

Теорема Лопиталя

Правило Лопиталя – один из распространенных методов вычисления пределов функций. В его основе лежат несколько теорем, которые для практических нужд можно объединить и сформулировать следующим образом

Теорема. Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ дифференцируемы в окрестности U точки a кроме, может быть, самой точки a и

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0, \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0 \quad (\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty, \lim_{x \rightarrow a} g(x) = \infty)$$

причем $g'(x) \neq 0, \quad \forall x \in U$.

Если существует $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$, тогда существует $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$ и справедливо равенство:

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Замечание. Последнее равенство выполняется и в случаях, когда $a = \infty$.

Примеры применения правила Лопиталья

Рассмотрим несколько примеров, демонстрирующих, как с помощью правила Лопиталья при вычислении пределов раскрываются неопределенности вида

$$\left[\frac{0}{0}\right], \left[\frac{\infty}{\infty}\right], [\infty - \infty], [1^\infty], [\infty^0], [0^0].$$



Пример 1. Найти предел $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x^{10} - 2x^4 - 1}{x^3 - 4x^2 + 3}$.

Решение. При подстановке предельного значения в числитель и знаменатель дроби получим неопределенность вида $\left[\frac{0}{0}\right]$, для вычисления предела применим теорему Лопиталья:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x^{10} - 2x^4 - 1}{x^3 - 4x^2 + 3} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(3x^{10} - 2x^4 - 1)'}{(x^3 - 4x^2 + 3)'} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{30x^9 - 8x^3}{3x^2 - 8x} = -\frac{22}{5}.$$

Для вычисления предела правило Лопиталья можно последовательно применить несколько раз, кроме того, следует применять изученные ранее методы отыскания пределов

Пример 2. Вычислить предел $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x - \sin x}{x^3}$.

Решение. При подстановке предельного значения в числитель и знаменатель дроби получим неопределенность вида $\left[\frac{0}{0}\right]$, для вычисления предела применим теорему Лопиталья:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x - \sin x}{x^3} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{\cos^2 x} - \cos x}{3x^2} = \frac{1}{3} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^3 x}{x^2 \cos^2 x}.$$

Разность кубов в числителе раскладываем на множители $1 - \cos^3 x = (1 - \cos x)(1 + \cos x + \cos^2 x)$, после чего применяем свойство пределов: предел произведения функций равен произведению пределов функций:

$$\begin{aligned} \frac{1}{3} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^3 x}{x^2 \cos^2 x} &= \frac{1}{3} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \cos x)(1 + \cos x + \cos^2 x)}{x^2 \cos^2 x} = \\ &= \frac{1}{3} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + \cos x + \cos^2 x}{\cos^2 x} \end{aligned}$$

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + \cos x + \cos^2 x}{\cos^2 x} = 3$, а в пределе $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}$ после подстановки предельного значения получаем неопределенность $\left[\frac{0}{0}\right]$, поэтому применим правило Лопиталья еще раз:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{2x}.$$

Так как $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ - первый замечательный предел, последний предел равен $\frac{1}{2}$ и искомый предел:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x - \sin x}{x^3} = \frac{1}{3} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + \cos x + \cos^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{3} \cdot 3 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

Пример 3. Вычислить предел $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^\alpha}$.

Решение. Подставляя предельное значение аргумента в числитель и знаменатель дроби, получим неопределенность вида $\left[\frac{\infty}{\infty} \right]$, поэтому для вычисления предела можем применить правило Лопиталья:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^\alpha} = \left[\frac{\infty}{\infty} \right] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\ln x)'}{(x^\alpha)'} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{x}}{\alpha x^{\alpha-1}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\alpha x^\alpha} = 0.$$

Правило Лопиталья можно применять, если требуется, несколько раз.

Пример 4. Вычислить предел $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^n}{e^x}$, $n \in \mathbb{N}$.

Решение. Подставляя предельное значение аргумента в числитель и знаменатель дроби, получим неопределенность вида $\left[\frac{\infty}{\infty} \right]$, условия теоремы Лопиталья выполняются, применим правило n раз:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^n}{e^x} &= \left[\frac{\infty}{\infty} \right] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x^n)'}{(e^x)'} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{nx^{n-1}}{e^x} = \left[\frac{\infty}{\infty} \right] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{n(n-1)x^{n-2}}{e^x} = \dots \\ &\dots = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{n(n-1)(n-2)\dots 2 \cdot x}{e^x} = \left[\frac{\infty}{\infty} \right] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{n!}{e^x} = 0. \end{aligned}$$

Примеры раскрытия неопределенностей

При вычислении пределов вида

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x)g(x) = [0 \cdot \infty] \text{ или } \lim_{x \rightarrow a} [f(x) - g(x)] = [\infty - \infty]$$

непосредственно применять правило Лопиталья нельзя; необходимо предварительно преобразовать произведение функций в отношение функций, так чтобы получить неопределенность $\left[\frac{0}{0}\right]$ или $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$.

Пример 5. Найти $\lim_{x \rightarrow 1} \sin(x-1) \operatorname{tg} \frac{\pi x}{2} = [0 \cdot \infty]$.

Решение. Вычисляем:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \sin(x-1) \operatorname{tg} \frac{\pi x}{2} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin(x-1)}{\operatorname{ctg} \frac{\pi x}{2}} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\cos(x-1)}{-\frac{\pi}{2} \frac{1}{\sin^2 \frac{\pi x}{2}}} = -\frac{2}{\pi} \lim_{x \rightarrow 1} \sin^2 \frac{\pi x}{2} \cos(x-1) = -\frac{2}{\pi}.$$

Пример 6. Найти $\lim_{x \rightarrow 1+0} \left(\frac{1}{\ln x} - \frac{x}{\ln x}\right) = [\infty - \infty]$.

Решение. Вычисляем:

$$\lim_{x \rightarrow 1+0} \left(\frac{1}{\ln x} - \frac{x}{\ln x}\right) = \lim_{x \rightarrow 1+0} \frac{1-x}{\ln x} = \left[\frac{0}{0}\right] = -\lim_{x \rightarrow 1+0} \frac{1}{\frac{1}{x}} = -1.$$

В задачах нахождения пределов $\lim_{x \rightarrow a} f(x)^{g(x)}$, когда возникают неопределенности вида $[1^\infty]$, $[0^0]$ или $[\infty^0]$, сначала необходимо выполнить, например, такое преобразование

$$f(x)^{g(x)} = e^{g(x) \ln f(x)}.$$

В результате этого, получаем неопределенность вида $[0 \cdot \infty]$ и далее раскрываем ее, используя правило Лопиталья.

Пример 7. Найти $\lim_{x \rightarrow +0} x^x = [0^0]$.

Решение. Преобразуем $x^x = e^{x \ln x}$ и вычислим предел показателя:

$$\lim_{x \rightarrow +0} x \ln x = [0 \cdot \infty] = \lim_{x \rightarrow +0} \frac{\ln x}{1/x} = \lim_{x \rightarrow +0} \frac{1/x}{-1/x^2} = - \lim_{x \rightarrow +0} x = 0.$$

$$\lim_{x \rightarrow +0} x^x = e^{\lim_{x \rightarrow +0} x \ln x} = e^0 = 1.$$

Найти $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \cos 2x}{\sin 2x}$

- 0
 - $\frac{1}{2}$
 - ∞
 - 1
 - 2
-

Найти $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x} - 2x}{x - \sin x}$

-1

-2

2

1

0

Найти $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} \frac{\pi x}{2}}{\ln(1-x)}$

- 2
- $\frac{\pi}{2}$
- π
- $-\frac{\pi}{2}$
- $-\pi$

Найти $\lim_{x \rightarrow \infty} x \left(e^{\frac{1}{x}} - 1 \right)$

- 1
- ∞
- 0
- 4
- 1

Найти $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{2(1-\sqrt{x})} - \frac{1}{3(1-\sqrt[3]{x})} \right)$

- 0
 - $\frac{1}{12}$
 - ∞
 - $\frac{1}{4}$
 - $-\frac{1}{3}$
-

Найти $\lim_{x \rightarrow +0} (\arcsin x)^{\operatorname{tg} x}$

- 0
- e
- 1
- ∞
- 1

Найти $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^{\frac{1}{x}}$

- 1
- e
- e^{-1}
- 0
- 1

Найти $\lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{\frac{3}{x^2}}$

- -1
- $e^{\frac{3}{2}}$
- 1
- e^6
- $e^{-\frac{3}{2}}$