Обратные матрицы
Системы уравнений

1. **Определение обратной матрицы**
2. **Ранг матрицы**
3. **Системы уравнений**
4. **Решение систем уравнений матричным методом**
5. **Решение систем уравнений методом Крамера**

Для каждого числа $a \neq 0$ существует обратное число a^{-1} такое, что произведение $a \cdot a^{-1} = 1$. Для квадратных матриц тоже вводится аналогичное понятие.

Определение. *Матрица A^{-1} называется **обратной по отношению к квадратной матрице** A, если при умножении этой матрицы на данную как справа, так и слева получается единичная матрица:*

$$A^{-1} \cdot A = A \cdot A^{-1} = E.$$

Из определения следует, что только квадратная матрица имеет обратную; в этом случае и обратная матрица является квадратной того же порядка.

Однако не каждая квадратная матрица имеет обратную. Если $a \neq 0$ является необходимым и достаточным условием существования числа a^{-1}, то для существования матрицы A^{-1} таким условием является требование $|A| \neq 0$.

Если определитель матрицы отличен от нуля ($|A| \neq 0$), то такая квадратная матрица называется *невырожденной,* или *неособенной;* в противном случае (при $|A| = 0$) — *вырожденной,* или *особенной.*

Теорема (необходимое и достаточное условие существования обратной матрицы). *Обратная матрица* A^{-1} *существует* (*и единственна*) *тогда и только тогда, когда исходная матрица невырожденная.*

Алгоритм вычисления обратной матрицы: 1^0. Находим определитель исходной матрицы. Если $|A| = 0$, то матрица A – вырожденная и обратной матрицы A^{-1} не существует. Если $|A| \neq 0$, то матрица A – невырожденная и обратная матрица существует.

2^0. Находим матрицу A', транспонированную к A.

3^0. Находим алгебраические дополнения элементов транспонированной матрицы $A'_{ij} = A_{ji} (i=1,\ 2,\ \ldots,\ n; j=1,\ 2,\ \ldots,\ n)$ и составляем из них присоединенную матрицу $\tilde{A}$: $\tilde{a}_{ij} = A'_{ij} = A_{ji}$ $(i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n; \quad j=1,\ 2,\ \ldots,\ n)$.

4^0. Вычисляем обратную матрицу по формуле

5^0. Проверяем правильность вычисления обратной матрицы A^{-1}, исходя из ее определения $A^{-1}A = A \cdot A^{-1} = E$

▷ **Пример 1.10.** Найти матрицу, обратную к данной:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

▷ **Пример 1.10.** Найти матрицу, обратную к данной:

$$A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Р е ш е н и е. 1^0. Определитель матрицы $|A|=5\neq 0$ т.е. матрица A — невырожденная и обратная матрица A^{-1} существует.

2^0. Находим матрицу A', транспонированную к A:

$$A'=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

3^0. Находим алгебраические дополнения элементов матрицы A' и составляем из них присоединенную матрицу $\tilde{A}$, учитывая, что $A'_{ij} = A_{ji}$: $\tilde{A} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ -3 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$

4^0. Вычисляем обратную матрицу $A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot \tilde{A}$:

$$A^{-1} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ -3 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/5 & 3/5 & -2/5 \\ -3/5 & 1/5 & 1/5 \\ 1/5 & -2/5 & 3/5 \end{pmatrix}.$$

5^0. Проверяем правильность вычисления обратной матрицы по формулам:

$$A^{-1} \cdot A = A \cdot A^{-1} = E$$

Свойства невырожденных матриц

Для невырожденных матриц выполняются следующие свойства:

1. $\left|A^{-1}\right| = \dfrac{1}{|A|}$;

2. $\left(A^{-1}\right)^{-1} = A$;

3. $\left(A^m\right)^{-1} = \left(A^{-1}\right)^m$;

4. $\left(AB\right)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$.

5. $\left(A^{-1}\right)' = \left(A'\right)^{-1}$.

Ранг матрицы

Для решения и исследования ряда математических и прикладных задач важное значение имеет понятие ранга матрицы.

В матрице A размера $m \times n$ вычеркиванием каких-либо строк и столбцов можно вычленить квадратные ***подматрицы*** k-го порядка, где $k \leq \min(m;\ n)$. Определители таких подматриц называются ***минорами k-го порядка матрицы A***.

Например, из матрицы $A_{3\times4}$ можно получить подматрицы первого, второго и третьего порядков.

Определение. ***Рангом*** *матрицы A называется наивысший порядок отличных от нуля миноров этой матрицы.*

Ранг матрицы A обозначается $\operatorname{rang} A$, *или* $r(A)$.

Из определения следует: а) *ранг матрицы* $A_{m\times n}$ *не превосходит меньшего из ее размеров, т.е.* $r(A)\le\min(m;\ n)$;

б) $r(A)=0$ *тогда и только тогда, когда все элементы матрицы равны нулю, т.е.* $A=\mathbf{0}$;

в) *для квадратной матрицы n-го порядка* $r(A)=n$ *тогда и только тогда, когда матрица* A *— невырожденная.*

▷ **Пример 1.11.** Вычислить ранг матрицы

$$A=\begin{pmatrix} 4 & 0 & -8 & 0 \\ 2 & 0 & -4 & 0 \\ 3 & 0 & -6 & 0 \\ 1 & 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

▷ **Пример 1.11.** Вычислить ранг матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -8 & 0 \\ 2 & 0 & -4 & 0 \\ 3 & 0 & -6 & 0 \\ 1 & 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Решение. Матрица A имеет четвертый порядок, поэтому $r(A) \leq 4$. Однако $|A| = 0$, так как матрица A содержит нулевой столбец, поэтому $r(A) \leq 3$. Все подматрицы третьего порядка тоже содержат нулевой столбец и поэтому имеют нулевые определители, значит $r(A) \leq 2$. Все подматрицы второго порядка либо имеют нулевой столбец (второй или четвертый), либо имеют пропорциональные столбцы (первый и третий), поэтому тоже имеют нулевые определители; таким образом $r(A) \leq 1$. Поскольку матрица A содержит ненулевые элементы, т.е. невырожденные подматрицы первого порядка, то $r(A) = 1$. ▶

▷ **Пример 1.12.** Вычислить ранг матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 4 \\ 3 & 2 & 0 & 3 \\ 2 & -1 & 0 & -3 \end{pmatrix}.$$

▷ **Пример 1.12.** Вычислить ранг матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 4 \\ 3 & 2 & 0 & 3 \\ 2 & -1 & 0 & -3 \end{pmatrix}.$$

Р е ш е н и е. Для матрицы $A_{3\times 4}$ $r(A) \le \min(3;\ 4) = 3$.

Проверим, равен ли ранг 3-м, для этого вычислим все миноры третьего порядка, т.е. определители всех подматриц третьего порядка (их всего 4, они получаются при вычеркивании одного из столбцов матрицы):

$$\begin{vmatrix} 3 & 0 & 4 \\ 2 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 0; \begin{vmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 3 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 0; \begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & -3 \end{vmatrix} = 0; \begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Поскольку все миноры третьего порядка нулевые, $r(A) \le 2$. Так как существует ненулевой минор второго порядка, например, $\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -7 \ne 0$, то $r(A) = 2$. ▶

В общем случае определение ранга матрицы перебором всех миноров достаточно трудоемко. Для облегчения этой задачи используются преобразования, сохраняющие ранг матрицы.

Назовем ***элементарными преобразованиями*** матрицы следующие:

1) *Отбрасывание нулевой строки (столбца).*

2) *Умножение всех элементов строки (столбца) матрицы на число, не равное нулю.*

3) *Изменение порядка строк (столбцов) матрицы.*

4) *Прибавление к каждому элементу одной строки (столбца) соответствующих элементов другой строки (столбца), умноженных на любое число.*

5) *Транспонирование матрицы.*

Теорема. *Ранг матрицы не изменяется при элементарных преобразованиях матрицы.*

Покажем на примере *алгоритм вычисления ранга матрицы* с помощью элементарных преобразований.

▷ **Пример 1.13.** Найти ранг матрицы

$$A=\begin{pmatrix} 0 & -1 & 3 & 0 & 2 \\ 2 & -4 & 1 & 5 & 3 \\ -4 & 5 & 7 & -10 & 0 \\ -2 & 1 & 8 & -5 & 3 \end{pmatrix}.$$

Р е ш е н и е. 1^0. Если $a_{11}=0$, то при перестановке строк или столбцов добиваемся того, что $a_{11}\neq 0$. В данном примере поменяем местами, например, 1-ю и 2-ю строки матрицы (см. ниже).

2^0. Если $a_{11} \neq 0$, то умножая элементы 2-й, 3-й и 4-й строк на подходящие числа (именно на $-a_{21}/a_{11} = 0$, $-a_{31}/a_{11} = 2$, $-a_{41}/a_{11} = 1$) и прибавляя полученные числа соответственно к элементам 2-й[1], 3-й и 4-й строк, добьемся того, чтобы все элементы 1-го столбца (кроме a_{11}) равнялись нулю[2]:

$$\begin{pmatrix} 2 & -4 & 1 & 5 & 3 \\ 0 & -1 & 3 & 0 & 2 \\ -4 & 5 & 7 & -10 & 0 \\ -2 & 1 & 8 & -5 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & -4 & 1 & 5 & 3 \\ 0 & -1 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & -3 & 9 & 0 & 6 \\ 0 & -3 & 9 & 0 & 6 \end{pmatrix}.$$

3^0. Если в полученной матрице $a_{22} \neq 0$ (у нас $a_{22} = -1 \neq 0$), то умножая элементы 3-й и 4-й строк на подходящие числа (а именно, на $-a_{32}/a_{22} = -3$, $-a_{42}/a_{22} = -3$), добьемся того, чтобы все элементы 2-го столбца (кроме a_{12}, a_{22}) равнялись нулю. Если в процессе преобразований получаются строки (или столбцы), целиком состоящие из нулей (как в данном примере), то отбрасываем эти строки (или столбцы):

$$\begin{pmatrix} 2 & -4 & 1 & 5 & 3 \\ 0 & -1 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & -4 & 1 & 5 & 3 \\ 0 & -1 & 3 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Последняя матрица имеет ступенчатый вид и содержит миноры второго порядка, не равные нулю, например,

$\begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$. Поэтому ранг полученной ступенчатой, а следовательно, и данной матрицы равен 2. ▶

Для рангов матриц справедливы следующие соотношения:

1) $r(A+B) \le r(A) + r(B)$, 2) $r(A+B) \ge |r(A) - r(B)|$,

3) $r(AB) \le \min\{r(A); r(B)\}$, 4) $r(A'A) = r(A)$,

5) $r(AB) = r(A)$, если B — квадратная матрица и $|B| \neq 0$,

6) $r(AB) \ge r(A) + r(B) - n$, где n — число столбцов матрицы A или строк матрицы B.

Понятие ранга матрицы тесно связано с понятием линейной зависимости (независимости) ее строк или столбцов[1].

В матрице A обозначим ее строки следующим образом:

$e_1 = (a_{11}\, a_{12} \ldots a_{1n})$, $e_2 = (a_{21} a_{22} \ldots a_{2n})$,

$e_m = (a_{m1} a_{m2} \ldots a_{mn})$.

Две строки матрицы называются *равными*, если равны их соответствующие элементы: $e_k = e_s$, если $a_{kj} = a_{sj}$, $j = 1, 2, \ldots, n$.

Арифметические операции над строками матрицы (умножение строки на число, сложение строк) вводятся как операции, проводимые поэлементно:

$$\lambda_{e_k} = (\lambda a_{k_1} \lambda a_{k_2} \ldots \lambda a_{k_n});$$

$$e_k + e_s = [(a_{k1} + a_{s1})(a_{k2} + a_{s2}) \ldots (a_{kn} + a_{sn})].$$

Строка e называется *линейной комбинацией* строк $e_1, e_2, \ldots, e_s$ матрицы, если она равна сумме произведений этих строк на произвольные действительные числа:

$$e = \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \ldots + \lambda_s e_s,$$

где $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_s$ — любые числа.

Строки матрицы $e_1, e_2, \ldots, e_m$ называются *линейно зависимыми*, если существуют такие числа $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$, не равные одновременно нулю, что линейная комбинация строк матрицы равна нулевой строке:

$$\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \ldots + \lambda_m e_m = \mathbf{0},$$

где $\mathbf{0} = (0\ 0 \ldots 0)$.

Линейная зависимость строк матрицы означает, что хотя бы одна строка матрицы является линейной комбинацией остальных.

Если линейная комбинация строк равна нулю тогда и только тогда, когда все коэффициенты λ_i равны нулю, т.е. $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_m = 0$, то строки $e_1, e_2, \ldots, e_m$ называются *линейно независимыми*.

Теорема о ранге матрицы. *Ранг матрицы равен максимальному числу ее линейно независимых строк или столбцов, через которые линейно выражаются все остальные ее строки* (*столбцы*).

Теорема о ранге матрицы играет принципиальную роль в матричном анализе, в частности при исследовании систем линейных уравнений.

Системы уравнений

Пусть число уравнений системы равно числу переменных, т.е. $m = n$. Тогда матрица системы является *квадратной*, а ее определитель $\Delta = |A|$ называется *определителем системы*.

Рассмотрим решение **системы двух уравнений** с двумя переменными:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2, \end{cases}$$

в которой хотя бы один из коэффициентов при переменных отличен от нуля.

Для решения этой системы исключим переменную x_2, умножив первое уравнение на a_{22}, второе — на $(-a_{12})$ и сложив их. Затем исключим переменную x_1, умножив первое уравнение на $(-a_{21})$, второе — на a_{11} и также сложив их. В результате получим систему:

$$\begin{cases}(a_{11}a_{22}-a_{21}a_{12})x_1=b_1a_{22}-b_2a_{12};\\(a_{11}a_{22}-a_{21}a_{12})x_2=a_{11}b_2-a_{21}b_2.\end{cases}$$

Выражение в скобках есть определитель системы

$$\Delta=a_{11}a_{22}-a_{21}a_{12}=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{21}&a_{22}\end{vmatrix}.$$

Обозначив

$$\Delta_1=b_1a_{22}-b_2a_{12}=\begin{vmatrix}b_1&a_{12}\\b_2&a_{22}\end{vmatrix},\ \Delta_2=a_{11}b_2-a_{21}b_1=\begin{vmatrix}a_{11}&b_1\\a_{21}&b_2\end{vmatrix},$$

система примет вид:

$$\begin{cases}\Delta\cdot x_1=\Delta_1;\\\Delta\cdot x_2=\Delta_2.\end{cases}$$

Из полученной системы следует, что если определитель системы $\Delta \neq 0$, то система (2.4) имеет единственное решение, определяемое по формулам: $x_1 = \dfrac{\Delta_1}{\Delta}$, $x_2 = \dfrac{\Delta_2}{\Delta}$.

Если $\Delta = 0$, а $\Delta_1 \neq 0$ (или $\Delta_2 \neq 0$), то система несовместная, так как в этом случае приводится к виду: $\begin{cases} 0 \cdot x_1 = \Delta_1; \\ 0 \cdot x_2 = \Delta_2. \end{cases}$

Если $\Delta = \Delta_1 = \Delta_2 = 0$, то система (2.4) неопределенная и имеет бесконечное множество решений, так как в этом случае приводится к виду: $\begin{cases} 0 \cdot x_1 = 0; \\ 0 \cdot x_2 = 0. \end{cases}$

Решение системы уравнений матричным методом

Для получения решения системы (2.1) при $m = n$ **в общем виде** предположим, что квадратная матрица системы $A_{n\times n}$ невырожденная, т.е. ее определитель $|A| \neq 0$. В этом случае существует обратная матрица A^{-1}.

Умножая *слева* обе части матричного равенства (2.3) на матрицу A^{-1}, получим $A^{-1}(AX) = A^{-1}B$. Так как $A^{-1}(AX) = (A^{-1}A)X = EX = X$, то решением системы методом обратной матрицы будет матрица-столбец

$$X = A^{-1}B.$$

Решение системы уравнений методом Крамера

Теорема Крамера. *Пусть* Δ *— определитель матрицы системы* A*, а* Δ_j *— определитель матрицы, получаемой из матрицы* A *заменой* j*-го столбца столбцом свободных членов. Тогда, если* $\Delta \neq 0$*, то система имеет единственное решение, определяемое по формулам:*

$$x_j = \frac{\Delta_j}{\Delta} \quad (j = 1, 2, \ldots, n).$$

► **Пример 2.1.** Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 3, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 11, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 8 \end{cases}$$

а) методом обратной матрицы; б) по формулам Крамера.

▶ **Пример 2.1.** Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 3, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 11, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 8 \end{cases}$$

а) методом обратной матрицы; б) по формулам Крамера.

Р е ш е н и е. а) Обозначим

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}; \; X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}; \; B = \begin{pmatrix} 3 \\ 11 \\ 8 \end{pmatrix}.$$

Тогда в матричной форме данная система имеет вид: $AX = B$.

Найдем определитель $|A| = 5$

Так как $|A| \neq 0$,

то матрица A — невырожденная, и существует обратная матрица A^{-1}. Матрицу A^{-1} находим по алгоритму

$$A^{-1}=\frac{1}{5}\begin{pmatrix}1 & 3 & -2\\ -3 & 1 & 1\\ 1 & -2 & 3\end{pmatrix}.$$ Теперь по формуле

$$X=A^{-1}B=\frac{1}{5}\begin{pmatrix}1 & 3 & -2\\ -3 & 1 & 1\\ 1 & -2 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3\\ 11\\ 8\end{pmatrix}=\frac{1}{5}\begin{pmatrix}20\\ 10\\ 5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\ 2\\ 1\end{pmatrix},$$

т.е. решение системы

б) Найдем определитель системы $\Delta=|A|=5$

Так как $\Delta\neq 0$, то по теореме Крамера система имеет единственное решение.

Вычислим определители матриц $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$, полученных из матрицы A заменой соответственно первого, второго и третьего столбцов столбцом свободных членов:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 11 & 1 & 1 \\ 8 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 20; \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 11 & 1 \\ 1 & 8 & 2 \end{vmatrix} = 10; \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & 11 \\ 1 & 1 & 8 \end{vmatrix} = 5$$

Теперь по формулам Крамера

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{20}{5} = 4; \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{10}{5} = 2; \quad x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{5}{5} = 1,$$

В конце решения системы (любым способом) рекомендуем сделать проверку, подставив найденные значения в уравнения системы, и убедиться в том, что они обращаются в верные равенства. ▶

Существенным недостатком решения систем n линейных уравнений с n переменными по формулам Крамера и методом обратной матрицы является их большая трудоемкость, связанная с вычислением определителей и нахождением обратной матрицы. Поэтому эти методы представляют скорее теоретический интерес и на практике не могут быть использованы для решения реальных экономических задач, сводящихся часто к системам с большим числом уравнений и переменных.

Решение системы уравнений методом Гаусса

Метод Гаусса — метод последовательного исключения переменных — заключается в том, что с помощью элементарных преобразований система уравнений приводится к равносильной системе ступенчатого (или треугольного) вида, из которой последовательно, начиная с последних (по номеру) переменных, находятся все остальные переменные.

Предположим, что в системе

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1j}x_j + \ldots + a_{1n}x_n = b_1; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2j}x_j + \ldots + a_{2n}x_n = b_2; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{ij}x_j + \ldots + a_{in}x_n = b_i; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mj}x_j + \ldots + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases}$$

коэффициент при переменной x_1 в первом уравнении $a_{11} \neq 0$ (если это не так, то перестановкой уравнений местами добьемся того, чтобы $a_{11} \neq 0$).

Шаг 1. Умножая первое уравнение на подходящие числа (а именно на $-a_{21}/a_{11}, -a_{31}/a_{11}, \ldots, -a_{m1}/a_{11}$) и прибавляя полученные уравнения соответственно ко второму, третьему, ..., m-му уравнению системы, исключим переменную x_1 из всех последующих уравнений, начиная со второго. Получим

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ \qquad\quad a_{22}^{(1)}x_2 + \ldots + a_{2n}^{(1)}x_n = b_2^{(1)}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \qquad\quad a_{i2}^{(1)}x_2 + \ldots + a_{in}^{(1)}x_n = b_i^{(1)}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \qquad\quad a_{m2}^{(1)}x_2 + \ldots + a_{mn}^{(1)}x_n = b_m^{(1)}, \end{cases}$$

где буквами с верхним индексом (1) обозначены новые коэффициенты, полученные после первого шага.

Шаг 2. Предположим, что $a_{22}^{(1)} \neq 0$ (если это не так, то соответствующей перестановкой уравнений или переменных с изменением их номеров добьемся того, чтобы $a_{22}^{(1)} \neq 0$).

Умножая второе уравнение на подходящие числа $\left(-a_{32}^{(1)} / a_{22}^{(1)},\right.$ $\left. a_{42}^{(1)} / a_{22}^{(1)}, \ldots, a_{m2}^{(1)} / a_{22}^{(1)}\right)$ и прибавляя полученные уравнения соответственно к третьему, четвертому, ..., m-му уравнению системы, исключим переменную x_2 из всех последующих уравнений, начиная с третьего.

Продолжая процесс последовательного исключения переменных x_3, x_4, ..., x_{r-1}, после $(r-1)$ -го шага получим систему

$$\begin{cases}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1r}x_r + a_{1,r+1}x_{r+1} + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\
\qquad a_{22}^{(1)}x_2 + \ldots + a_{2r}^{(1)}x_r + a_{2,r+1}^{(1)}x_{r+1} + \ldots + a_{2n}^{(1)}x_n = b_2^{(1)}, \\
\qquad\qquad \ldots\ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots\ldots \\
\qquad\qquad a_{rr}^{(r-1)}x_r + a_{r,r+1}^{(r-1)}x_{r+1} + \ldots + a_{rn}^{(r-1)}x_n = b_r^{(r-1)}, \\
\qquad\qquad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots\ldots \\
\qquad\qquad\qquad\qquad 0 = b_{r+1}^{(r-1)}, \\
\qquad\qquad\qquad\qquad \ldots\ldots \\
\qquad\qquad\qquad\qquad 0 = b_m^{(r-1)}.
\end{cases}$$

Число нуль в последних $m-r$ уравнениях означает, что их левые части имеют вид $0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + \ldots + 0 \cdot x_n$. *Если хотя бы одно из чисел $b_{r+1}^{(r-1)}, \ldots, b_m^{(r-1)}$ не равно нулю, то соответствующее равенство противоречиво, и система несовместна.*

Таким образом, для любой *совместной системы числа* $b_{r+1}^{(r-1)}, \ldots, b_m^{(r-1)}$ *в системе равны нулю.* В этом случае последние $m-r$ уравнений в системе являются тождествами и их можно не принимать во внимание при решении системы

Очевидно, что после отбрасывания «лишних» уравнений возможны два случая: а) число уравнений системы равно числу переменных, т.е. $r=n$ (в этом случае система имеет треугольный вид); б) $r < n$ (в этом случае система имеет ступенчатый вид).

Преобразования Гаусса удобно проводить, осуществляя преобразования не с самими уравнениями, а с матрицей их коэффициентов. Рассмотрим матрицу

$$A_1 = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & b_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} & b_m \end{array}\right),$$

называемую ***расширенной матрицей системы***, ибо в нее, кроме матрицы системы A, дополнительно включен столбец свободных членов.

Пример Решить систему уравнений:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 6, \\ 2x_1 + 4x_2 - 2x_3 - 3x_4 = 18, \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 = 4, \\ 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 + x_4 = -8. \end{cases}$$

Пример Решить систему уравнений:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 6, \\ 2x_1 + 4x_2 - 2x_3 - 3x_4 = 18, \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 = 4, \\ 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 + x_4 = -8. \end{cases}$$

Р е ш е н и е. Расширенная матрица системы имеет вид:

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 2 & 3 & -2 & 6 \\ 2 & 4 & -2 & -3 & 18 \\ 3 & 2 & -1 & 2 & 4 \\ 2 & -3 & 2 & 1 & -8 \end{array}\right).$$

Р е ш е н и е. Расширенная матрица системы имеет вид:

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 2 & 3 & -2 & 6 \\ 2 & 4 & -2 & -3 & 18 \\ 3 & 2 & -1 & 2 & 4 \\ 2 & -3 & 2 & 1 & -8 \end{array}\right).$$

Шаг 1. Так как $a_{11} = 1 \neq 0$, то умножая первую строку матрицы на числа (−2), (−3), (−2) и прибавляя полученные строки соответственно ко второй, третьей, четвертой строкам, исключим переменную x_1 из всех строк, начиная со второй. Заметив, что в новой матрице $a_{22}^{(1)} = 0$, поменяем местами вторую и третью строки:

Шаг 1. Так как $a_{11}=1\neq 0$, то умножая первую строку матрицы на числа (−2), (−3), (−2) и прибавляя полученные строки соответственно ко второй, третьей, четвертой строкам, исключим переменную x_1 из всех строк, начиная со второй. Заметив, что в новой матрице $a_{22}^{(1)}=0$, поменяем местами вторую и третью строки:

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 2 & 3 & -2 & 6 \\ 0 & 0 & -8 & 1 & 6 \\ 0 & -4 & -10 & 8 & -14 \\ 0 & -7 & -4 & 5 & 20 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 2 & 3 & -2 & 6 \\ 0 & -4 & -10 & 8 & -14 \\ 0 & 0 & -8 & 1 & 6 \\ 0 & -7 & -4 & 5 & -20 \end{array}\right)$$

Шаг 2. Так как теперь $a_{22}^{(1)} = -4 \neq 0$, то умножая вторую строку на $(-7/4)$ и прибавляя полученную строку к четвертой, исключим переменную x_2 из всех строк, начиная с третьей:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & -2 & 6 \\ 0 & -4 & -10 & 8 & -14 \\ 0 & 0 & -8 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 13{,}5 & 9 & 4{,}5 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & -2 & 6 \\ 0 & -4 & -10 & 8 & -14 \\ 0 & 0 & -8 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & -\dfrac{117}{16} & \dfrac{117}{8} \end{array}\right).$$

Шаг 3. Учитывая, что $a_{33}^{(2)} = -8 \neq 0$, умножаем третью строку на 13,5/8 = 27/16, и прибавляя полученную строку к четвертой, исключим из нее переменную x_3. Получим (см. последнюю матрицу) систему уравнений

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 6, \\ \quad -4x_2 - 10x_3 + 8x_4 = -14, \\ \quad\quad -8x_3 + x_4 = 6, \\ \quad\quad\quad -\dfrac{117}{16}x_4 = \dfrac{117}{8}, \end{cases}$$

откуда, используя обратный ход метода Гаусса, найдем из четвертого уравнения $x_4 = -2$; из третьего $x_3 = \frac{6 - x_4}{-8} = \frac{6+2}{-8} = -1$; из второго $x_2 = \frac{-14 - 8x_4 + 10x_3}{-4} = \frac{-14 - 8(-2) + 10(-1)}{-4} = 2$ и из первого уравнения $x_1 = 6 + 2x_4 - 3x_3 - 2x_2 = 6 + 2(-2) - 3(-1) - 2 \cdot 2 = 1$, т.е. решение системы (1; 2; −1; 2). ►

Методом Гаусса решить систему уравнений:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 7, \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 = 3, \\ 4x_1 + x_2 - x_3 = 16. \end{cases}$$

Методом Гаусса решить систему уравнений:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 7, \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 = 3, \\ 4x_1 + x_2 - x_3 = 16. \end{cases}$$

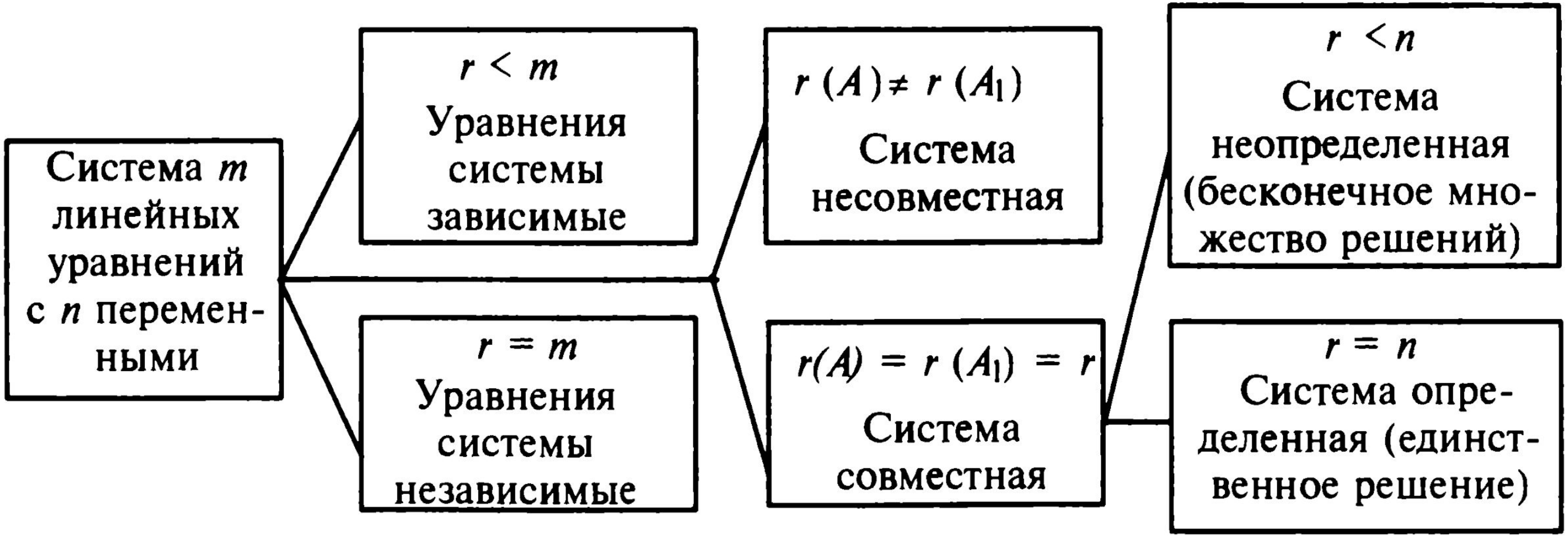
Р е ш е н и е. Преобразуем расширенную матрицу системы

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & -1 & 7 \\ 2 & -3 & 1 & 3 \\ 4 & 1 & -1 & 16 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & -1 & 7 \\ 0 & -7 & 3 & -11 \\ 0 & -7 & 3 & -12 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & -1 & 7 \\ 0 & -7 & 3 & -11 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right).$$

Итак, уравнение, соответствующее третьей строке последней матрицы, противоречиво — оно привелось к неверному равенству $0=-1$, следовательно, данная система несовместна. ▶

Разрешимость системы m линейных уравнений с n переменными

Теорема Кронекера—Капелли. *Система линейных уравнений совместна тогда и только тогда, когда ранг матрицы системы равен рангу расширенной матрицы этой системы.*



Достоинства метода Гаусса

- значительно менее трудоемкий;
- позволяет однозначно установить, совместна система или нет, а в случае совместности найти ее решения (единственное или бесконечное множество);
- дает возможность найти максимальное число линейно независимых уравнений — ранг матрицы системы.

Методом Гаусса решить систему

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 5, \\ x_1 + 2x_2 - 2x_3 + 3x_4 = -6, \\ 3x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = -1. \end{cases}$$

Методом Гаусса решить систему

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 5, \\ x_1 + 2x_2 - 2x_3 + 3x_4 = -6, \\ 3x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = -1. \end{cases}$$

Р е ш е н и е. Преобразуем расширенную матрицу системы (для удобства вычислений берем в качестве первой строки коэффициенты второго уравнения, у которого коэффициент при x_1 равен 1):

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -2 & 3 & -6 \\ 2 & -1 & 1 & -1 & 5 \\ 3 & 1 & -1 & 2 & -1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -2 & 3 & -6 \\ 0 & -5 & 5 & -7 & 17 \\ 0 & -5 & 5 & -7 & 17 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -2 & 3 & -6 \\ 0 & -5 & 5 & -7 & 17 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -2 & 3 & -6 \\ 0 & -5 & 5 & -7 & 17 \end{array}\right),$$ т.е. ранг матрицы системы $r = 2$.

Оставляем в левой части переменные x_1, x_2, которые берем за основные (определитель из коэффициентов при них (базисный минор) отличен от нуля, т.е. $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -5 \end{vmatrix} \neq 0$). Остальные неосновные переменные x_3, x_4 переносим в правые части уравнений. В результате получим систему

$$\begin{cases} x_1 + \quad 2x_2 = \quad -6 + \quad 2x_3 - \quad 3x_4, \\ \qquad\quad -5x_2 = \quad 17 - \quad 5x_3 + \quad 7x_4, \end{cases}$$

откуда

$$x_2 = \frac{17}{5} + x_3 - \frac{7}{5}x_4 \quad \text{и}$$

$$x_1 = -6 + 2x_3 - 3x_4 - 2\left(-\frac{17}{5} + x_3 - \frac{7}{5}x_4\right) = \frac{4}{5} - \frac{1}{5}x_4.$$

Задавая неосновным переменным произвольные значения $x_3 = c_1$, $x_4 = c_2$, найдем бесконечное множество решений системы $\left(x_1 = \frac{4}{5} - \frac{1}{5}c_2;\ x_2 = -\frac{17}{5} + c_1 - \frac{7}{5}c_2;\ x_3 = c_1;\ x_4 = c_2\right)$. ►

Задания

Решить системы уравнения методом обратной матрицы и по формулам Крамера:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 8, \\ -2x_1 + 3x_2 - 3x_3 = -5, \\ 3x_1 - 4x_2 + 5x_3 = 10. \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 - x_3 + 6 = 0, \\ 3x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 5 = 0, \\ x_1 + x_2 + x_3 + 2 = 0. \end{cases}$$

$$\begin{cases} -2x_1 + x_2 + 6 = 0, \\ x_1 - 2x_2 - x_3 = 5, \\ 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 13. \end{cases}$$

Задания

Решить системы уравнений методом Гаусса:

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 = -3, \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 + 4x_4 = 8, \\ x_1 + x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 6, \\ -x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 5x_4 = 3. \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 6, \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 = 0, \\ 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 5, \\ x_1 - x_2 + 3x_3 = 3. \end{cases}$$

Задания

Решить системы уравнений методом Гаусса:

$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 3x_4 = 0, \\ 3x_1 - 2x_2 - x_3 + x_4 = 0, \\ x_1 - x_2 + 2x_3 + 5x_4 = 0. \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1, \\ x_2 - x_3 + 2x_4 = 2, \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_4 = 3. \end{cases}$$

Задания

Решить матричные уравнения:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 7 \\ 8 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

$$X \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 8 \\ 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

$$AXB = C, \text{ если } A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 8 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 7 \\ 6 & 5 & 9 \end{pmatrix}; C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Задания

Найти базисные решения системы уравнений:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 5, \\ 2x_1 - x_2 - 3x_3 = -4. \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 - x_3 - 2x_4 = -4, \\ x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = 1. \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 2, \\ 2x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 = -2, \\ x_1 - x_2 - x_4 = 2. \end{cases}$$