Математика
часть 1

Лекцию читает

к.т.н.,

Яскин Сергей Васильевич

1.4. Системы линейных уравнений

1.4.1. Основные понятия

Система двух линейных уравнений с двумя неизвестными

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases}$$

x_1, x_2 - переменные

$a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}$ -коэффициенты системы

b_1, b_2 -свободные члены

Решением системы линейных уравнений называется совокупность значений неизвестных, которая при подстановке в систему обращает все уравнения в тождества

Пример 1

Решением системы
$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 = 1 \\ 2x_1 - 2x_2 = 7 \end{cases}$$

являются значения: $x_1 = 1$; $x_2 = -2$

$$\begin{cases} 3 \cdot 1 + (-2) = 1 \\ 2 \cdot 1 - 2 \cdot \ (-2) = 7 \end{cases}$$

Система линейных уравнений называется **совместной**, если она имеет хотя бы одно решение, и **несовместной**, если она не имеет ни одного решения

Если решение одно –система **определенная**, если больше чем одно- **неопределенная**

1.4.2.Формулы Крамера

для системы двух линейных уравнений с двумя неизвестными

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{D_1}{D}, \\ x_2 = \dfrac{D_2}{D}. \end{cases}$$

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases}$$

1.4.2.Формулы Крамера

для системы двух линейных уравнений с двумя неизвестными

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{D_1}{D}, \\ x_2 = \dfrac{D_2}{D}. \end{cases}$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}$$

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \qquad D_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases}$$

Пример 1. Решить систему уравнений:

$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 = 12 \\ 5x_1 + x_2 = 7 \end{cases}$$

$$D = \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} = 3 \cdot 1 - (-2) \cdot 5 = 13$$

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{D_1}{D}, \\ x_2 = \dfrac{D_2}{D}. \end{cases}$$

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 = 12 \\ 5x_1 + x_2 = 7 \end{cases}$$

$$D_1 = \begin{vmatrix} 12 & -2 \\ 7 & 1 \end{vmatrix} = 12 \cdot 1 - (-2) \cdot 7 = 26$$

$$D_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}$$

$D = 13$

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{D_1}{D}, \\ x_2 = \dfrac{D_2}{D}. \end{cases}$$

Самостоятельная работа 1

Задание. Вычислить определитель D_2 системы уравнений

$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 = 12 \\ 5x_1 + x_2 = 7 \end{cases}$$

Варианты ответов:

A. 31

B. -39

C. 27

D. 13

$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 = 12 \\ 5x_1 + x_2 = 7 \end{cases}$$

Сверим ответы?

$$D_2 = \begin{vmatrix} 3 & 12 \\ 5 & 7 \end{vmatrix} = 3 \cdot 7 - 12 \cdot 5 = -39$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}$$

$D = 13$

$D_1 = 26$

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{D_1}{D}, \\ x_2 = \dfrac{D_2}{D}. \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 = 12 \\ 5x_1 + x_2 = 7 \end{cases}$$

Находим значение переменной $\boldsymbol{X_1}$

$$x_1 = \frac{D_1}{D} = \frac{26}{13} = 2$$

$D=13$

$D_1=26$

$D_2=-39$

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{D_1}{D}, \\ x_2 = \dfrac{D_2}{D}. \end{cases}$$

1.4.3.Теорема Крамера для системы *n* уравнений с *n* неизвестными

1.Если определитель системы *n* линейных уравнений с *n* неизвестными $D \neq 0$,то система **совместна** и имеет **единственное решение:**

$$x_1 = \frac{D_1}{D}, x_2 = \frac{D_2}{D}, \ldots, x_n = \frac{D_n}{D}$$

2. Если $D = 0$ и хотя бы один из определителей $D_1, D_2, \ldots, D_n$ отличен от нуля, то система уравнений **несовместна**

***n* неизвестными**

3.Если все определители $D, D_1, D_2, \ldots, D_n$ равны нулю, то система имеет **бесконечное множество решений.**

Повторение

Вычисление определителя матрицы третьего порядка. Правило треугольника

$$\begin{vmatrix} \circ & \circ & \circ \\ \circ & \circ & \circ \\ \circ & \circ & \circ \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =$$

Пример 2. Решить систему уравнений:

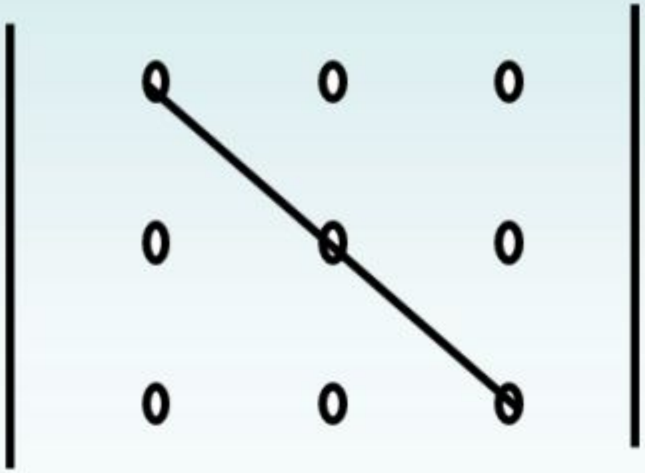
$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_3 = 11 \\ x_1 + 5x_2 - 4x_3 = -10 \\ 4x_1 + x_2 - 3x_3 = 5. \end{cases}$$

$$D = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & 5 & -4 \\ 4 & 1 & -3 \end{vmatrix} = 2 \cdot 5 \cdot (-3)$$

$$x_1 = \frac{D_1}{}, x_2 = \frac{D_2}{}, \ldots, x_n = \frac{D_n}{}$$

Повторение

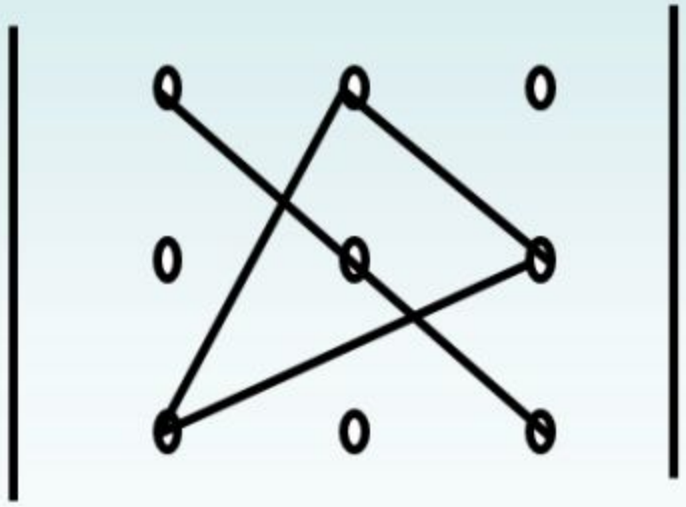
Вычисление определителя матрицы третьего порядка. Правило треугольника



+

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} +$$

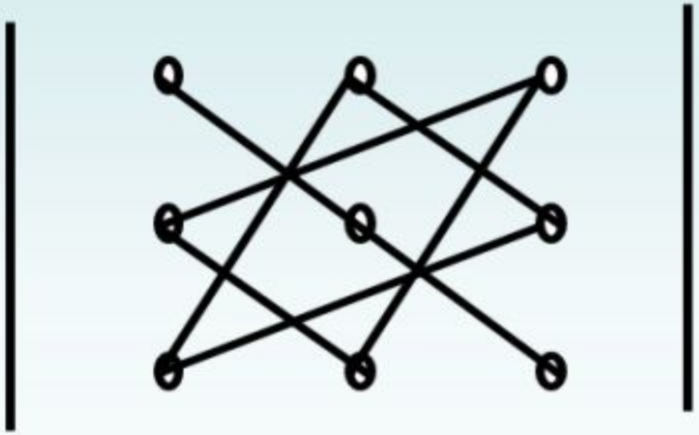
Вычисление определителя матрицы третьего порядка. Правило треугольника

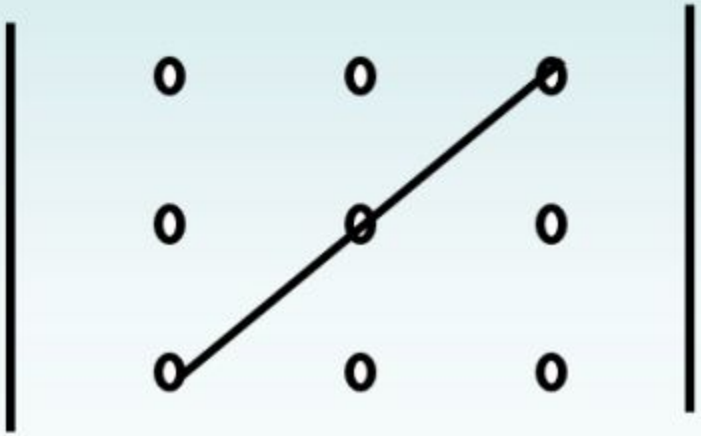


+

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} +$$

Вычисление определителя матрицы третьего порядка. Правило треугольника

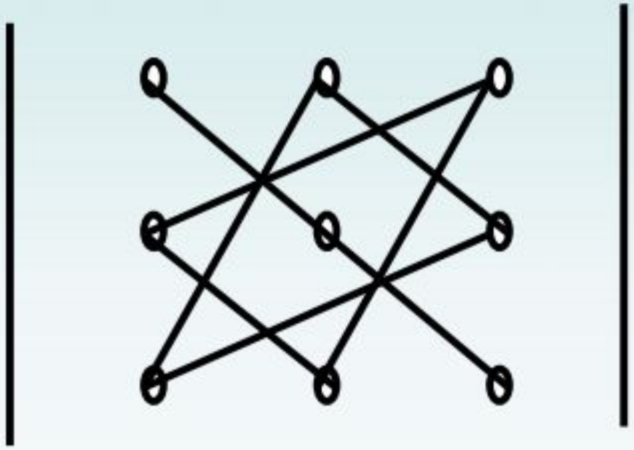




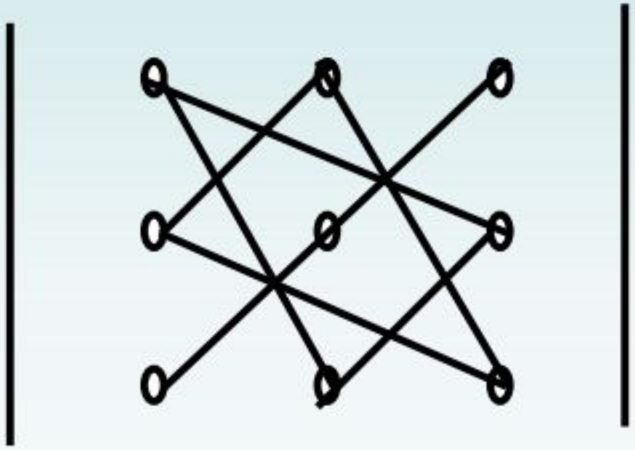
+ -

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} -$$

порядка. Правило треугольника



+



-

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} -$$

$$- a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}$$

Пример 2. Решить систему уравнений:

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_3 = 11 \\ x_1 + 5x_2 - 4x_3 = -10 \\ 4x_1 + x_2 - 3x_3 = 5. \end{cases}$$

$$D = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & 5 & -4 \\ 4 & 1 & -3 \end{vmatrix} = 2 \cdot 5 \cdot (-3)$$

$$x_1 = \frac{D_1}{D}, x_2 = \frac{D_2}{D}, \ldots, x_n = \frac{D_n}{D}$$

уравнений:

$$\begin{cases} x_1 + 5x_2 - 4x_3 = -10 \\ 4x_1 + x_2 - 3x_3 = 5. \end{cases}$$

$$D = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & 5 & -4 \\ 4 & 1 & -3 \end{vmatrix} = 2 \cdot 5 \cdot (-3) + 1 \cdot 1 \cdot 1$$

$$x_1 = \frac{D_1}{D}, x_2 = \frac{D_2}{D}, \ldots, x_n = \frac{D_n}{D}$$

$$D=\begin{vmatrix}2 & -3 & 1\\ 1 & 5 & -4\\ 4 & 1 & -3\end{vmatrix}=2\cdot5\cdot(-3)+1\cdot1\cdot1+(-3)\cdot(-4)\cdot4$$

$$x_1=\frac{D_1}{D},x_2=\frac{D_2}{D},\ldots,x_n=\frac{D_n}{D}$$

уравнений:

$$4x_1 + x_2 - 3x_3 = 5.$$

$$D = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & 5 & -4 \\ 4 & 1 & -3 \end{vmatrix} = 2\cdot5\cdot(-3) + 1\cdot1\cdot1 + (-3)\cdot(-4)\cdot4 -$$

$$-1\cdot5\cdot4$$

$$x_1 = \frac{D_1}{D}, x_2 = \frac{D_2}{D}, \ldots, x_n = \frac{D_n}{D}$$

уравнений:

$$\begin{cases} x_1 + 5x_2 - 4x_3 = -10 \\ 4x_1 + x_2 - 3x_3 = 5. \end{cases}$$

$$D = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & 5 & -4 \\ 4 & 1 & -3 \end{vmatrix} = 2 \cdot 5 \cdot (-3) + 1 \cdot 1 \cdot 1 + (-3) \cdot (-4) \cdot 4 -$$

$$-1 \cdot 5 \cdot 4 - (-3) \cdot 1 \cdot (-3)$$

$$x_1 = \frac{D_1}{D}, x_2 = \frac{D_2}{D}, \ldots, x_n = \frac{D_n}{D}$$

Самостоятельная работа 4

Задание. Определите последнюю «тройку» чисел

$$D=\begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & 5 & -4 \\ 4 & 1 & -3 \end{vmatrix}=2\cdot 5\cdot(-3)+1\cdot 1\cdot 1+(-3)\cdot(-4)\cdot 4-$$

$$-1\cdot 5\cdot 4-(-3)\cdot 1\cdot(-3)$$

Варианты **A. 1*1*1** **B. 1*5*4**

Пример 2. Решить систему уравнений:

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_3 = 11 \\ x_1 + 5x_2 - 4x_3 = -10 \\ 4x_1 + x_2 - 3x_3 = 5. \end{cases}$$

$$D = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & 5 & -4 \\ 4 & 1 & -3 \end{vmatrix} = 2\cdot 5\cdot(-3) + 1\cdot 1\cdot 1 + (-3)\cdot(-4)\cdot 4 -$$

$$-1\cdot 5\cdot 4 - (-3)\cdot 1\cdot(-3) - 1\cdot(-4)\cdot 2$$

$$x_1 = \frac{D_1}{}, x_2 = \frac{D_2}{}, \ldots, x_n = \frac{D_n}{}$$

уравнений:

$$\begin{cases} x_1 + 5x_2 - 4x_3 = -10 \\ 4x_1 + x_2 - 3x_3 = 5. \end{cases}$$

$$D = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & 5 & -4 \\ 4 & 1 & -3 \end{vmatrix} = 2\cdot 5\cdot(-3) + 1\cdot 1\cdot 1 + (-3)\cdot(-4)\cdot 4 -$$

$$-1\cdot 5\cdot 4 - (-3)\cdot 1\cdot(-3) - 1\cdot(-4)\cdot 2 =$$

$$= -30 + 1 + 48 - 20 - 9 + 8 = -2$$

$$x_1 = \frac{D_1}{D}, x_2 = \frac{D_2}{D}, \ldots, x_n = \frac{D_n}{D}$$

Пример 2. Решить систему уравнений:

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_3 = 11 \\ x_1 + 5x_2 - 4x_3 = -10 \\ 4x_1 + x_2 - 3x_3 = 5. \end{cases}$$

$$D = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & 5 & -4 \\ 4 & 1 & -3 \end{vmatrix} = 2\cdot 5\cdot(-3) + 1\cdot 1\cdot 1 + (-3)\cdot(-4)\cdot 4 -$$

$$-1\cdot 5\cdot 4 - (-3)\cdot 1\cdot(-3) - 1\cdot(-4)\cdot 2 =$$

$$= -30 + 1 + 48 - 20 - 9 + 8 = -2$$

Система определенная,

$$\begin{cases} x_1 + 5x_2 - 4x_3 = -10 \\ 4x_1 + x_2 - 3x_3 = 5. \end{cases}$$

$$D_1 = \begin{vmatrix} 11 & -3 & 1 \\ -10 & 5 & -4 \\ 5 & 1 & -3 \end{vmatrix} = 11 \cdot 5 \cdot (-3) + (-3) \cdot (-4) \cdot 5 + (-10) \cdot 1 \cdot 1 -$$

$$-1 \cdot 5 \cdot 5 - (-3) \cdot (-10) \cdot (-3) - 1 \cdot (-4) \cdot 11 =$$

$$= -165 + 60 - 10 - 25 + 90 - 44 = -6$$

<u>D = -2</u>

$$\begin{cases} \ldots \\ x_1 + 5x_2 - 4x_3 = -10 \\ 4x_1 + x_2 - 3x_3 = 5. \end{cases}$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} 2 & 11 & 1 \\ 1 & -10 & -4 \\ 4 & 5 & -3 \end{vmatrix} = 2\cdot(-10)\cdot(-3) + 11\cdot(-4)\cdot 4 + 1\cdot 5\cdot 1 -$$

$$-1\cdot(-10)\cdot 4 - 1\cdot 11\cdot(-3) - 5\cdot(-4)\cdot 2 =$$

$$= 60 - 176 + 5 + 40 + 33 + 40 = 2$$

<u>D = -2</u>

<u>D_1 = -6</u>

Самостоятельная работа 4

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_3 = 11 \\ x_1 + 5x_2 - 4x_3 = -10 \\ 4x_1 + x_2 - 3x_3 = 5. \end{cases}$$

Задание.

Найдите верно записанный определитель D_3

$a)$. $D_3 = \begin{vmatrix} 2 & 11 & 1 \\ 1 & -10 & -4 \\ 4 & 5 & -3 \end{vmatrix}$

$b)$. $D_3 = \begin{vmatrix} 11 & -3 & 1 \\ -10 & 5 & -4 \\ 5 & 1 & -3 \end{vmatrix}$

$c)$. $D_3 = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & 5 & -4 \\ 4 & 1 & -3 \end{vmatrix}$

$d)$. $D_3 = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 11 \\ 1 & 5 & -10 \\ 4 & 1 & 5 \end{vmatrix}$

$$\begin{cases} x_1 + 5x_2 - 4x_3 = -10 \\ 4x_1 + x_2 - 3x_3 = 5. \end{cases}$$

$$D_3 = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 11 \\ 1 & 5 & -10 \\ 4 & 1 & 5 \end{vmatrix} = 2\cdot 5\cdot 5 + 1\cdot 1\cdot 11 + (-3)\cdot(-10)\cdot 4 -$$

$$-11\cdot 5\cdot 4 - 1\cdot 5\cdot(-3) - 1\cdot(-10)\cdot 2 =$$

$$= 50 + 11 + 120 - 220 + 15 + 20 = -4$$

<u>$D = -2$</u> <u>$D_1 = -6$</u> <u>$D_2 = 2$</u>

$$x_1 = \frac{D_1}{D} = \frac{-6}{-2} = 3$$

$$x_2 = \frac{D_2}{D} = \frac{2}{-2} = -1$$

<u>D = -2</u>

<u>D_1 = -6</u>

<u>D_2 = 2</u>

<u>D_3 = -4</u>

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_3 = 11 \\ x_1 + 5x_2 - 4x_3 = -10 \\ 4x_1 + x_2 - 3x_3 = 5 \end{cases}$$

Самостоятельная работа

Задание. Определите значение переменной x_3

$$x_1 = \frac{D_1}{D} = \frac{-6}{-2} = 3$$

$D = -2$ $D_1 = -6$

$$x_2 = \frac{D_2}{D} = \frac{2}{-2} = -1$$

$D_2 = 2$ $D_3 = -4$

$$x_1 = \frac{D_1}{D} = \frac{-6}{-2} = 3$$

$$x_2 = \frac{D_2}{D} = \frac{2}{-2} = -1$$

$$x_3 = \frac{D_3}{D} = \frac{-4}{-2} = 2.$$

D = -2

D_1 = -6

D_2 = 2

D_3 = -4

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_3 = 11 \\ x_1 + 5x_2 - 4x_3 = -10 \\ 4x_1 + x_2 - 3x_3 = 5. \end{cases}$$

Проверка

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_3 \\ x_1 + 5x_2 - 4x_3 \\ 4x_1 + x_2 - 3x_3 \end{cases} = \begin{cases} 2\cdot 3 - 3\cdot(-1) + 2 = 11 \\ 3 + 5\cdot(-1) - 4\cdot 2 = -10 \\ 4\cdot 3 + (-1) - 3\cdot 2 = 5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_3 = 11 \\ x_1 + 5x_2 - 4x_3 = -10 \\ 4x_1 + x_2 - 3x_3 = 5 \end{cases}$$

$X_1 = 3$ $X_2 = -1$ $X_3 = 2$

1.5. Матричный метод решения систем линейных уравнений (СЛУ)

Решаем систему уравнений:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3. \end{cases} \qquad (4)$$

1.5. Матричный метод решения систем линейных уравнений (СЛУ)

Решаем систему уравнений:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 . \end{cases} \qquad (4)$$

Представим ее в виде:

$$\begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} \qquad (5)$$

Введем обозначения матриц, состоящих из коэффициентов и переменных:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}.$$

состоящих из коэффициентов и переменных:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}.$$

Тогда систему (5) можно записать в матричном виде:

$$AX = B \quad (6)$$

$$\begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \quad (5)$$

Решаем систему (6): $AX = B$ (6)

Домножим обе части (6) на A^{-1}:

$$A^{-1}AX = A^{-1}B,$$

Решаем систему (6): $AX = B$ (6)

Домножим обе части (6) на A^{-1}:

$$A^{-1}AX = A^{-1}B,$$

Но по определению обратной матрицы

$$A^{-1}A = E$$

Решаем систему (6): $AX = B$ (6)

Домножим обе части (6) на A^{-1}:

$$A^{-1}AX = A^{-1}B,$$

Но по определению обратной матрицы

$$A^{-1}A = E$$

А при умножении матрицы на единичную получаем основную матрицу: $EX = X,$

Решаем систему (6): $AX = B$ (6)

Домножим обе части (6) на A^{-1}:

$$A^{-1}AX = A^{-1}B,$$

Но по определению обратной матрицы

$$A^{-1}A = E$$

А при умножении матрицы на единичную получаем основную матрицу: $EX = X,$

Значит, матричное решение системы уравнений:

$$X = A^{-1}B. \quad (7)$$

уравнений матричным методом

$$\begin{cases} 9x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 15 \\ 5x_1 + x_2 + 3x_3 = 14 \end{cases}$$

Решение

$$AX = B, \Rightarrow X = A^{-1}B.$$

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 2 & 3 \\ 9 & 3 & 4 \\ 5 & 1 & 3 \end{pmatrix}; \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 13 \\ 15 \\ 14 \end{pmatrix}.$$

уравнений матричным методом

$$\begin{cases} 9x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 15 \\ 5x_1 + x_2 + 3x_3 = 14 \end{cases}$$

Решение

$$AX = B, \Rightarrow X = A^{-1}B.$$

$$A^{-1} = \frac{1}{D}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix} \leftarrow$$

Матрица алгебраических дополнений для **транспонированной** матрицы А

$$D(A)=\begin{vmatrix}7 & 2 & 3\\ 9 & 3 & 4\\ 5 & 1 & 3\end{vmatrix}=63+40+27-45-28-54=3$$

$$A^{-1}=\frac{1}{D}\begin{pmatrix}A_{11} & A_{21} & A_{31}\\ A_{12} & A_{22} & A_{32}\\ A_{13} & A_{23} & A_{33}\end{pmatrix}$$

$$\begin{cases}7x_1+2x_2+3x_3=13\\ 9x_1+3x_2+4x_3=15\\ 5x_1+x_2+3x_3=14\end{cases}$$

$$\begin{cases} 9x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 15 \\ 5x_1 + x_2 + 3x_3 = 14 \end{cases}$$

Алгебраическое дополнение элемента $\mathbf{a}_{ik}$:

$$A_{ik} = (-1)^{i+k} M_{ik}$$

Здесь M_{ik} - минор элемента a_{ik} - определитель, полученный из D(A) вычеркиванием строки I и столбца k:

$$A^{-1} = \frac{1}{D}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}$$

$$D = 3$$

Вычисляем алгебраические дополнения для **первой строки**

Первый столбец: i=1; k=1

$$A_{11} = (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 9 - 4 = 5$$

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 2 & 3 \\ 9 & 3 & 4 \\ 5 & 1 & 3 \end{pmatrix};$$

D(A) = 3

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 2 & 3 \\ 9 & 3 & 4 \\ \dots \end{pmatrix};$$

$$\begin{cases} 7x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 13 \\ 9x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 15 \\ \dots \end{cases}$$

Первый столбец: **i=1; k=1**

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 9 - 4 = 5 \qquad A = \begin{pmatrix} 7 & 2 & 3 \\ 9 & 3 & 4 \\ 5 & 1 & 3 \end{pmatrix};$$

Второй столбец: **i=1; k=2**

$$A_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 9 & 4 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} = -(27 - 20) = -7 \qquad A = \begin{pmatrix} 7 & 2 & 3 \\ 9 & 3 & 4 \\ 5 & 1 & 3 \end{pmatrix};$$

D(A) = 3

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 2 & 3 \\ 9 & 3 & 4 \\ 5 & 1 & 3 \end{pmatrix};$$

$$\begin{cases} 7x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 13 \\ 9x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 15 \\ 5x_1 + x_2 + 3x_3 = 14 \end{cases}$$

Вычисляем алгебраические дополнения для **первой строки**

Третий столбец: i=1; k=3

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 2 & 3 \\ 9 & 3 & 4 \\ 5 & 1 & 3 \end{pmatrix};$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 9 & 3 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} = 9 - 15 = -6$$

D(A) = 3

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 2 & 3 \\ 9 & 3 & 4 \end{pmatrix};$$

A = 5

A = -7

Вычисляем алгебраические дополнения для **второй строки**

Первый столбец: i=2; k=1

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 2 & 3 \\ 9 & 3 & 4 \\ 5 & 1 & 3 \end{pmatrix};$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = -(6-3) = -3$$

D(A) = 3

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 2 & 3 \\ 9 & 3 & 4 \\ \end{pmatrix};$$

$A_{11} = 5$

$A_{12} = -7$

Вычисляем алгебраические дополнения для **второй строки**

Первый столбец: i=2; k=1

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 2 & 3 \\ 9 & 3 & 4 \\ 5 & 1 & 3 \end{pmatrix};$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = -(6-3) = -3$$

Второй столбец: i=2; k=2

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 2 & 3 \\ 9 & 3 & 4 \\ 5 & 1 & 3 \end{pmatrix};$$

$$A_{22} = (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 7 & 3 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} = 21 - 15 = 6$$

D(A) = 3

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 2 & 3 \\ 9 & 3 & 4 \end{pmatrix};$$

$A_{11} = 5$

$A_{12} = -7$

Третий столбец: i=2; k=3

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 2 & 3 \\ 9 & 3 & 4 \\ 5 & 1 & 3 \end{pmatrix};$$

$$A_{23} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 7 & 2 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} = -(7-10) = 3$$

$A_{11} = 5$

$A_{12} = -7$

$A_{13} = -6$

$D(A) = 3$

$A_{21} = -3$

$A_{22} = 6$

Вычисляем алгебраические дополнения для третьей строки

Первый столбец: i=3; k=1

$$A_{31} = (-1)^{3+1}\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 8 - 9 = -1 \qquad A = \begin{pmatrix} 7 & 2 & 3 \\ 9 & 3 & 4 \\ 5 & 1 & 3 \end{pmatrix};$$

D(A) = 3

A_{11} = 5 | A_{12} = -7 | A_{13} = -6

A = -3 | A = 6 | A = 3

Вычисляем алгебраические дополнения для **третьей строки**

Первый столбец: i=3; k=1

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 2 & 3 \\ 9 & 3 & 4 \\ 5 & 1 & 3 \end{pmatrix};$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 8 - 9 = -1$$

Второй столбец: i=3; k=2

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 2 & 3 \\ 9 & 3 & 4 \\ 5 & 1 & 3 \end{pmatrix};$$

$$A_{32} = (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 7 & 3 \\ 9 & 4 \end{vmatrix} = -(28 - 27) = -1$$

$A_{11} = 5$

$A_{12} = -7$

$A_{13} = -6$

$D(A) = 3$

Самостоятельная работа

Найдите алгебраическое дополнение A_{33}

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 2 & 3 \\ 9 & 3 & 4 \\ 5 & 1 & 3 \end{pmatrix};$$

$\underline{A_{11} = 5}$ $\underline{A_{12} = -7}$ $\underline{A_{13} = -6}$

$\underline{A_{21} = -3}$ $\underline{A_{22} = 6}$ $\underline{A_{23} = 3}$

$\underline{D(A) = 3}$

Третий столбец: i=3; k=3

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 2 & 3 \\ 9 & 3 & 4 \\ 5 & 1 & 3 \end{pmatrix};$$

$$A_{33} = (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 7 & 2 \\ 9 & 3 \end{vmatrix} = 21 - 18 = 3$$

$A_{11} = 5$ | $A_{12} = -7$ | $A_{13} = -6$

$A_{21} = -3$ | $A_{22} = 6$ | $A_{23} = 3$

$A_{31} = -1$ | $A_{32} = -1$

D(A) = 3

Составляем обратную матрицу. Алгебраические дополнения берем для транспонированной матрицы

$$A^{-1} = \frac{1}{D}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 5 & -3 & -1 \\ -7 & 6 & -1 \\ -6 & 3 & 3 \end{pmatrix}.$$

$\underline{A_{11} = 5}$ $\underline{A_{12} = -7}$ $\underline{A_{13} = -6}$

$\underline{A_{21} = -3}$ $\underline{A_{22} = 6}$ $\underline{A_{23} = 3}$

D(A) = 3

Находим решение системы уравнений:

$$X = A^{-1}B = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 5 & -3 & -1 \\ -7 & 6 & -1 \\ -6 & 3 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 13 \\ 15 \\ 14 \end{pmatrix} =$$

$$A^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 5 & -3 & -1 \\ -7 & 6 & -1 \\ \end{pmatrix}.$$

$$\begin{cases} 7x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 13 \\ 9x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 15 \end{cases} \Rightarrow B = \begin{pmatrix} 13 \\ 15 \\ \end{pmatrix}$$

$$X=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}5 & -3 & -1\\ -7 & 6 & -1\\ -6 & 3 & 3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}13\\ 15\\ 14\end{pmatrix}=$$

$$=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}5\cdot 13+(-3)\cdot 15+(-1)\cdot 14\\ (-7)\cdot 13+6\cdot 15+(-1)\cdot 14\\ (-6)\cdot 13+3\cdot 15+3\cdot 14\end{pmatrix}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}6\\ -15\\ 9\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\ -5\\ 3\end{pmatrix}$$

Решение системы уравнений:

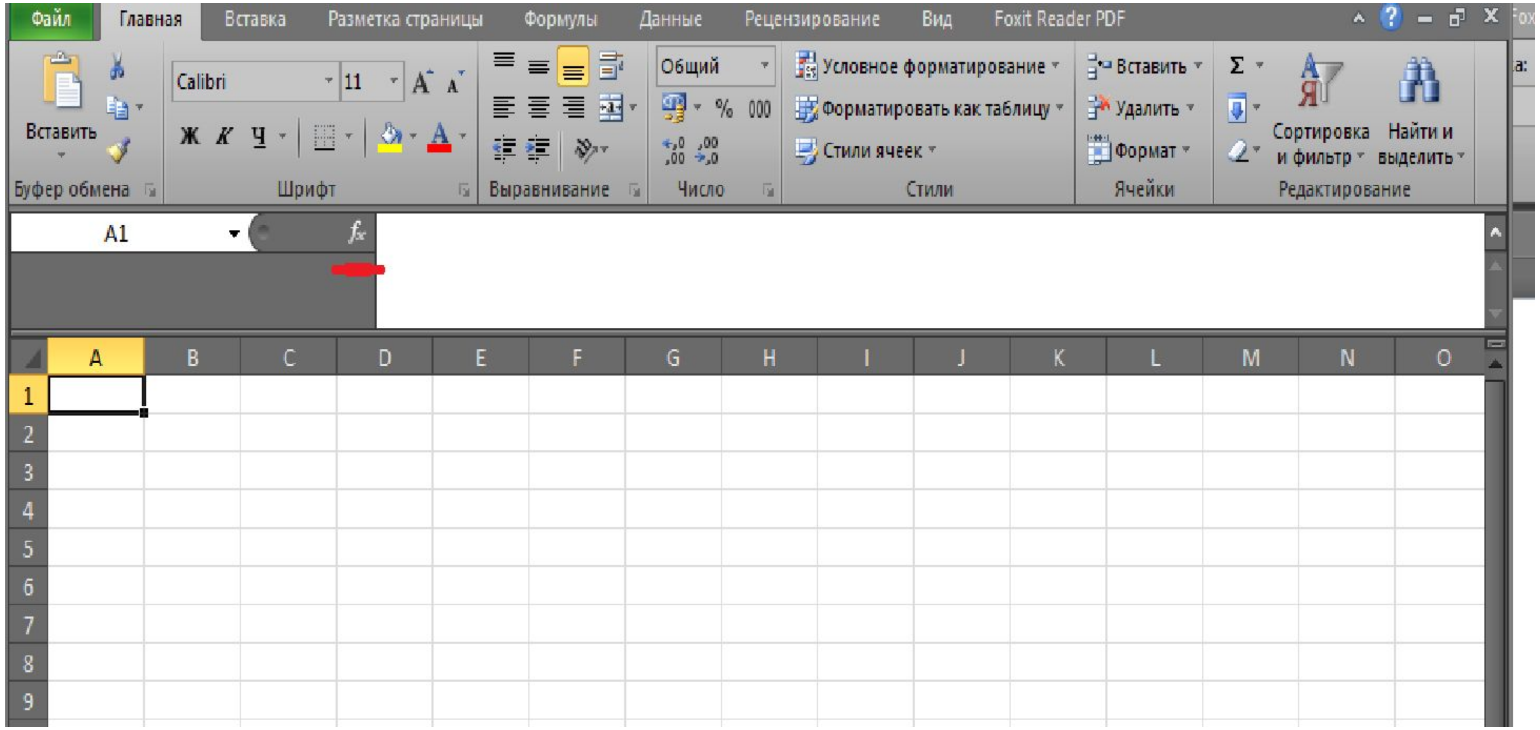
$$\boxed{x_1=2;\quad x_2=-5;\quad x_3=3.}$$

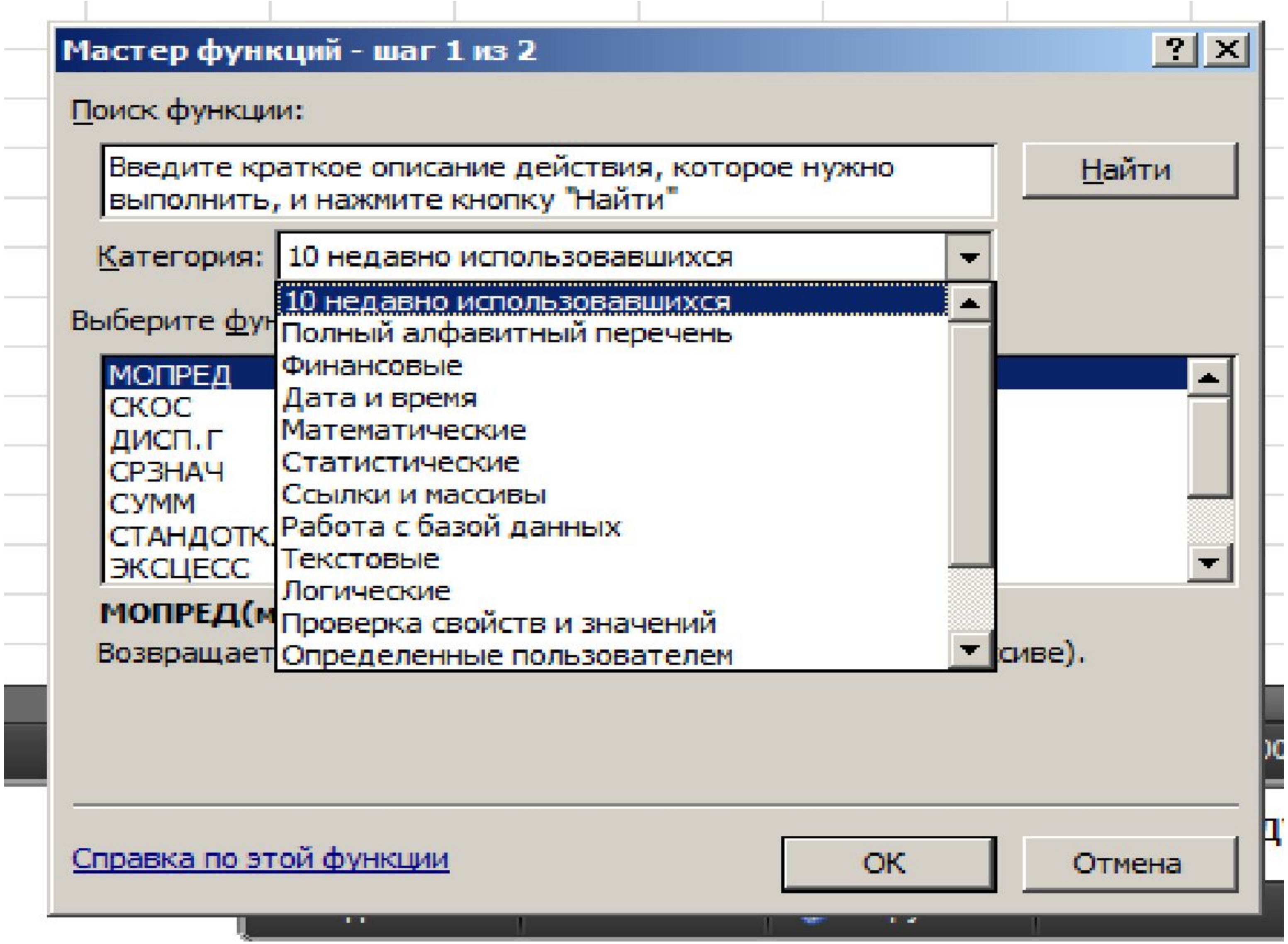
Проверка

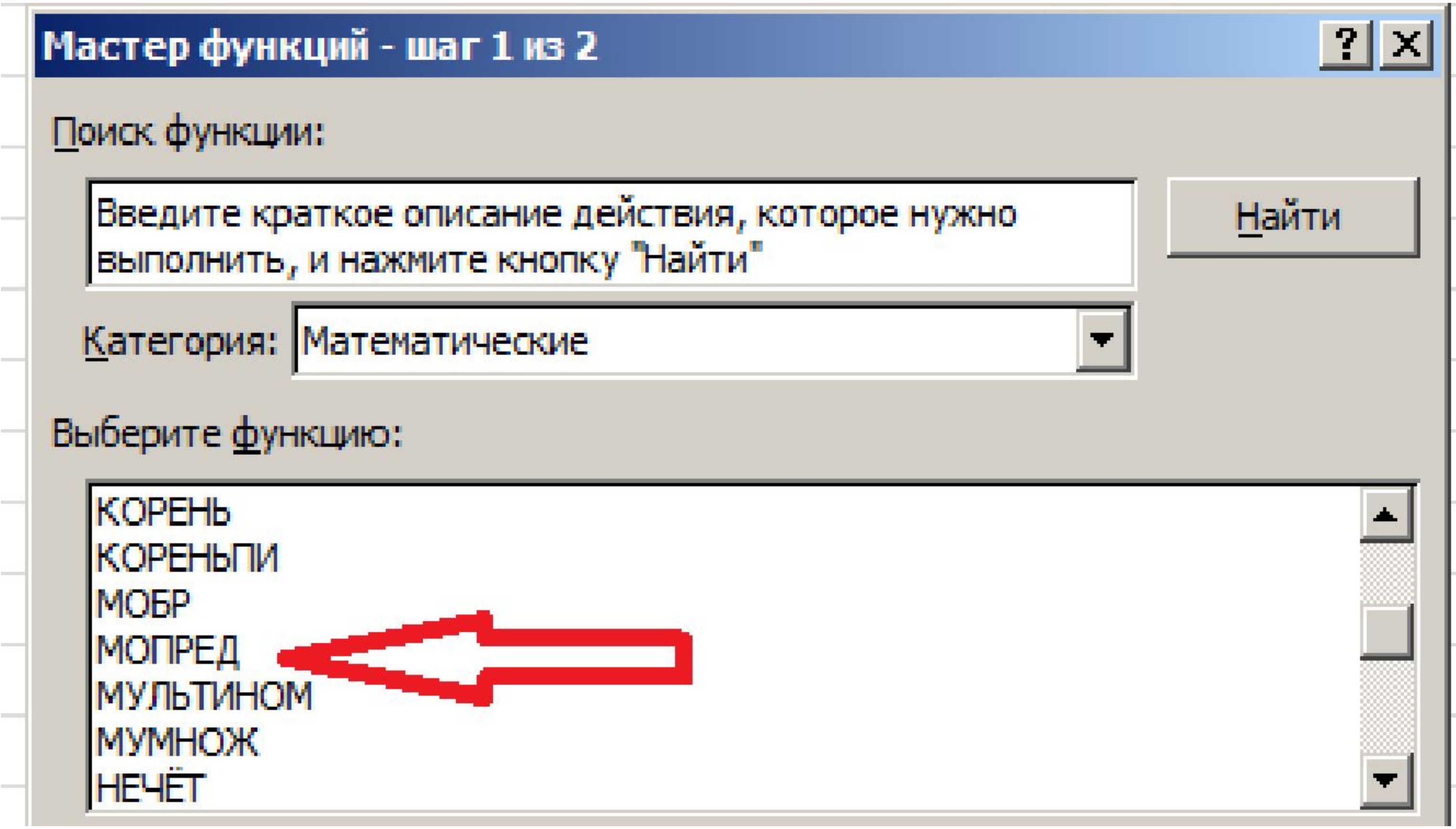
$$\begin{cases} 7x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 7\cdot 2 + 2\cdot(-5) + 3\cdot 3 = 13 \\ 9x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 9\cdot 2 + 3\cdot(-5) + 4\cdot 3 = 15 \\ 5x_1 + x_2 + 3x_3 = 5\cdot 2 + (-5) + 3\cdot 3 = 14 \end{cases}$$

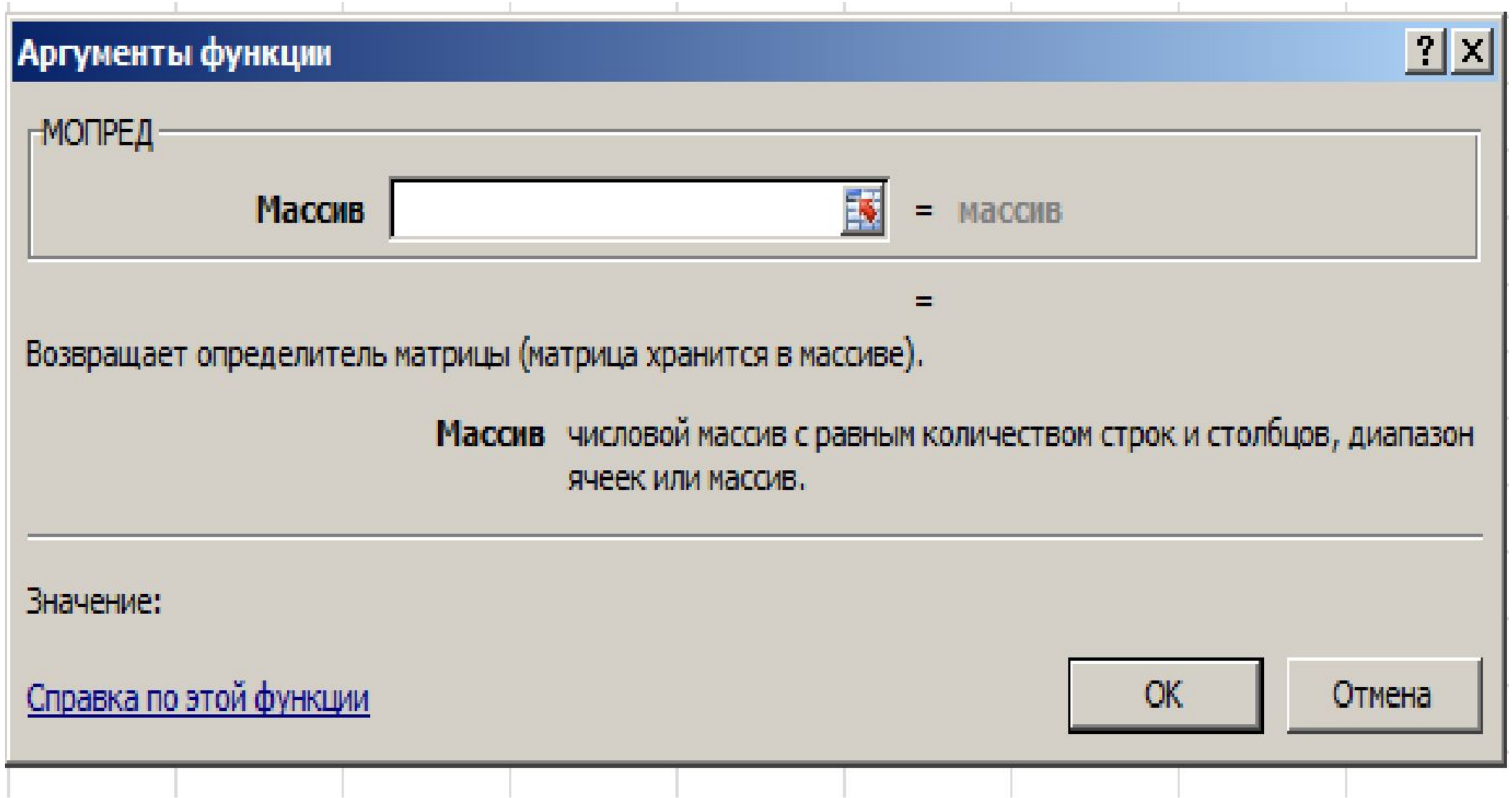
$$\begin{cases} 7x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 13 \\ 9x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 15 \\ 5x_1 + x_2 + 3x_3 = 14 \end{cases}$$

$$\boxed{x_1 = 2; \quad x_2 = -5; \quad x_3 = 3.}$$


Файл
Главная
Вставка
Разметка страницы
Формулы
Данные
Рецензирование
Вид
Foxit Reader PDF
Вставить
Calibri
11
Ж К Ч
Общий
Условное форматирование
Форматировать как таблицу
Стили ячеек
Вставить
Удалить
Формат
Сортировка и фильтр
Найти и выделить
Буфер обмена
Шрифт
Выравнивание
Число
Стили
Ячейки
Редактирование
A1
A B C D E F G H I J K L M N O
1
2
3
4
5
6
7
8
9


Мастер функций - шаг 1 из 2
Поиск функции:
Введите краткое описание действия, которое нужно выполнить, и нажмите кнопку "Найти"
Найти
Категория:
10 недавно использовавшихся
Выберите фун
МОПРЕД
СКОС
ДИСП.Г
СРЗНАЧ
СУММ
СТАНДОТК
ЭКСЦЕСС
10 недавно использовавшихся
Полный алфавитный перечень
Финансовые
Дата и время
Математические
Статистические
Ссылки и массивы
Работа с базой данных
Текстовые
Логические
Проверка свойств и значений
Определенные пользователем
МОПРЕД(м
Возвращает
сиве).
Справка по этой функции
ОК
Отмена


Мастер функций - шаг 1 из 2
Поиск функции:
Введите краткое описание действия, которое нужно выполнить, и нажмите кнопку "Найти"
Найти
Категория:
Математические
Выберите функцию:
КОРЕНЬ
КОРЕНЬПИ
МОБР
МОПРЕД
МУЛЬТИНОМ
МУМНОЖ
НЕЧЁТ


Аргументы функции
МОПРЕД
Массив
= массив
=
Возвращает определитель матрицы (матрица хранится в массиве).
Массив числовой массив с равным количеством строк и столбцов, диапазон ячеек или массив.
Значение:
Справка по этой функции
ОК
Отмена