно- **неопределенная**

## 1.4.2. Формулы Крамера

для системы двух линейных уравнений с  
двумя неизвестными

$$\begin{cases} x_1 = \frac{D_1}{D}, \\ x_2 = \frac{D_2}{D}. \end{cases} \quad D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases}$$

## 1.4.2. Формулы Крамера

для системы двух линейных уравнений с  
двумя неизвестными

$$\begin{cases} x_1 = \frac{D_1}{D}, \\ x_2 = \frac{D_2}{D}. \end{cases} \quad D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}$$

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \quad D_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases}$$



## Пример 1.

Решить систему  
уравнений:

$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 = 12 \\ 5x_1 + x_2 = 7 \end{cases}$$

$$D = \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} = 3 \cdot 1 - (-2) \cdot 5 = 13$$

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

$$\begin{cases} x_1 = \frac{D_1}{D}, \\ x_2 = \frac{D_2}{D}. \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 = 12 \\ 5x_1 + x_2 = 7 \end{cases}$$

$$D_1 = \begin{vmatrix} 12 & -2 \\ 7 & 1 \end{vmatrix} = 12 \cdot 1 - (-2) \cdot 7 = 26$$

$$D_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}$$

$$D = 13$$

$$\begin{cases} x_1 = \frac{D_1}{D}, \\ x_2 = \frac{D_2}{D}. \end{cases}$$

## Самостоятельная работа 1

**Задание.** Вычислить определитель  $D_2$  системы уравнений

$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 = 12 \\ 5x_1 + x_2 = 7 \end{cases}$$



Варианты

A. 31

B. -39

ответов:

C. 27

D. 13

$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 = 12 \\ 5x_1 + x_2 = 7 \end{cases}$$

**Сверим ответы?**

$$D_2 = \begin{vmatrix} 3 & 12 \\ 5 & 7 \end{vmatrix} = 3 \cdot 7 - 12 \cdot 5 = -39$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}$$

$$D = 13$$

$$D_1 = 26$$

$$\begin{cases} x_1 = \frac{D_1}{D}, \\ x_2 = \frac{D_2}{D}. \end{cases}$$



$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 = 12 \\ 5x_1 + x_2 = 7 \end{cases}$$

Находим значение переменной  $x_1$

$$x_1 = \frac{D_1}{D} = \frac{26}{13} = 2$$

$$D=13$$

$$D_1=26$$

$$D_2=-39$$

$$\begin{cases} x_1 = \frac{D_1}{D}, \\ x_2 = \frac{D_2}{D}. \end{cases}$$

### 1.4.3. Теорема Крамера для системы $n$ уравнений с $n$ неизвестными

1. Если определитель системы  $n$  линейных уравнений с  $n$  неизвестными  $D \neq 0$ , то система совместна и имеет единственное решение:

$$x_1 = \frac{D_1}{D}, x_2 = \frac{D_2}{D}, \dots, x_n = \frac{D_n}{D}$$

## $n$ неизвестными

2. Если  $D = 0$  и хотя бы один из определителей  $D_1, D_2, \dots, D_n$  отличен от нуля, то система уравнений **несовместна**

## $n$ неизвестными

3. Если все определители  $D, D_1, D_2, \dots, D_n$  равны нулю, то система имеет **бесконечное множество решений.**

## Вычисление определителя матрицы третьего порядка. Правило треугольника

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =$$



## Пример 2.

Решить систему  
уравнений:

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_3 = 11 \\ x_1 + 5x_2 - 4x_3 = -10 \\ 4x_1 + x_2 - 3x_3 = 5. \end{cases}$$

$$D = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & 5 & -4 \\ 4 & 1 & -3 \end{vmatrix} = 2 \cdot 5 \cdot (-3)$$

$$x_1 = \frac{D_1}{D}, x_2 = \frac{D_2}{D}, \dots, x_n = \frac{D_n}{D}$$

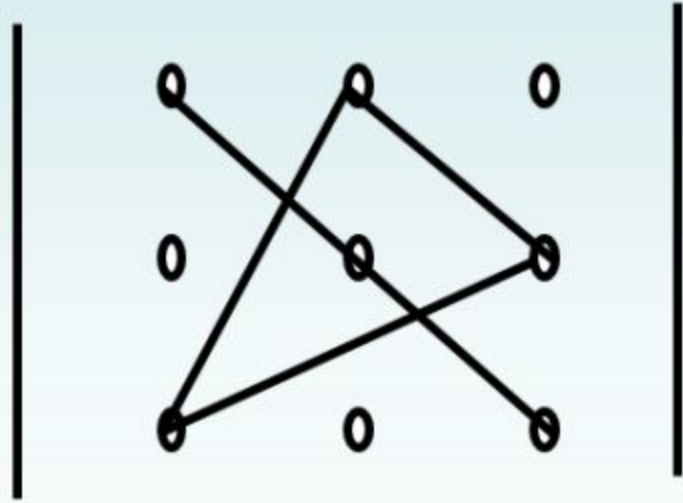
# Вычисление определителя матрицы третьего порядка. Правило треугольника

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

+

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} +$$

# Вычисление определителя матрицы третьего порядка. Правило треугольника

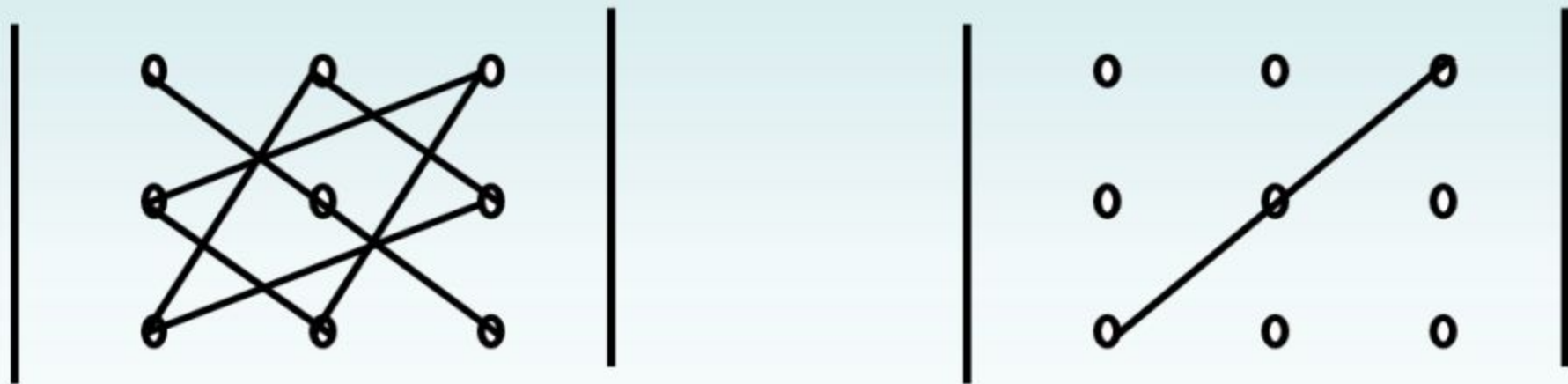


+

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} +$$



# Вычисление определителя матрицы третьего порядка. Правило треугольника

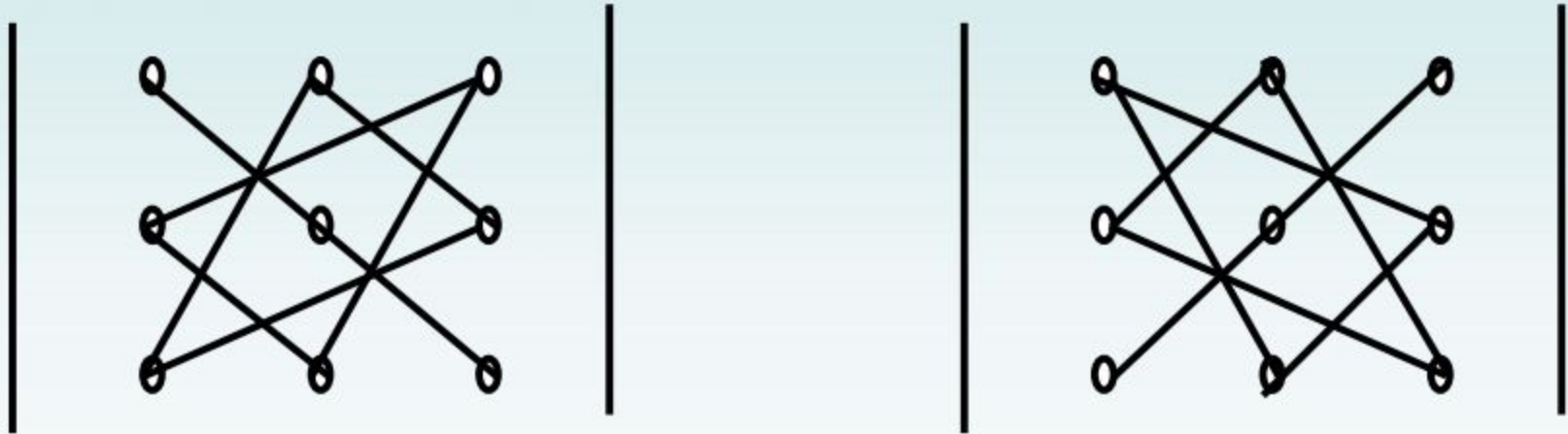


+

-

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} -$$

# порядка. Правило треугольника



+

-

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - \\
 - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}$$



Пример 2.

Система уравнений:

$$\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 - 4x_3 = -10 \\ 4x_1 + x_2 - 3x_3 = 5. \end{cases}$$

$$D = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & 5 & -4 \\ 4 & 1 & -3 \end{vmatrix} = 2 \cdot 5 \cdot (-3)$$

$$x_1 = \frac{D_1}{D}, x_2 = \frac{D_2}{D}, \dots, x_n = \frac{D_n}{D}$$

уравнений:

$$\begin{cases} x_1 + 5x_2 - 4x_3 = -10 \\ 4x_1 + x_2 - 3x_3 = 5. \end{cases}$$

$$D = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & 5 & -4 \\ 4 & 1 & -3 \end{vmatrix} = 2 \cdot 5 \cdot (-3) + 1 \cdot 1 \cdot 1$$

$$x_1 = \frac{D_1}{D}, x_2 = \frac{D_2}{D}, \dots, x_n = \frac{D_n}{D}$$

$$D = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & 5 & -4 \\ 4 & 1 & -3 \end{vmatrix} = 2 \cdot 5 \cdot (-3) + 1 \cdot 1 \cdot 1 + (-3) \cdot (-4) \cdot 4$$

$$x_1 = \frac{D_1}{D}, x_2 = \frac{D_2}{D}, \dots, x_n = \frac{D_n}{D}$$



уравнении:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ 4x_1 + x_2 - 3x_3 = 5. \end{cases}$$

$$D = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & 5 & -4 \\ 4 & 1 & -3 \end{vmatrix} = 2 \cdot 5 \cdot (-3) + 1 \cdot 1 \cdot 1 + (-3) \cdot (-4) \cdot 4 -$$
$$-1 \cdot 5 \cdot 4$$

$$x_1 = \frac{D_1}{D}, x_2 = \frac{D_2}{D}, \dots, x_n = \frac{D_n}{D}$$

уравнений:

$$\begin{cases} x_1 + 5x_2 - 4x_3 = -10 \\ 4x_1 + x_2 - 3x_3 = 5. \end{cases}$$

$$D = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & 5 & -4 \\ 4 & 1 & -3 \end{vmatrix} = 2 \cdot 5 \cdot (-3) + 1 \cdot 1 \cdot 1 + (-3) \cdot (-4) \cdot 4 -$$
$$-1 \cdot 5 \cdot 4 - (-3) \cdot 1 \cdot (-3)$$

$$x_1 = \frac{D_1}{D}, x_2 = \frac{D_2}{D}, \dots, x_n = \frac{D_n}{D}$$

## Самостоятельная работа 4

**Задание.** Определите последнюю «тройку» чисел

$$D = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & 5 & -4 \\ 4 & 1 & -3 \end{vmatrix} = 2 \cdot 5 \cdot (-3) + 1 \cdot 1 \cdot 1 + (-3) \cdot (-4) \cdot 4 -$$
$$-1 \cdot 5 \cdot 4 - (-3) \cdot 1 \cdot (-3)$$

**Варианты**

**А. 1\*1\*1**

**В. 1\*5\*4**



Пример 2.

Решить систему  
уравнений:

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_3 = 11 \\ x_1 + 5x_2 - 4x_3 = -10 \\ 4x_1 + x_2 - 3x_3 = 5. \end{cases}$$

$$D = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & 5 & -4 \\ 4 & 1 & -3 \end{vmatrix} = 2 \cdot 5 \cdot (-3) + 1 \cdot 1 \cdot 1 + (-3) \cdot (-4) \cdot 4 -$$
$$-1 \cdot 5 \cdot 4 - (-3) \cdot 1 \cdot (-3) - 1 \cdot (-4) \cdot 2$$

$$x_1 = \frac{D_1}{D}, x_2 = \frac{D_2}{D}, \dots, x_n = \frac{D_n}{D}$$

уравнений:

$$\begin{cases} x_1 + 5x_2 - 4x_3 = -10 \\ 4x_1 + x_2 - 3x_3 = 5. \end{cases}$$

$$D = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & 5 & -4 \\ 4 & 1 & -3 \end{vmatrix} = 2 \cdot 5 \cdot (-3) + 1 \cdot 1 \cdot 1 + (-3) \cdot (-4) \cdot 4 - \\ - 1 \cdot 5 \cdot 4 - (-3) \cdot 1 \cdot (-3) - 1 \cdot (-4) \cdot 2 = \\ = -30 + 1 + 48 - 20 - 9 + 8 = -2$$

$$x_1 = \frac{D_1}{D}, x_2 = \frac{D_2}{D}, \dots, x_n = \frac{D_n}{D}$$

**Пример 2.**

Решить систему  
уравнений:

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_3 = 11 \\ x_1 + 5x_2 - 4x_3 = -10 \\ 4x_1 + x_2 - 3x_3 = 5. \end{cases}$$

$$D = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & 5 & -4 \\ 4 & 1 & -3 \end{vmatrix} = 2 \cdot 5 \cdot (-3) + 1 \cdot 1 \cdot 1 + (-3) \cdot (-4) \cdot 4 -$$

$$-1 \cdot 5 \cdot 4 - (-3) \cdot 1 \cdot (-3) - 1 \cdot (-4) \cdot 2 =$$

$$= -30 + 1 + 48 - 20 - 9 + 8 = -2$$

Система определенная,

$$\begin{cases} x_1 + 5x_2 - 4x_3 = -10 \\ 4x_1 + x_2 - 3x_3 = 5. \end{cases}$$

$$D_1 = \begin{vmatrix} 11 & -3 & 1 \\ -10 & 5 & -4 \\ 5 & 1 & -3 \end{vmatrix} = 11 \cdot 5 \cdot (-3) + (-3) \cdot (-4) \cdot 5 + (-10) \cdot 1 \cdot 1 -$$
$$-1 \cdot 5 \cdot 5 - (-3) \cdot (-10) \cdot (-3) - 1 \cdot (-4) \cdot 11 =$$
$$= -165 + 60 - 10 - 25 + 90 - 44 = -6$$

$$\underline{D = -2}$$

$$\begin{cases} x_1 + 5x_2 - 4x_3 = -10 \\ 4x_1 + x_2 - 3x_3 = 5. \end{cases}$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} 2 & 11 & 1 \\ 1 & -10 & -4 \\ 4 & 5 & -3 \end{vmatrix} = 2 \cdot (-10) \cdot (-3) + 11 \cdot (-4) \cdot 4 + 1 \cdot 5 \cdot 1 - \\ -1 \cdot (-10) \cdot 4 - 1 \cdot 11 \cdot (-3) - 5 \cdot (-4) \cdot 2 = \\ = 60 - 176 + 5 + 40 + 33 + 40 = 2$$

$$\underline{D = -2}$$

$$\underline{D_1 = -6}$$



$$\begin{cases} 2x_1 - 5x_2 + x_3 = 11 \\ x_1 + 5x_2 - 4x_3 = -10 \\ 4x_1 + x_2 - 3x_3 = 5. \end{cases}$$

**Задание.**

Найдите верно записанный определитель  $D_3$

$$a). \quad D_3 = \begin{vmatrix} 2 & 11 & 1 \\ 1 & -10 & -4 \\ 4 & 5 & -3 \end{vmatrix}$$

$$b). \quad D_3 = \begin{vmatrix} 11 & -3 & 1 \\ -10 & 5 & -4 \\ 5 & 1 & -3 \end{vmatrix}$$

$$c). \quad D_3 = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & 5 & -4 \\ 4 & 1 & -3 \end{vmatrix}$$

$$d). \quad D_3 = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 11 \\ 1 & 5 & -10 \\ 4 & 1 & 5 \end{vmatrix}$$

$$\begin{cases} x_1 + 5x_2 - 4x_3 = -10 \\ 4x_1 + x_2 - 3x_3 = 5. \end{cases}$$

$$D_3 = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 11 \\ 1 & 5 & -10 \\ 4 & 1 & 5 \end{vmatrix} = 2 \cdot 5 \cdot 5 + 1 \cdot 1 \cdot 11 + (-3) \cdot (-10) \cdot 4 -$$
$$-11 \cdot 5 \cdot 4 - 1 \cdot 5 \cdot (-3) - 1 \cdot (-10) \cdot 2 =$$
$$= 50 + 11 + 120 - 220 + 15 + 20 = -4$$

$$\underline{D = -2}$$

$$\underline{D_1 = -6}$$

$$\underline{D_2 = 2}$$

$$x_1 = \frac{D_1}{D} = \frac{-6}{-2} = 3$$

$$x_2 = \frac{D_2}{D} = \frac{2}{-2} = -1$$

$$\underline{D = -2}$$

$$\underline{D_1 = -6}$$

$$\underline{D_2 = 2}$$

$$\underline{D_3 = -4}$$

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_3 = 11 \\ x_1 + 5x_2 - 4x_3 = -10 \\ 4x_1 + x_2 - 3x_3 = 5 \end{cases}$$



**Задание.** Определите значение переменной  $x_3$

$$\underline{D = -2}$$

$$\underline{D_1 = -6}$$

$$D_2 = 2$$

$$D_3 = -4$$

$$x_1 = \frac{D_1}{D} = \frac{-6}{-2} = 3$$

$$x_2 = \frac{D_2}{D} = \frac{2}{-2} = -1$$

$$x_1 = \frac{D_1}{D} = \frac{-6}{-2} = 3$$

$$x_2 = \frac{D_2}{D} = \frac{2}{-2} = -1$$

$$x_3 = \frac{D_3}{D} = \frac{-4}{-2} = 2.$$

$$\underline{D = -2}$$

$$\underline{D_1 = -6}$$

$$\underline{D_2 = 2}$$

$$\underline{D_3 = -4}$$

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_3 = 11 \\ x_1 + 5x_2 - 4x_3 = -10 \\ 4x_1 + x_2 - 3x_3 = 5. \end{cases}$$

## Проверка

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_3 \\ x_1 + 5x_2 - 4x_3 \\ 4x_1 + x_2 - 3x_3 \end{cases} = \begin{cases} 2 \cdot 3 - 3 \cdot (-1) + 2 = 11 \\ 3 + 5 \cdot (-1) - 4 \cdot 2 = -10 \\ 4 \cdot 3 + (-1) - 3 \cdot 2 = 5 \end{cases}$$

$$x_1 = 3$$

$$x_2 = -1$$

$$x_3 = 2$$

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_3 = 11 \\ x_1 + 5x_2 - 4x_3 = -10 \\ 4x_1 + x_2 - 3x_3 = 5 \end{cases}$$

## 1.5. Матричный метод решения систем линейных уравнений (СЛУ)

Решаем систему уравнений:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3. \end{cases} \quad \underline{(4)}$$

## 1.5. Матричный метод решения систем линейных уравнений (СЛУ)

Решаем систему уравнений:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3. \end{cases} \quad \underline{(4)}$$

Представим ее в виде:

$$\begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} \quad \underline{(5)}$$



Введем обозначения матриц,  
состоящих из коэффициентов и переменных:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}.$$

состоящих из коэффициентов и переменных:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}.$$

Тогда систему (5)

можно записать

в матричном виде:

$$AX = B \quad \underline{(6)}$$

$$\begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \quad \underline{(5)}$$

Решаем систему (6):  $AX = B$  (6)

Домножим обе части (6) на  $A^{-1}$ :

$$A^{-1}AX = A^{-1}B,$$

Решаем систему (6):  $AX = B$  (6)

Домножим обе части (6) на  $A^{-1}$ :

$$A^{-1}AX = A^{-1}B,$$

Но по определению обратной матрицы

$$A^{-1}A = E$$

Решаем систему (6):  $AX = B$  (6)

Умножим обе части (6) на  $A^{-1}$ :

$$A^{-1}AX = A^{-1}B,$$

Но по определению обратной матрицы

$$A^{-1}A = E$$

А при умножении матрицы на единичную  
получаем основную матрицу:  $EX = X$ ,



Решаем систему (6):  $AX = B$  (6)

Умножим обе части (6) на  $A^{-1}$ :

$$A^{-1}AX = A^{-1}B,$$

Но по определению обратной матрицы

$$A^{-1}A = E$$

А при умножении матрицы на единичную  
получаем основную матрицу:  $EX = X$ ,

Значит, матричное решение системы уравнений:

$$X = A^{-1}B. \quad (7)$$

уравнений матричным  
методом

$$\begin{cases} 9x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 15 \\ 5x_1 + x_2 + 3x_3 = 14 \end{cases}$$

**Решение**

$$AX = B, \quad \longrightarrow \quad X = A^{-1}B.$$

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 2 & 3 \\ 9 & 3 & 4 \\ 5 & 1 & 3 \end{pmatrix}; \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 13 \\ 15 \\ 14 \end{pmatrix}.$$

МЕТОДОМ

$$\begin{cases} 9x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 15 \\ 5x_1 + x_2 + 3x_3 = 14 \end{cases}$$

### Решение

$$AX = B, \quad \longrightarrow \quad X = A^{-1}B.$$

$$A^{-1} = \frac{1}{D} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}$$

← Матрица  
алгебраических  
дополнений для  
транспонированной  
матрицы  $A$

$$D(A) = \begin{vmatrix} 7 & 2 & 3 \\ 9 & 3 & 4 \\ 5 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 63 + 40 + 27 - 45 - 28 - 54 = 3$$

$$A^{-1} = \frac{1}{D} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} 7x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 13 \\ 9x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 15 \\ 5x_1 + x_2 + 3x_3 = 14 \end{cases}$$



$$\begin{cases} 9x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 15 \\ 5x_1 + x_2 + 3x_3 = 14 \end{cases}$$

Алгебраическое дополнение элемента  $a_{ik}$ :

$$A_{ik} = (-1)^{i+k} M_{ik}$$

Здесь  $M_{ik}$  - минор элемента  $a_{ik}$  - определитель, полученный из  $D(A)$  вычеркиванием строки  $i$  и столбца  $k$ :

$$A^{-1} = \frac{1}{D} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}$$

$$D = 3$$



Первый столбец:  $i=1; k=1$

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 9 - 4 = 5$$

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 2 & 3 \\ 9 & 3 & 4 \\ 5 & 1 & 3 \end{pmatrix};$$

$D(A) = 3$

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 2 & 3 \\ 9 & 3 & 4 \\ 5 & 1 & 3 \end{pmatrix};$$

$$\begin{cases} 7x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 13 \\ 9x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 15 \\ 5x_1 + x_2 + 3x_3 = 14 \end{cases}$$

Первый столбец:  $i=1; k=1$

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 9 - 4 = 5$$

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 2 & 3 \\ 9 & 3 & 4 \\ 5 & 1 & 3 \end{pmatrix};$$

Второй столбец:  $i=1; k=2$

$$A_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 9 & 4 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} = -(27 - 20) = -7$$

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 2 & 3 \\ 9 & 3 & 4 \\ 5 & 1 & 3 \end{pmatrix};$$

$D(A) = 3$

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 2 & 3 \\ 9 & 3 & 4 \\ 5 & 1 & 3 \end{pmatrix};$$

$$\begin{cases} 7x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 13 \\ 9x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 15 \\ 5x_1 + x_2 + 3x_3 = 14 \end{cases}$$

Вычисляем алгебраические дополнения для **первой строки**

Третий столбец: **i=1; k=3**

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 2 & 3 \\ 9 & 3 & 4 \\ 5 & 1 & 3 \end{pmatrix};$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 9 & 3 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} = 9 - 15 = -6$$

$$D(A) = 3$$

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 2 & 3 \\ 9 & 3 & 4 \\ 5 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$A_{11} = 5$$

$$A_{12} = -7$$

Вычисляем алгебраические дополнения для второй строки

Первый столбец:  $i=2; k=1$

$$A_{21} = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = -(6-3) = -3$$

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 2 & 3 \\ 9 & 3 & 4 \\ 5 & 1 & 3 \end{pmatrix};$$

$$\underline{D(A) = 3}$$

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 2 & 3 \\ 9 & 3 & 4 \\ 5 & 1 & 3 \end{pmatrix};$$

$$\underline{A_{11} = 5}$$

$$\underline{A_{12} = -7}$$

Вычисляем алгебраические дополнения для **второй строки**

Первый столбец: **i=2; k=1**

$$A_{21} = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = -(6-3) = -3 \quad A = \begin{pmatrix} 7 & 2 & 3 \\ 9 & 3 & 4 \\ 5 & 1 & 3 \end{pmatrix};$$

Второй столбец: **i=2; k=2**

$$A_{22} = (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 7 & 3 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} = 21-15 = 6 \quad A = \begin{pmatrix} 7 & 2 & 3 \\ 9 & 3 & 4 \\ 5 & 1 & 3 \end{pmatrix};$$

$$D(A) = 3$$

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 2 & 3 \\ 9 & 3 & 4 \\ 5 & 1 & 3 \end{pmatrix};$$

$$\underline{A_{11}} = 5$$

$$\underline{A_{12}} = -7$$



Третий столбец:  $i=2; k=3$

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 2 & 3 \\ 9 & 3 & 4 \\ 5 & 1 & 3 \end{pmatrix};$$

$$A_{23} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 7 & 2 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} = -(7 - 10) = 3$$

$$\underline{D(A) = 3}$$

$$\underline{A_{11} = 5}$$

$$\underline{A_{12} = -7}$$

$$\underline{A_{13} = -6}$$

$$\underline{A_{21} = -3}$$

$$\underline{A_{22} = 6}$$

Первый столбец:  $i=3; k=1$

$$A_{31} = (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 8 - 9 = -1 \quad A = \begin{pmatrix} 7 & 2 & 3 \\ 9 & 3 & 4 \\ 5 & 1 & 3 \end{pmatrix};$$

$$\underline{A_{11}} = 5$$

$$\underline{A_{12}} = -7$$

$$\underline{A_{13}} = -6$$

$$\underline{D(A)} = 3$$

$$\underline{A_{21}} = 3$$

$$\underline{A_{22}} = 6$$

$$\underline{A_{23}} = 3$$

Первый столбец: **i=3; k=1**

$$A_{31} = (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 8 - 9 = -1$$

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 2 & 3 \\ 9 & 3 & 4 \\ 5 & 1 & 3 \end{pmatrix};$$

Второй столбец: **i=3; k=2**

$$A_{32} = (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 7 & 3 \\ 9 & 4 \end{vmatrix} = -(28 - 27) = -1$$

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 2 & 3 \\ 9 & 3 & 4 \\ 5 & 1 & 3 \end{pmatrix};$$

$$\underline{A_{11}} = 5$$

$$\underline{A_{12}} = -7$$

$$\underline{A_{13}} = -6$$

$$D(A) = 3$$

# Самостоятельная работа

Найдите алгебраическое  
дополнение  $A_{33}$

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 2 & 3 \\ 9 & 3 & 4 \\ 5 & 1 & 3 \end{pmatrix};$$

$$\underline{A_{11} = 5}$$

$$\underline{A_{12} = -7}$$

$$\underline{A_{13} = -6}$$

$$\underline{A_{21} = -3}$$

$$\underline{A_{22} = 6}$$

$$\underline{A_{23} = 3}$$

$$\underline{D(A) = 3}$$

$$\underline{A_{31} = 1}$$

$$\underline{A_{32} = 1}$$

Третий столбец:  $i=3; k=3$

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 2 & 3 \\ 9 & 3 & 4 \\ 5 & 1 & 3 \end{pmatrix};$$

$$A_{33} = (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 7 & 2 \\ 9 & 3 \end{vmatrix} = 21 - 18 = 3$$

$$\underline{D(A) = 3}$$

$$\underline{A_{11} = 5}$$

$$\underline{A_{12} = -7}$$

$$\underline{A_{13} = -6}$$

$$\underline{A_{21} = -3}$$

$$\underline{A_{22} = 6}$$

$$\underline{A_{23} = 3}$$

$$\underline{A_{31} = -1}$$

$$\underline{A_{32} = -1}$$



Составляем обратную матрицу.

Алгебраические дополнения  
берем для транспонированной  
матрицы

$$A^{-1} = \frac{1}{D} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 5 & -3 & -1 \\ -7 & 6 & -1 \\ -6 & 3 & 3 \end{pmatrix}.$$

$$\underline{A_{11}} = 5$$

$$\underline{A_{12}} = -7$$

$$\underline{A_{13}} = -6$$

$$\underline{A_{21}} = -3$$

$$\underline{A_{22}} = 6$$

$$\underline{A_{23}} = 3$$

$$D(A) = 3$$

Находим решение системы уравнений:

$$X = A^{-1}B = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 5 & -3 & -1 \\ -7 & 6 & -1 \\ -6 & 3 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 13 \\ 15 \\ 14 \end{pmatrix} =$$

$$A^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 5 & -3 & -1 \\ -7 & 6 & -1 \\ -6 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} 7x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 13 \\ 9x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 15 \end{cases}$$



$$B = \begin{pmatrix} 13 \\ 15 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} X &= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 5 & -3 & -1 \\ -7 & 6 & -1 \\ -6 & 3 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 13 \\ 15 \\ 14 \end{pmatrix} = \\ &= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 5 \cdot 13 + (-3) \cdot 15 + (-1) \cdot 14 \\ (-7) \cdot 13 + 6 \cdot 15 + (-1) \cdot 14 \\ (-6) \cdot 13 + 3 \cdot 15 + 3 \cdot 14 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 6 \\ -15 \\ 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Решение системы уравнений:

$$x_1 = 2; \quad x_2 = -5; \quad x_3 = 3.$$

## Проверка

$$\begin{cases} 7x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 7 \cdot 2 + 2 \cdot (-5) + 3 \cdot 3 = 13 \\ 9x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 9 \cdot 2 + 3 \cdot (-5) + 4 \cdot 3 = 15 \\ 5x_1 + x_2 + 3x_3 = 5 \cdot 2 + (-5) + 3 \cdot 3 = 14 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 7x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 13 \\ 9x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 15 \\ 5x_1 + x_2 + 3x_3 = 14 \end{cases}$$

$$x_1 = 2; \quad x_2 = -5; \quad x_3 = 3.$$





Мастер функций - шаг 1 из 2



Поиск функции:

Введите краткое описание действия, которое нужно выполнить, и нажмите кнопку "Найти"

Найти

Категория: 10 недавно использовавшихся

Выберите функцию

- МОПРЕД
- СКОС
- ДИСП.Г
- СРЗНАЧ
- СУММ
- СТАНДОТК
- ЭКСЦЕСС

- 10 недавно использовавшихся
- Полный алфавитный перечень
- Финансовые
- Дата и время
- Математические
- Статистические
- Ссылки и массивы
- Работа с базой данных
- Текстовые
- Логические
- Проверка свойств и значений
- Определенные пользователем

- 

МОПРЕД(м  
Возвращает

симв).

[Справка по этой функции](#)

ОК

Отмена

## Мастер функций - шаг 1 из 2



Поиск функции:

Введите краткое описание действия, которое нужно выполнить, и нажмите кнопку "Найти"

Найти

Категория: Математические

Выберите функцию:

КОРЕНЬ  
КОРЕНЬПИ  
МОБР  
МОПРЕД  
МУЛЬТИНОМ  
МУМНОЖ  
НЕЧЁТ



## Аргументы функции



МОПРЕД

Массив

= массив

=

Возвращает определитель матрицы (матрица хранится в массиве).

**Массив** числовой массив с равным количеством строк и столбцов, диапазон ячеек или массив.

Значение:

[Справка по этой функции](#)

ОК

Отмена