Теорема Лопиталя

Правило Лопиталя – один из распространенных методов вычисления пределов функций. В его основе лежат несколько теорем, которые для практических нужд можно объединить и сформулировать следующим образом

Теорема. *Пусть функции* $f(x)$ *и* $g(x)$ *дифференцируемы в окрестности* U *точки* a *кроме, может быть, самой точки* a *и*

$$\lim_{x\to a} f(x) = 0, \lim_{x\to a} g(x) = 0 \quad (\lim_{x\to a} f(x) = \infty, \lim_{x\to a} g(x) = \infty)$$

причем $g'(x) \neq 0, \quad \forall x \in U$.

Если существует $\lim\limits_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$, *тогда существует* $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}$ *и справедливо равенство:*

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Замечание. Последнее равенство выполняется и в случаях, когда $a = \infty$.

Примеры применения правила Лопиталя

Рассмотрим несколько примеров, демонстрирующих, как с помощью правила Лопиталя при вычислении пределов раскрываются неопределенности вида

$$\left[\frac{0}{0}\right],\ \left[\frac{\infty}{\infty}\right],\ [\infty-\infty],\ [1^{\infty}],\ [\infty^{0}],\ [0^{0}].$$

Пример 1. Найти предел $\lim\limits_{x\to1}\frac{3x^{10}-2x^4-1}{x^3-4x^2+3}$.

Р е ш е н и е. При подстановке предельного значения в числитель и знаменатель дроби получим неопределенность вида $\left[\frac{0}{0}\right]$, для вычисления предела применим теорему Лопиталя:

$$\lim_{x\to1}\frac{3x^{10}-2x^4-1}{x^3-4x^2+3}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to1}\frac{(3x^{10}-2x^4-10)'}{(x^3-4x^2+3)'}=\lim_{x\to1}\frac{30x^9-8x^3}{3x^2-8x}=-\frac{22}{5}.$$

Для вычисления предела правило Лопиталя можно последовательно применить несколько раз, кроме того, следует применять изученные ранее методы отыскания пределов

Пример 2. Вычислить предел $\lim\limits_{x\to0}\frac{\mathrm{tg}x-\sin x}{x^3}$.

Р е ш е н и е. При подстановке предельного значения в числитель и знаменатель дроби получим неопределенность вида $\left[\frac{0}{0}\right]$, для вычисления предела применим теорему Лопиталя:

$$\lim_{x\to0}\frac{\mathrm{tg}x-\sin x}{x^3}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to0}\frac{\frac{1}{\cos^2 x}-\cos x}{3x^2}=\frac{1}{3}\lim_{x\to0}\frac{1-\cos^3 x}{x^2\cos^2 x}.$$

Разность кубов в числителе раскладываем на множители $1-\cos^3 x=(1-\cos x)(1+\cos x+\cos^2 x)$, после чего применяем свойство пределов: предел произведения функций равен произведению пределов функций:

$$\frac{1}{3}\lim_{x\to0}\frac{1-\cos^3 x}{x^2\cos^2 x}=\frac{1}{3}\lim_{x\to0}\frac{(1-\cos x)(1+\cos x+\cos^2 x)}{x^2\cos^2 x}=$$

$$=\frac{1}{3}\lim_{x\to0}\frac{1-\cos x}{x^2}\lim_{x\to0}\frac{1+\cos x+\cos^2 x}{\cos^2 x}$$

$\lim\limits_{x\to0}\frac{1+\cos x+\cos^2 x}{\cos^2 x}=3$, а в пределе $\lim\limits_{x\to0}\frac{1-\cos x}{x^2}$ после подстановки предельного значения получаем неопределенность $\left[\frac{0}{0}\right]$, поэтому применим правило Лопиталя еще раз:

$$\lim_{x\to0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{2x}.$$

Так как $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin x}{x}=1$ - первый замечательный предел, последний предел равен $\frac{1}{2}$ и искомый предел:

$$\lim_{x\to0}\frac{\mathrm{tg}x-\sin x}{x^3}=\frac{1}{3}\lim_{x\to0}\frac{1-\cos x}{x^2}\lim_{x\to0}\frac{1+\cos x+\cos^2 x}{\cos^2 x}=\frac{1}{3}\cdot3\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{2}.$$

Пример 3. Вычислить предел $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x^{\alpha}}$.

Р е ш е н и е. Подставляя предельное значение аргумента в числитель и знаменатель дроби, получим неопределенность вида $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$, поэтому для вычисления предела можем применить правило Лопиталя:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x^{\alpha}} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{x \to +\infty} \frac{(\ln x)'}{(x^{\alpha})'} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\frac{1}{x}}{\alpha x^{\alpha-1}} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{\alpha x^{\alpha}} = 0.$$

Правило Лопиталя можно применять, если требуется, несколько раз.

Пример 4. Вычислить предел $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x^{n}}{e^{x}}$, $n \in \mathbf{N}$.

Р е ш е н и е. Подставляя предельное значение аргумента в числитель и знаменатель дроби, получим неопределенность вида $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$, условия теоремы Лопиталя выполняются, применим правило n раз:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^{n}}{e^{x}} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{x \to +\infty} \frac{\left(x^{n}\right)'}{\left(e^{x}\right)'} = \lim_{x \to +\infty} \frac{nx^{n-1}}{e^{x}} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{x \to +\infty} \frac{n(n-1)x^{n-2}}{e^{x}} = \ldots$$

$$\ldots = \lim_{x \to +\infty} \frac{n(n-1)(n-2)\ldots 2 \cdot x}{e^{x}} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{x \to +\infty} \frac{n!}{e^{x}} = 0.$$

Примеры раскрытия неопределенностей

При вычислении пределов вида

$$\lim_{x\to a} f(x)g(x) = [0\cdot\infty] \text{ или } \lim_{x\to a}[f(x)-g(x)] = [\infty-\infty]$$

непосредственно применять правило Лопиталя нельзя; необходимо предварительно преобразовать произведение функций в отношение функций, так чтобы получить неопределенность $\left[\frac{0}{0}\right]$ или $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$.

Пример 5. Найти $\lim\limits_{x\to 1}\sin(x-1)\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2} = [0\cdot\infty]$.

Р е ш е н и е. Вычисляем:

$$\lim_{x\to 1}\sin(x-1)\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2} = \lim_{x\to 1}\frac{\sin(x-1)}{\operatorname{ctg}\frac{\pi x}{2}} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x\to 1}\frac{\cos(x-1)}{-\frac{\pi}{2}\frac{1}{\sin^2\frac{\pi x}{2}}} = -\frac{2}{\pi}\lim_{x\to 1}\sin^2\frac{\pi x}{2}\cos(x-1) = -\frac{2}{\pi}.$$

Пример 6. Найти $\lim\limits_{x\to 1+0}\left(\frac{1}{\ln x}-\frac{x}{\ln x}\right) = [\infty-\infty]$.

Р е ш е н и е. Вычисляем:

$$\lim_{x\to 1+0}\left(\frac{1}{\ln x}-\frac{x}{\ln x}\right) = \lim_{x\to 1+0}\frac{1-x}{\ln x} = \left[\frac{0}{0}\right] = -\lim_{x\to 1+0}\frac{1}{\frac{1}{x}} = -1.$$

В задачах нахождения пределов $\lim\limits_{x \to a} f(x)^{g(x)}$, когда возникают неопределенности вида $[1^\infty]$, $[0^0]$ или $[\infty^0]$, сначала необходимо выполнить, например, такое преобразование

$$f(x)^{g(x)} = e^{g(x) \ln f(x)}.$$

В результате этого, получаем неопределенность вида $[0 \cdot \infty]$ и далее раскрываем ее, используя правило Лопиталя.

Пример 7. Найти $\lim\limits_{x \to +0} x^x = [0^0]$.

Р е ш е н и е. Преобразуем $x^x = e^{x \ln x}$ и вычислим предел показателя:

$$\lim_{x \to +0} x \ln x = [0 \cdot \infty] = \lim_{x \to +0} \frac{\ln x}{1/x} = \lim_{x \to +0} \frac{1/x}{-1/x^2} = -\lim_{x \to +0} x = 0.$$

$$\lim_{x \to +0} x^x = e^{\lim\limits_{x \to +0} x \ln x} = e^0 = 1.$$

Найти $\lim_{x \to 0} \frac{\ln \cos 2x}{\sin 2x}$

- 0
- $\frac{1}{2}$
- ∞
- 1
- 2

Найти $\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^x - e^{-x} - 2x}{x - \sin x}$

- -1
- -2
- 2
- 1
- 0

Найти $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2}}{\ln(1-x)}$

- 2
- $\frac{\pi}{2}$
- π
- $-\frac{\pi}{2}$
- $-\pi$

Найти $\lim\limits_{x\to\infty} x\left(e^{\frac{1}{x}}-1\right)$

- 1
- ∞
- 0
- 4
- -1

Найти $\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{1}{2(1-\sqrt{x})}-\frac{1}{3(1-\sqrt[3]{x})}\right)$

- 0
- $\frac{1}{12}$
- ∞
- $\frac{1}{4}$
- $-\frac{1}{3}$

Найти $\lim\limits_{x \to +0} (\arcsin x)^{\operatorname{tg} x}$

- 0
- e
- -1
- ∞
- 1

Найти $\lim\limits_{x \to +\infty} x^{\frac{1}{x}}$

- 1
- e
- e^{-1}
- 0
- -1

Найти $\lim\limits_{x\to 0} (\cos x)^{\frac{3}{x^2}}$

- -1
- $e^{\frac{3}{2}}$
- 1
- e^{6}
- $e^{-\frac{3}{2}}$