И.П. Симаков

Презентация лекции
на тему:

Алгоритмическое и программное обеспечение для решения задач обработки статистической информации о наработках и отказах объектов при эксплуатации

ЦЕЛИ И ЗАДАЧИ РАБОТЫ

Цель работы - развитие вычислительных процедур и алгоритмов и разработка программного обеспечения статистической обработки информации, получаемой из сферы эксплуатации, для решения задач объективной оценки характеристик и показателей надежности оборудования с использованием методов моментов и максимального правдоподобия для полных и цензурированных выборок без обращения к огромному числу таблиц.

Задачи работы:

1. Анализ и практическое освоение известных классических методов и алгоритмов обработки статистических данных для информационно-аналитических систем различного назначения.
2. Разработка эффективных алгоритмов и программ реализации методов моментов и максимального правдоподобия для обработки статистической информации по полным и цензурированным выборкам.
3. Отработка алгоритмов и программ статистической проверки гипотез о теоретическом законе распределения с применением критерия согласия А. Н. Колмогорова и системы неравенств, устанавливающих принадлежность функции распределения к классу функций с возрастающей интенсивностью «опасности» (или интенсивностью отказов для технических систем).
4. Решение конкретных задач обработки экспериментальных (наблюдаемых) данных с «распознаванием» теоретической функции распределения и оценкой ее параметров.

Расчет оценок начальных и центральных моментов

по выборке независимых наблюдений $t_1, \ldots, t_N$ над случайной величиной

1. **Оценки первых четырех начальных выборочных моментов**

$$\hat{m}_k = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} t_i^k \qquad k = 1,2,3,4,\ldots$$

2. **Оценки первых четырех центральных моментов** $\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4$
по известным связующим соотношениям между ними

$\hat{\mu}_1 \equiv \hat{\bar{T}} = \hat{m}_1$ - математическое ожидание случайной величины

$\hat{\mu}_2 = \hat{m}_2 - \hat{m}_1^2$ - дисперсия

$\hat{\mu}_3 = \hat{m}_3 - 3\hat{m}_1\hat{m}_2 + 2\hat{m}_1^3$ - характеристика асимметрии распределения

$\hat{\mu}_4 = \hat{m}_4 - 4\hat{m}_1\hat{m}_3 + 6\hat{m}_1^2\hat{m}_2 - 3\hat{m}_1^4$ - характеристика островершинности

3. **Оценки центральных моментов по выборке**

$$\hat{\mu}_2 = \hat{D} = \frac{1}{N}\sum_i (t_i - \hat{\bar{T}})^2; \quad \hat{\mu}_3 = \frac{1}{N}\sum_i (t_i - \hat{\bar{T}})^3; \quad \hat{\mu}_4 = \frac{1}{N}\sum_i (t_i - \hat{\bar{T}})^4; \quad S\hat{k} = \frac{\hat{\mu}_3}{\hat{\sigma}^3}; \quad E\hat{x} = \frac{\hat{\mu}_4}{\hat{\sigma}^4} - 3.$$

4. **Расчет несмещенных центральных моментов**

$$\hat{\bar{T}} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} t_i; \quad \hat{\mu}_{2H} = \frac{1}{N-1}\sum_{i=1}^{N} (t_i - \hat{\bar{T}})^2; \quad \hat{\sigma}_H = \sqrt{\hat{\mu}_{2H}}$$

$$\hat{\mu}_{3H} = \frac{N^2}{(N-1)(N-2)}\hat{\mu}_3; \quad \hat{\mu}_{4H} = \frac{N(N^2-2N+3)\hat{\mu}_4 - 3N(2N-3)\hat{\mu}_2^2}{(N-1)(N-2)(N-3)}; \quad S\hat{k}_H = \frac{\sqrt{N(N-1)}}{N-2} S\hat{k}; \quad E\hat{x}_H = \frac{N-1}{(N-2)(N-3)}\left[(N+1)E\hat{x} + 6\right].$$

Эмпирическая (выборочная) функция распределения

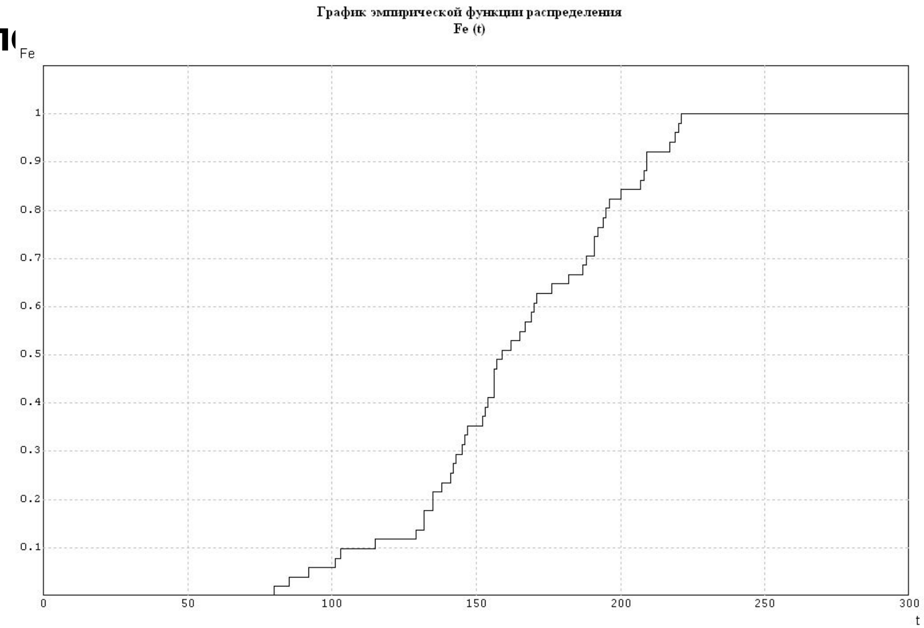
1. **Выборка независимых наблюдений** $t_1, \ldots, t_N$ над случайной ξ величиной

2. **Вариационный ряд** $t_1^* \le t_2^* \le \ldots \le t_N^*$

3. **Эмпирическая функция распредел**

$F_N(t)$

$$F_N(t) = \begin{cases} 0, t \le t_1^* \\ \dfrac{k}{N}, t_k < t \le t_{k+1}^*; \\ 1, x > x_N^* \end{cases}$$



4. **Выборочные несмещенные центральные моменты**

$$\hat{\hat{T}} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} t_i; \quad \hat{\mu}_{2H} \equiv \hat{D} = \frac{1}{N-1}\sum_{i=1}^{N}(t_i - \hat{\hat{T}})^2; \quad \hat{\sigma}_H = \sqrt{\hat{\mu}_{2H}}$$

$$\hat{\mu}_{3H} = \frac{N^2}{(N-1)(N-2)}\hat{\mu}_3; \quad \hat{\mu}_{4H} = \frac{N(N^2-2N+3)\hat{\mu}_4 - 3N(2N-3)\hat{\mu}_2^2}{(N-1)(N-2)(N-3)}; \quad S\hat{k}_H = \frac{\sqrt{N(N-1)}}{N-2}S\hat{k}; \quad E\hat{x}_H = \frac{N-1}{(N-2)(N-3)}\left[(N+1)E\hat{x} + 6\right].$$

На основе полученных численных значений оценок центральных моментов могут выдвигаться гипотезы о предполагаемых теоретических законах распределения.

Метод моментов

для точечной оценки неизвестных параметров заданного распределения

Метод моментов предложен в 1894 г.. **Карлом Пирсоном** (1857 – 1936) - английский математик-статистик, биолог, философ, основоположник знаменитого журнала «Биометрика».

Идея метода проста - приравнивание теоретических моментов соответствующим эмпирическим моментам того же порядка. Если распределение определяется двумя параметрами, то приравнивают два теоретических момента двум соответствующим эмпирическим моментам того же порядка. Заметим – метод не использует информацию о третьем и четвертом выборочных моментах.

Метод моментов

для точечной оценки неизвестных параметров заданного распределения

1. Для нахождения двух неизвестных параметров *a* и *b* распределения **Вейбулла**

$$F(t) = 1 - \exp\left(-\left(\frac{t}{b}\right)^{a} \right), \quad f(t) = \frac{a}{b}\left(\frac{t}{b}\right)^{a-1} \cdot \exp\left(-\left(\frac{t}{b}\right)^{a} \right), \quad \lambda(t) = \frac{a}{b} \cdot \left(\frac{t}{b}\right)^{a-1},$$

достаточно использовать два первых соотношения:

$$T = b \cdot \Gamma(1 + \tfrac{1}{a}), \quad D = b^2 \cdot \left\{ \Gamma(1 + \tfrac{2}{a}) - \left[\Gamma(1 + \tfrac{1}{a}) \right]^2 \right\},$$

заменив теоретические значения моментов их выборочным несмещенным оценкам.

Выражая *b* из соотношения для первого момента и подставляя во второе соотношение, получаем сложное алгебраическое уравнение для нахождения параметра *a*

$$\tilde{D} = ((\tilde{T}) / \Gamma(1 + \frac{1}{a}))^2 \cdot \left\{ \Gamma\left(1 + \frac{2}{a}\right) - \left[\Gamma\left(1 + \frac{1}{a}\right) \right]^2 \right\},$$

где $\Gamma(x)$ — гамма-функция или Эйлеров интеграл второго рода

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} t^{x-1} \cdot e^{-t} \cdot dt,$$

численные значения которого заданы **табличнo в интервале** $1 \le x \le 2$.

Значком «тильдой» означают выборочные моменты.

Метод моментов

для точечной оценки неизвестных параметров заданного распределения

2. Для нахождения двух неизвестных параметров λ a и **Гамма** - распределения с плотностью вероятности наработки до отказа

$$f(t) = \frac{\lambda^a}{\Gamma(a)} \cdot t^{a-1} \cdot e^{-\lambda t}; \quad t > 0,$$

где λ — параметр масштаба ($\lambda > 0$), a — параметр формы ($a > 0$),

$\Gamma(a)$ — Эйлеров интеграл второго рода $\Gamma(a) = \int_0^\infty t^{a-1} \cdot e^{-t} \cdot dt$

решение задачи таково $a = \dfrac{\overline{T}^2}{D}, \quad \lambda = \dfrac{\overline{T}}{D},$

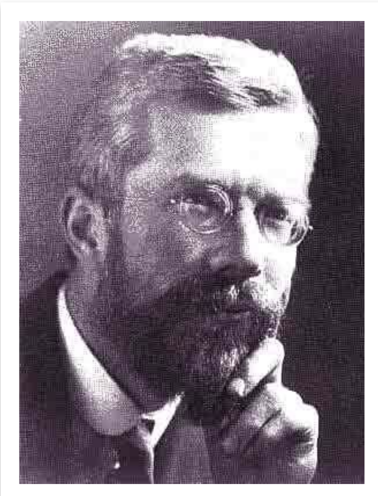
где в правые части подставляются соответственно выборочные оценки математического ожидания и дисперсии

$$\hat{\overline{T}} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} t_i; \quad \hat{D} = \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^{N} (t_i - \hat{\overline{T}})^2.$$

(Заметим – метод не использует информацию о третьем и четвертом выборочных моментах)

Метод максимального правдоподобия

для точечной оценки неизвестных параметров заданного распределения



Предложен в 1912 г. Рональдом Айлмер Фишером (1890 -1962) - английский генетик, математик-статистик внес огромный вклад в теорию вероятностей и математическую статистику, является родоначальником дисперсионного анализа и вместе с К. Пирсоном заложил основы теории проверки статистических гипотез.

Идея метода такова.

1. Получена из генеральной совокупности полная выборка $\{t_1, t_2, ..., t_N\}$ - совокупность возможных значений независимых, одинаково распределенных случайных величин.

2. Принимается гипотеза о виде функции распределения или плотности вероятности $f(t;a,b)$, где *a* и *b* - параметры, подлежащие определению.

3. Вероятность получения выборки $\{t_1, t_2, ..., t_N\}$ равна $f(t_1;a,b)\cdot f(t_2;a,b)\dots f(t_N;a,b)dt_1dt_2\dots dt_N$,

4. Вводится функция правдоподобия

$$L(t_1,...,t_N;a,b)=\prod_{i=1}^{N} f(t_i;a,b)$$

которая должна быть максимизирована по параметрам (a,b).

Удобно использовать функцию $\ln L(t_1,...,t_N;\theta)$, имеющую максимум в той же точке, что и $L(t_1,...,t_N;a,b)$.

Необходимые условия оптимальности имеют вид:

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial a}(\ln L(t_1,...,t_N;\theta))=0\\ \frac{\partial}{\partial a}(\ln L(t_1,...,t_N;\theta))=0\end{aligned}\right\}$$

Решение системы алгебраических уравнений дает оптимальные $(\hat{a},\hat{b})$.

При выполнении достаточно общих условий эти оценки являются состоятельными и асимптотически эффективными.

В общем случае оценки $(\hat{a},b)$ являются смещенными (см. на с. 544 в кн. Крамер Г. «Математические методы статистики». – М.: Мир, 1975. – 648 с.).

Метод максимального правдоподобия

для точечной оценки неизвестных параметров заданного распределения

1. Для **экспоненциального** распределения с плотностью вероятности $f(t,\lambda) = \lambda e^{-\lambda t}$

функция правдоподобия имеет вид $L(t_1,...,t_N;\lambda) = \lambda^N e^{-\lambda\sum_{i=1}^{N} t_i}$ или $\ln L(t_1,...,t_N;\lambda) = N\ln\lambda - \lambda\sum_{i=1}^{N} t_i$.

Необходимое условие экстремума при этом имеет вид $\dfrac{\partial \ln L(t_1,...,t_N;\lambda)}{\partial\lambda} = \dfrac{N}{\lambda} - \sum_{i=1}^{N} t_i = 0,$

из которого находим решение $\hat{\lambda} = \dfrac{1}{\dfrac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} t_i} = \dfrac{1}{\hat{\overline{T}}}.$

2. Для **нормального** распределения с плотностью $f(t,\overline{T},\sigma) = \dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{t-\overline{T}}{\sigma}\right)^2}$

функция правдоподобия $L(t_1,...,t_N;\overline{T},\sigma) = \left(\dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\right)^N e^{-\frac{1}{2}\cdot\frac{\sum_{i=1}^{N}(t_i-\overline{T})^2}{\sigma^2}}$ или

$$\ln L(t_1,...,t_N;\overline{T},\sigma) = -N\ln\sigma + \ln\left(\frac{1}{\left(\sqrt{2\pi}\right)^N}\right) - \frac{1}{2}\cdot\frac{\sum_{i=1}^{N}\left(t_i-\overline{T}\right)^2}{\sigma^2}.$$

Необходимые условия экстремума

$$\frac{\partial\ln(L(t_1,...,t_N;\overline{T},\sigma))}{\partial\overline{T}} \equiv \frac{\sum_{i=1}^{N} t_i - N\overline{T}}{\sigma^2} = 0, \quad \frac{\partial\ln(L(t_1,...,t_N;\overline{T},\sigma))}{\partial\sigma} \equiv -\frac{1}{2}\cdot\frac{N}{\sigma^2} + \frac{\sum_{i=1}^{N}\left(t_i-\overline{T}\right)^2}{2\sigma^4} = 0$$

Решение этой системы алгебраической уравнений

$$\hat{\overline{T}} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} t_i \quad \text{и} \quad \hat{\sigma}^2 = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left(t_i - \hat{\overline{T}}\right)^2.$$

Метод максимального правдоподобия

для точечной оценки неизвестных параметров заданного распределения

Для **Гамма** – распределения с плотностью вероятности

$$f(t;\lambda) = \frac{\lambda \cdot (\lambda t)^{a-1}}{\Gamma(a)} \cdot e^{-\lambda t}; (t \ge 0; a > 0, \lambda > 0)$$

Функция правдоподобия $L(t_1,...,t_N;\lambda,a) = \left(\frac{\lambda}{\Gamma(a)}\right)^N \cdot \prod_{i=1}^{N} \left[(\lambda t_i)^{a-1} \cdot e^{-\lambda t_i}\right]$, или эквивалентная ей

$$\ln(L(t_1,...,t_N;\lambda,a)) = N \cdot a \cdot \ln(\lambda) - N \cdot \ln(\Gamma(a)) + (a-1) \cdot \sum_{i=1}^{N} \ln(t_i) - \lambda \sum_{i=1}^{N} t_i .$$

Необходимое условие экстремума:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \ln(L(t_1,...,t_N;\lambda,a))}{\partial \lambda} = 0 \\ \dfrac{\partial \ln(L(t_1,...,t_N;\lambda,a))}{\partial a} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} N \cdot \dfrac{a}{\lambda} - \sum_{i=1}^{N} t_i = 0, \\ N \cdot \ln(\lambda) + \sum_{i=1}^{N} \ln(t_i) - N \cdot \dfrac{\frac{d\Gamma(a)}{d(a)}}{\Gamma(a)} \equiv 0 \end{cases}.$$

Из первого уравнения следует $\lambda = \dfrac{a}{\frac{1}{N} \cdot \sum_{i=1}^{N} t_i} \equiv \dfrac{a}{\hat{T}}$. После подстановки во второе уравнение получим уравнение для получения оценки параметра a:

$$\frac{1}{N} \cdot \sum_{i=1}^{N} \ln(\frac{t_i}{\hat{T}}) = \frac{d(\ln(\Gamma(a))}{da} - \ln(a) \equiv G(a).$$

Или в развернутом виде:

$$\frac{1}{N} \cdot \sum_{i=1}^{N} \ln(\frac{t_i}{\hat{T}}) = \frac{\frac{d\Gamma(a)}{da}}{\Gamma(a)} - \ln(a) \equiv G(a).$$

Получив оценку параметра $\hat{a}$, вычисляем и оценку параметра $\hat{\lambda}$ по формуле $\hat{\lambda} = \dfrac{\hat{a}}{\hat{T}}$.

Метод максимального правдоподобия

для точечной оценки неизвестных параметров заданного распределения

Для распределения **Вейбулла** с неизвестных параметров *a* и *b* для **полной выборки**

$$F(t)=1-\exp\left(-\left(\frac{t}{b}\right)^{a}\right),\quad f(t)=\frac{a}{b}\left(\frac{t}{b}\right)^{a-1}\cdot\exp\left(-\left(\frac{t}{b}\right)^{a}\right),\quad \lambda(t)=\frac{a}{b}\cdot\left(\frac{t}{b}\right)^{a-1},$$

Функция правдоподобия $L(t_1,...,t_N;a,b)=\left(\frac{a}{b}\right)^{N}\cdot\prod_{i=1}^{N}\left\{\left(\frac{t_i}{b}\right)^{a-1}\cdot e^{-\left(\frac{t_i}{b}\right)^{a}}\right\}.$

$$\ln(L(t_1,...,t_N;a,b))=N\cdot\ln(a)-N\cdot a\cdot\ln(b)+(a-1)\sum_{i=1}^{N}\ln(t_i)-b^{-a}\sum_{i=1}^{N}t_i^{\,a}.$$

Необходимое условие экстремума:

$$\begin{cases}\dfrac{\partial\ln(L(a,b))}{\partial b}\equiv -N\cdot\dfrac{a}{b}+\dfrac{a}{b^{a+1}}\cdot\sum_{i=1}^{N}t_i^{\,a}=0,\\[2ex] \dfrac{\partial\ln(L(a,b))}{\partial a}\equiv\dfrac{N}{a}-N\cdot\ln(b)+\sum_{i=1}^{N}\ln(t_i)+b^{-a}\cdot\ln(b)\cdot\sum_{i=1}^{N}t_i^{\,a}-b^{-a}\sum_{i=1}^{N}[t_i^{\,a}\cdot\ln(t_i)]=0.\end{cases}$$

Из первого уравнения находим выражение для $b=\left(\dfrac{\sum_{i=1}^{N}t_i^{\,a}}{N}\right)^{\frac{1}{a}}$

и, подставляя его во второе уравнение, приходим к уравнению:

$$\frac{N}{a}+\sum_{i=1}^{N}\ln(t_i)-N\cdot\frac{\sum_{i=1}^{N}t_i^{\,a}\cdot\ln(t_i)}{\sum_{i=1}^{N}t_i^{\,a}}=0,$$

которое надо разрешить относительно параметра a. После чего остается вычислить $\hat{b}$.

Метод максимального правдоподобия

для точечной оценки неизвестных параметров заданного распределения

Расчет параметров a и b распределения **Вейбулла** для **цензурированной выборки**

Имеем усеченную выборку объемом $N = m + s$, содержащую:

- ряд наработок с отказами $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_i, \ldots, \tau_m$
- ряд безотказных наработок $t_1, t_2, \ldots, t_j, \ldots, t_s$

Функция правдоподобия $\ln L = m \ln a - ma \ln b + (a-1)\sum_{i=1}^{m} \ln(\tau_i) - b^{-a}(\sum_{i=1}^{m} \tau_i^a + \sum_{j=1}^{s} t_j^a)$

Необходимое условие экстремума:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial b} = -m\dfrac{a}{b} + \dfrac{a}{b^{a+1}}(\sum_{i=1}^{m} \tau_i^a + \sum_{j=1}^{s} t_j^a) = 0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial a} = \dfrac{m}{a} - m \ln b + \sum_{i=1}^{m} \ln(\tau_i) + b^{-a} \ln b(\sum_{i=1}^{m} \tau_i^a + \sum_{j=1}^{s} t_j^a) - b^{-a}(\sum_{i=1}^{m} \tau_i^a \ln\tau_i + \sum_{j=1}^{s} t_j^a \ln t_j) = 0 \end{cases}$$

Из первого уравнения находим выражение для $\hat{b} = \dfrac{(\sum_{i=1}^{m} \tau_i^a + \sum_{j=1}^{s} t_j^a)^{1/a}}{m}$

и, подставляя его во второе уравнение, приходим к уравнению:

$$\frac{m}{a} - \sum_{(i)} \ln\tau_i - m\frac{\sum_{i=1}^{m} \tau_i^a \ln\tau_i + \sum_{j=1}^{s} t_j^a \ln t_j}{\sum_{i=1}^{m} \tau_i^a + \sum_{j=1}^{s} t_j^a} = 0$$

которое надо разрешить относительно параметра a. После чего остается вычислить $\hat{b}$.

Вычислительные трудности решения сложных алгебраических уравнений при применении ММ и ММП

1. Алгебраическое уравнение для нахождения параметра *a* распределения Вейбулла при применении ММ

$$\hat{D}-((\hat{\bar{\bar{T}}})/\quad(1+\frac{1}{a}))^2\cdot\left\{\Gamma\left(1+\frac{2}{a}\right)-\left[\Gamma\left(1+\frac{1}{a}\right)\right]^2\right\}=0,$$

2. Алгебраическое уравнение для нахождения параметра $\hat{a}$ Гамма-распределения методом МП

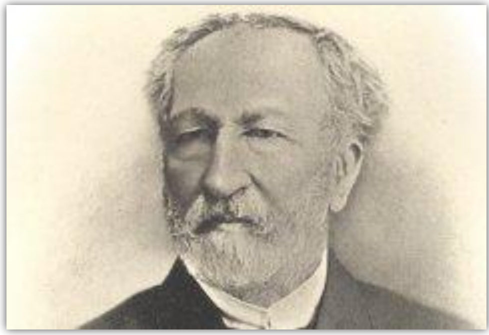
$$\frac{1}{N}\cdot\sum_{i=1}^{N}\ln\left(\frac{t_i}{\bar{\bar{T}}}\right)-\frac{\frac{d\Gamma(a)}{da}}{\Gamma(a)}+\ln(a)=0.$$

Введем обозначение $\frac{\frac{d\Gamma(a)}{da}}{\Gamma(a)}-\ln(a)\equiv G(a).$

3. Алгебраическое уравнение для нахождения параметра $\hat{a}$ распределения Вейбулла

$$\frac{N}{a}+\sum_{i=1}^{N}\ln(t_i)-N\cdot\frac{\sum_{i=1}^{N}t_i^{\,a}\cdot\ln(t_i)}{\sum_{i=1}^{N}t_i^{\,a}}=0.$$

Применение разложения Стирлинга
для решения сложных алгебраических уравнений

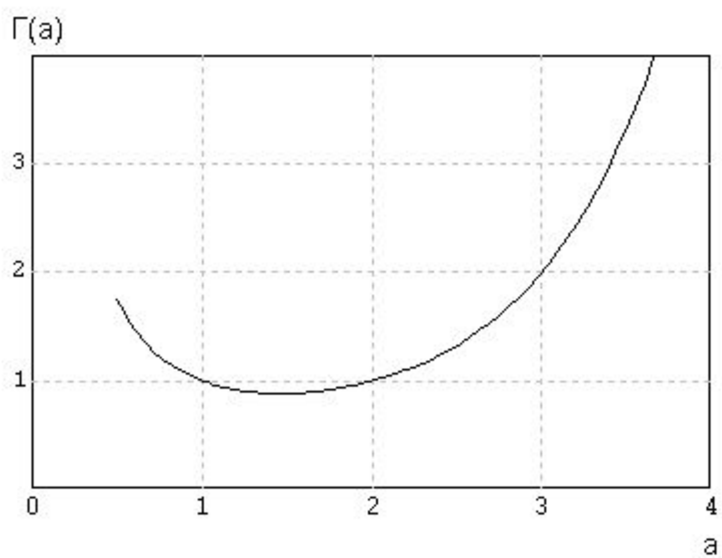


Джеймс Стирлинг (Stirling) (1692 – 1770) - шотландский математик, член Лондонского королевского общества. Впервые дал асимптотическое разложение для гамма-функции и логарифма от нее.

Разложения Джеймса Стирлинга для Эйлерова интеграла 2-го рода

$$\Gamma(a) = e^{-a} \cdot a^{a-\frac{1}{2}} \cdot \sqrt{2\pi} \cdot \left[1 + \frac{1}{12a} + \frac{1}{288a^2} - \frac{139}{51840a^3} - \frac{571}{2488320a^4} + O(a^{-5})\right].$$

График Г(a)



Показана приемлемость формулы Стирлинга в широком диапазоне изменения параметра *a*

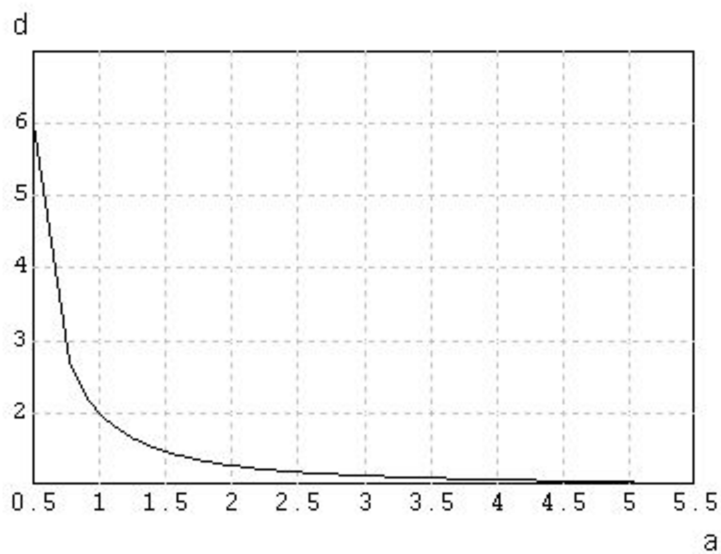
	$a=\frac{1}{2}$ $\Gamma(\frac{1}{2})=\sqrt{\pi}$	$a=\frac{3}{2}$ $\Gamma(\frac{3}{2})=\sqrt{\pi}/2$
Таблица	1,77245	0,88623
Стирлинг	1,75666	0,886155

Решение нелинейного уравнения для параметра *a* распределения Вейбулла при использовании метода моментов

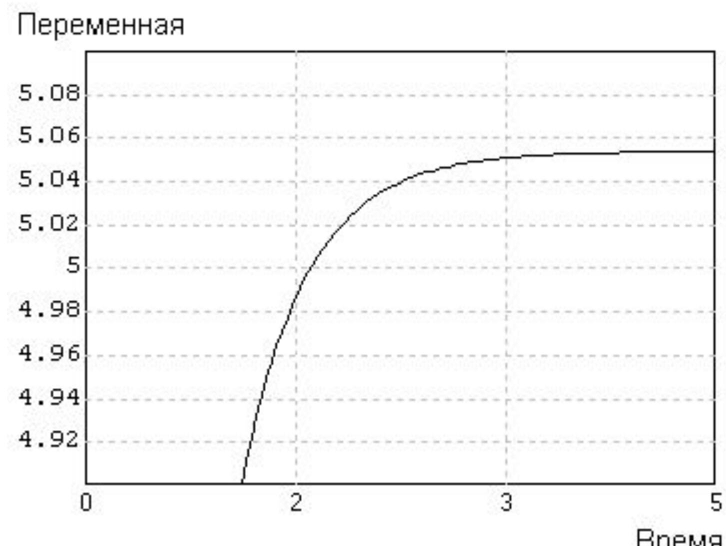
$\frac{\hat{D}}{\hat{T}^2} + 1 - \frac{\Gamma(1+\frac{2}{a})}{\Gamma^2(1+\frac{1}{a})} = 0.$ Учитывая свойство строгой вогнутости функции $\frac{\Gamma(1+\frac{2}{a})}{\Gamma^2(1+\frac{1}{a})} = 0$,

а следовательно единственности решения будем искать решение путем численного интегрирования уравнения (введением «отрицательной обратной связи») $\frac{da}{dt} = \frac{\hat{D}}{\hat{T}^2} + 1 - \frac{\Gamma(1+\frac{2}{a})}{\Gamma^2(1+\frac{1}{a})}$ при любом начальном условии.

График Г2/Г1^2 от "a"



Расчет параметра "a"



Решение нелинейного уравнения для параметра *a* Гамма-распределения при использовании метода максимального правдоподобия

$$\frac{1}{N}\cdot\sum_{i=1}^{N}\ln(\frac{t_i}{T})-\frac{\frac{d\Gamma(a)}{da}}{\Gamma(a)}+\ln(a)=0.$$

Обозначим $\frac{\frac{d\Gamma(a)}{da}}{\Gamma(a)}-\ln(a)\equiv G(a),$ и

найдем аналитическое выражение для $G(a)$

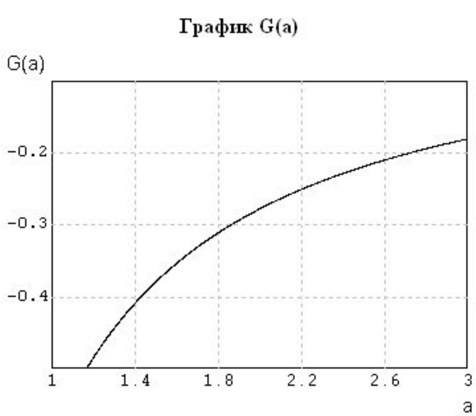
$$\Gamma(a)=e^{-a}\cdot a^{a-\frac{1}{2}}\cdot\sqrt{2\pi}\cdot Q(a); \qquad Q(a)=\left[1+\frac{1}{12a}+\frac{1}{288a^2}-\frac{139}{51840a^3}-\frac{571}{2488320a^4}+O(a^{-5})\right].$$

$$\ln(\Gamma(a))=\ln(e^{-a})+\ln(a^{a-0.5})+\ln(sqrt2\pi)+\ln(Q(a)). \qquad \ln(a^{a-0.5})=(a-0.5)\cdot\ln(a).$$

$$\frac{d(\ln(\Gamma(a))}{da}=-1+\ln(a)+(a-0.5)/a+(-1/(12\cdot a^2)-2/(288\cdot a^3)+139\cdot 3/(51840\cdot a^4)+571\cdot 4/(2488320\cdot a^5))/Q(a).$$

В итоге получим окончательно аналитическое выражение

$$G(a)=-1+(a-0.5)/a+(-1/(12\cdot a^2)-2/(288\cdot a^3)+139\cdot 3/(51840\cdot a^4)+$$
$$571\cdot 4/(2488320\cdot a^5))/Q(a).$$



Тогда алгоритм решения уравнения может быть принят в виде дифференциального уравнения

$a'=-K\cdot(0.0288041+G(a))$

или $a'=-K\cdot sign(0.0288041+G(a))$

при произвольном начальном значении $a=0.5,$ решение которого асимптотически приведет к искомому результату.

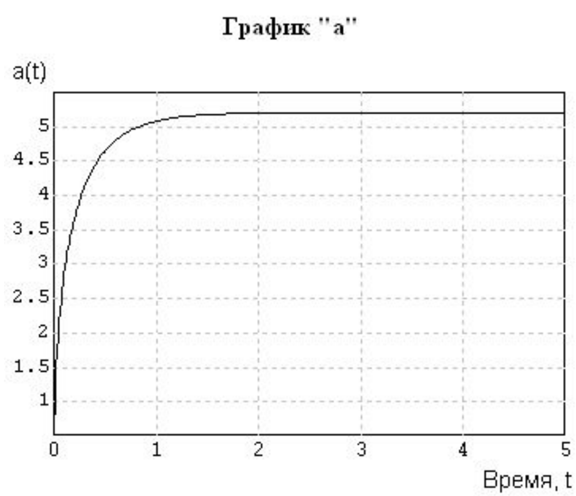
Решение нелинейного уравнения
для параметра *a* распределения Вейбулла
при использовании метода максимального правдоподобия

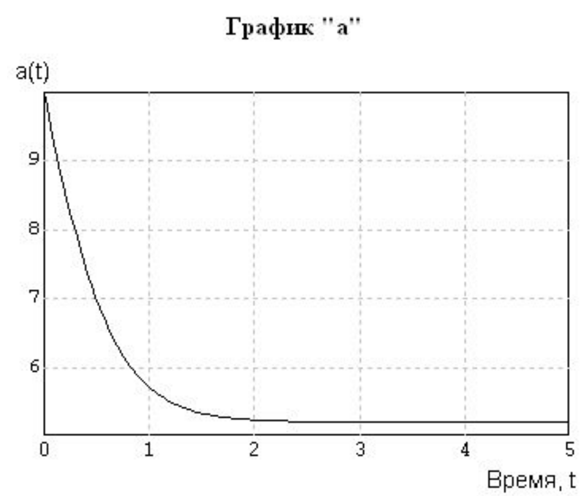
Для решения уравнения предлагается использовать ту же идею для нахождения *a* - решать следующее дифференциальное уравнение вида

$$\frac{N}{a}+\sum_{i=1}^{N}\ln(t_i)-N\cdot\frac{\sum_{i=1}^{N}t_i^{\,a}\cdot\ln(t_i)}{\sum_{i=1}^{N}t_i^{\,a}}=0.$$

$$\frac{da}{dt}=+\left[\frac{N}{a}+\sum_{i=1}^{N}\ln(t_i)-N\cdot\frac{\sum_{i=1}^{N}t_i^{\,a}\cdot\ln(t_i)}{\sum_{i=1}^{N}t_i^{\,a}}\right],$$

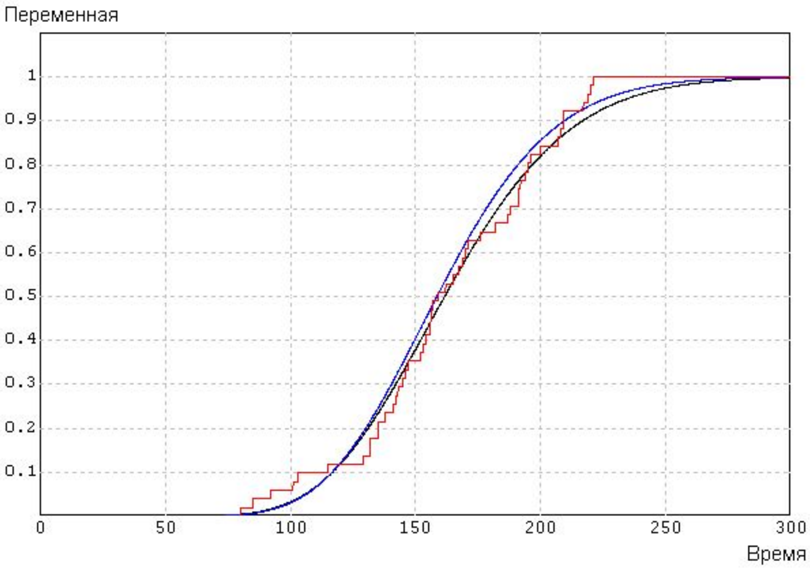
с различными начальными условием, подтверждающих единственность «корня». Тогда $\lim_{t\to\infty}a(t)$ даёт искомое значение оценки параметра $\hat{a}$. После чего остается вычислить $\hat{b}$ по формуле $\hat{b}=\left(\frac{\sum_{i=1}^{N}t_i^{\,a}}{N}\right)^{\frac{1}{a}}$.





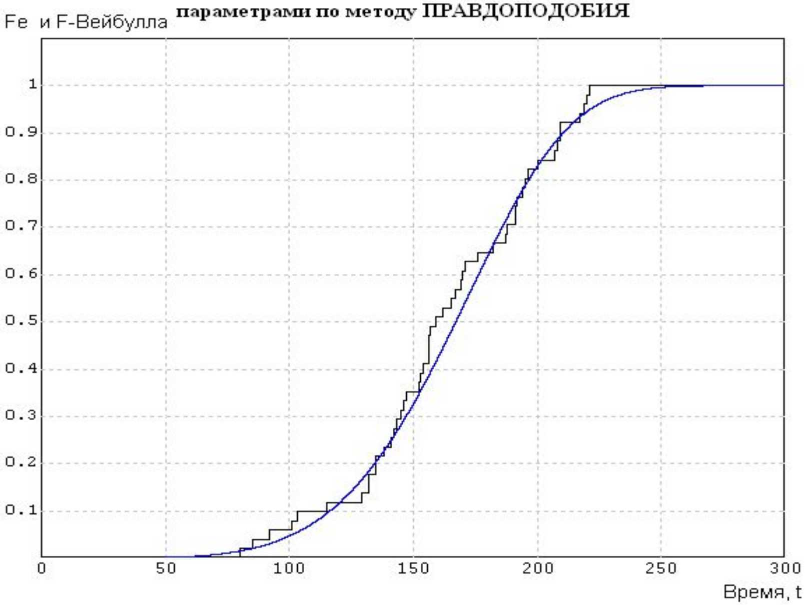
Решение тестовой задачи

Графики Fe, Fммп - черный, Fмм - синий для Гамма-распределения

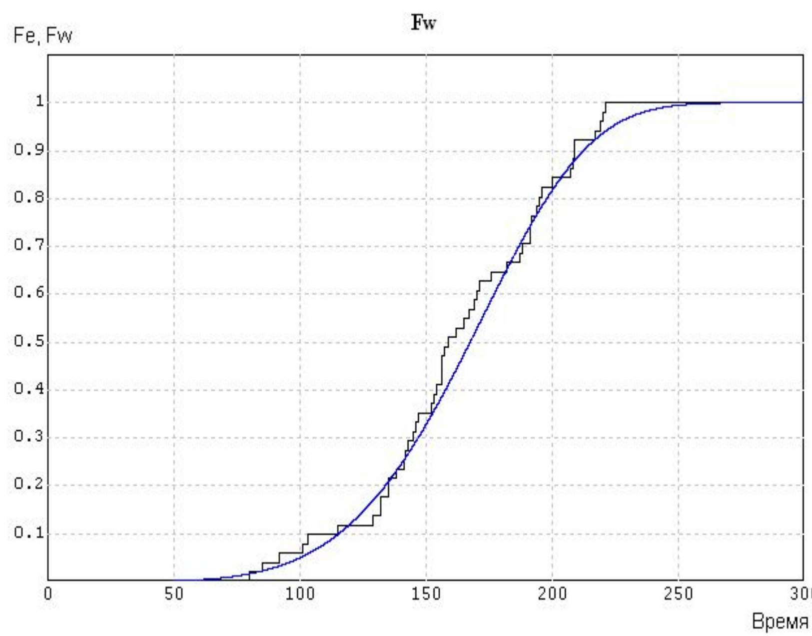


Распределение Вейбулла		Гамма-распределение	
ММ	ММП	ММ	ММП
a = 5.054	a = 5.2061	a = 19,294	a = 17,52
b = 179.308	b = 179.232	λ = 0,121433	λ = 0.106401

Графики эмпирического и аппроксимирующего распределения Вейбулла с параметрами по методу ПРАВДОПОДОБИЯ

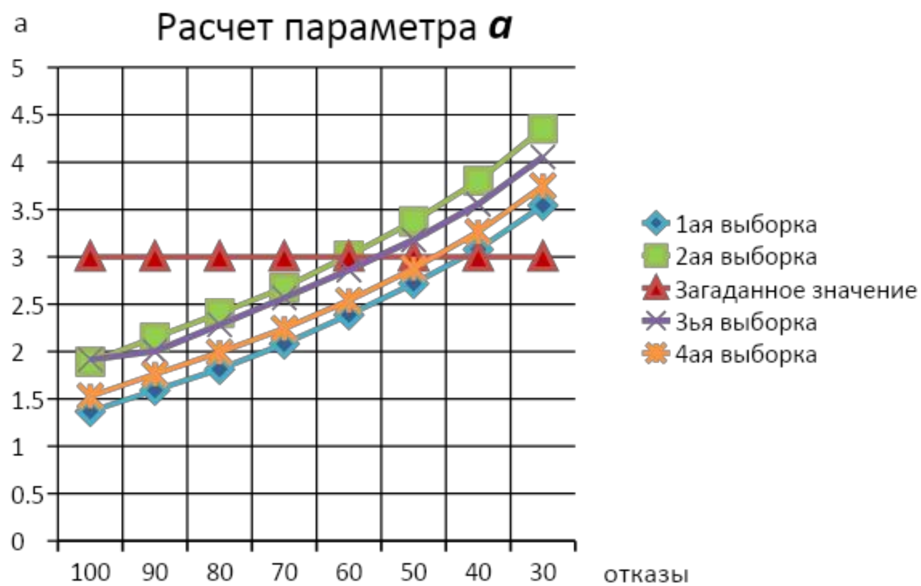


Графики эмпирического Fe распределения и аппроксимирующего его распределения Вейбулла



Решение нелинейного уравнения
для параметра *a* распределения **Вейбулла**
для **цензурированной** выборки
при использовании метода **максимального правдоподобия**

Имеем четыре выборки по 100 значений.



Можно утверждать, что примерно 50% отказов уже дают представление о том, что выборка принадлежит распределению Вейбулла.

Результаты работы

1. Разработано алгоритмическое и программное обеспечение для получения точечных оценок параметров двух практически важных распределений - распределения Вейбулла и гамма-распределения методом моментов, методом максимального правдоподобия и методом вероятностных сеток («вероятностной бумаги»). Разработан и программно реализован также алгоритм проверки выполнимости критерия А.Н. Колмогорова – критерия согласия аппроксимирующего распределения эмпирическому (ступенчатому) распределению.

2. Системы расчетов полностью реализованы в среде отечественного Программного комплекса «МВТУ 3.5».
3. Показано, что применение предложенных алгоритмов позволило исключить необходимость в «ручном» проведении расчетов показателей надежности и в обращения к многочисленным числовым статистическим таблицам. Все необходимые данные получаются расчетным путем с использование соответствующих моделей и формул. По информации о первых выборочных четырех начальных и центральных моментах и об эмпирической функции распределения расчетным путем автоматически находятся параметры практически всех типовых распределений, а также значения гамма-функции (эйлерова интеграла второго рода).

Вывод

В работе сделан научно-технический задел для решения на ЭВМ перспективных задач обработки информации с малыми или ограниченными по объему выборками, в том числе с различными типами цензурирования, то есть усеченными выборками, методами моментов и максимального правдоподобия, как с точечными, так и интервальными оценками параметров предполагаемых распределений.

Критерии согласия

- Критерий согласия Колмогорова

$$\lambda = D \cdot \sqrt{N} = \max_t \left| F_{эм}(t) - F(t) \right| \cdot \sqrt{N}$$

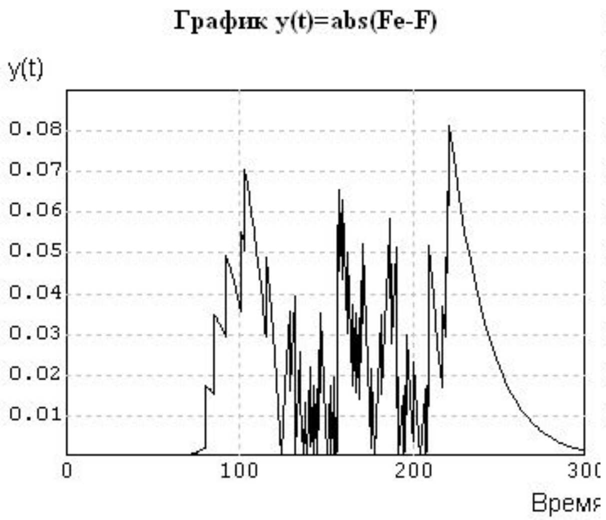
$$\text{Вер}\{D\sqrt{N} > x_\alpha\} = 1 - \sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} (-1)^k \cdot \exp(-2k^2 x_\alpha^2) = \alpha$$

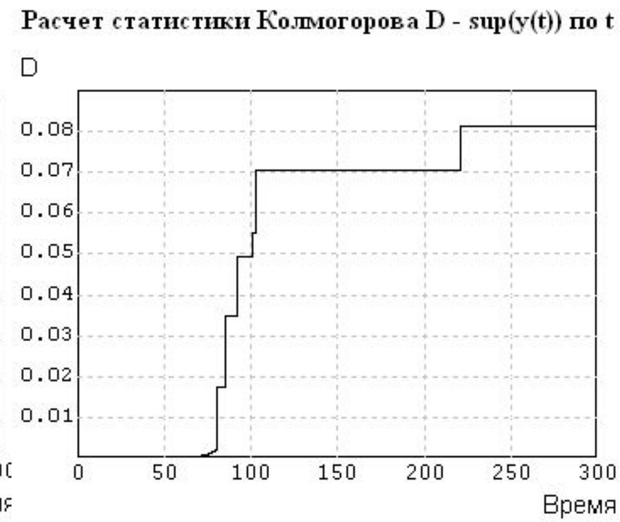
- Критерий “Стареющего” распределения

$$m_k = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{i=N} t_i^k \qquad k = 1,2,3,4.$$

$$M_{k+1} \cdot M_{k-1} \le M_k^2 \qquad M_k = \frac{m_k}{k!}$$

Критерий согласия Колмогорова





α x_α

$$\lambda = D\cdot\sqrt{N} = \max_t \left|F_{\text{эм}}(t) - F(t)\right|\cdot\sqrt{N}$$

$$\text{Вер}\{\mathrm{D}\sqrt{N} > x_\alpha\} = 1 - \sum_{k=-\infty}^{k=+\infty}(-1)^k\cdot\exp(-2k^2x_\alpha^2) = \alpha$$

a	0,20	0,10	0,05	0,02	0,01	0,001
x	1,073	1,224	1,358	1,520	1,625	1,950

Очень спасибо
за внимание !

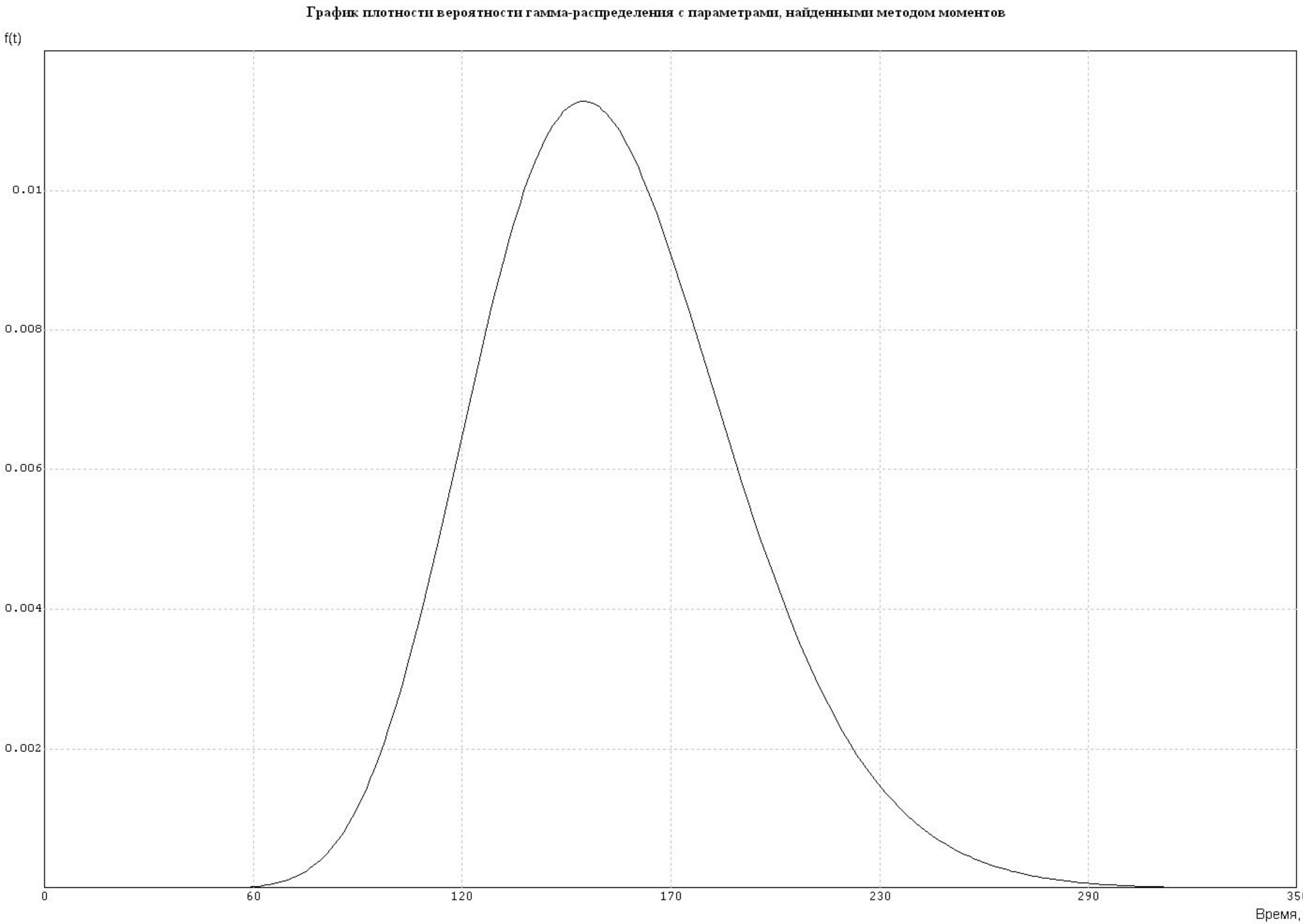


График плотности вероятности гамма-распределения с параметрами, найденными методом моментов
f(t)
0.01
0.008
0.006
0.004
0.002
0
60
120
170
230
290
350
Время, t