

Лекция 5. Счетные и
несчетные множества.
Алгебраические структуры

Счетные множества

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5.1 Множество, равномощное множеству N , называется *счетным*.

Иными словами счетными являются такие множества, элементы которых можно занумеровать натуральными числами.

Подтверждением высказанного странного утверждения о «малости» такой бесконечности являются следующие результаты.

ТЕОРЕМА 5.2. Во всяком бесконечном множестве содержится счетное подмножество.

Доказательство. Пусть множество A бесконечное. Поскольку оно непустое, выберем в нем какой-нибудь элемент a_1 .

Множество $A \setminus \{a_1\}$ бесконечно, поскольку при удалении одного элемента множество не может из бесконечного стать конечным. Выберем в нем какой-нибудь элемент a_2 .

Множество $A \setminus \{a_1, a_2\}$ также бесконечно. Выберем в нем какой-нибудь элемент a_3 .

Этот процесс продолжается неограниченно. В результате получаем множество $\{a_1, a_2, a_3, \dots\}$ – счетное подмножество A , что и требовалось.

ТЕОРЕМА 5.3. Всякое бесконечное подмножество счетного множества является счетным.

Доказательство. Пусть $A \subset B$, причем множества A – бесконечное, а B – счетное. По предыдущей теореме в A существует счетное подмножество C . Тогда $|C| \leq |A| \leq |B|$, причем $|C| = |B|$ (оба множества счетные). В силу антисимметричности отношения порядка мощностей, отсюда $|C| = |A| = |B|$, т.е. множество A счетное, что и требовалось.

ТЕОРЕМА 5.4. Объединение счетного числа счетных множеств является счетным.

Доказательство. Пусть каждое из множеств $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$ счетное. Можно считать, что эти множества попарно не пересекаются (в противном случае повторяющиеся элементы можно удалить). Расположим эти множества в виде таблицы

$A_1:$	a_{11}	a_{12}	a_{13}	a_{14}	a_{15}	...
$A_2:$	a_{21}	a_{22}	a_{23}	a_{24}	a_{25}	...
$A_3:$	a_{31}	a_{32}	a_{33}	a_{34}	a_{35}	...
$A_4:$	a_{41}	a_{42}	a_{43}	a_{44}	a_{45}	...
$A_5:$	a_{51}	a_{52}	a_{53}	a_{54}	a_{55}	...
...

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$$

Выпишем элементы объединения $i=1$ в следующем порядке:

$a_{11}, a_{21}, a_{12}, a_{31}, a_{22}, a_{13}, a_{41}, a_{32}, a_{23}, a_{14}, \dots$

$A_1:$	a_{11}	a_{12}	a_{13}	a_{14}	a_{15}	...
$A_2:$	a_{21}	a_{22}	a_{23}	a_{24}	a_{25}	...
$A_3:$	a_{31}	a_{32}	a_{33}	a_{34}	a_{35}	...
$A_4:$	a_{41}	a_{42}	a_{43}	a_{44}	a_{45}	...
$A_5:$	a_{51}	a_{52}	a_{53}	a_{54}	a_{55}	...
...

Занумеруем все эти элементы последовательно. (Каким будет номер элемента a_{ij} ?). Теорема доказана.

Следствие. Множество рациональных чисел \mathbb{Q} счетное.

Доказательство. Рациональные числа это числа, которые представимы в виде $\frac{p}{q}$, где числа p, q целые, $q \neq 0$. Достаточно проверить утверждение для положительных рациональных чисел

(почему?). $\mathbb{Q} = \bigcup_{q=1}^{\infty} Q_q$, где

$Q_q = \left\{ \frac{1}{q}, \frac{2}{q}, \frac{3}{q}, \dots \right\}$. Таким образом, множество положительных рациональных чисел является объединением счетного семейства счетных множеств, т.е. счетное.

Теорема 5.5. Множество \mathbb{Q} рациональных чисел счетно.

Доказательство. Для каждого рационального числа вида $\frac{p}{q}$, где

$p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}$ введем понятие «веса» $h = |p| + q$. Тогда все множество рациональных чисел разобьется на непересекающиеся подмножества чисел с одинаковым весом:

$$h = 1 : \frac{0}{1}$$

$$h = 2 : \frac{0}{2}, \frac{1}{1}, \frac{-1}{1}$$

$$h = 3 : \frac{0}{3}, \frac{1}{2}, \frac{-1}{2}, \frac{2}{1}, \frac{-2}{1}$$

....

Расположим числа

- 1) в порядке возрастания веса
 - 2) с одинаковым весом – в порядке убывания знаменателей
 - 3) с одинаковыми знаменателями – в порядке убывания числителей
- и занумеруем их в этом порядке. Если нам мешает «повторяемость» рациональных чисел – можно в дальнейшем их перенумеровать, убрав одинаковые.

Теорема доказана.

Для доп. баллов – определить номер произвольного рационального

$\frac{p}{q}$ в этой схеме |

НЕКОТОРЫЕ СВОЙСТВА БЕСКОНЕЧНЫХ МНОЖЕСТВ

Уже отмечалось, что конечное множество не равномощно своей части, в то же время, бесконечное множество *может быть* равномощным своей части. Оказывается, это характеристическое свойство бесконечных множеств.

Теорема 5.6. Всякое бесконечное множество равномощно некоторой своей части.

Доказательство. Пусть A – бесконечное множество. По Теореме 5.2 существует счетное множество $\{a_1, a_2, \dots\} \subseteq A$. Не исключается случай равенства этих множеств! Построим следующее отображение:

$$f(x) = x \text{ при } x \notin \{a_1, a_2, \dots\}, f(a_i) = a_{i+1} (i=1, 2, \dots).$$

Очевидно, что f – взаимно однозначное соответствие между A и $A \setminus \{a_1\}$, что и требовалось доказать.

Теорема 4.12 утверждает, что множество $[0,1]$ «массивнее» множества N . Между этими двумя множествами существует тесная связь.

Теорема 5.7 $|[0,1]| = \mathcal{B}(N)$

Доказательство. Для доказательства надо установить взаимно однозначное соответствие между булеаном множества N и отрезком $[0,1]$. Нам потребуется запись чисел из отрезка $[0,1]$ в двоичной системе счисления, т.е. в виде $0,a_1a_2\dots a_n\dots$, где $a_n=0$ или 1 при $n=1,2,\dots$ (вам известно, как число представить в таком виде?). Пусть $A \subset N$. Сопоставим ему число в двоичной записи, где $a_n = 1$ тогда и только тогда, когда $n \in A$, (например, подмножеству $\{1,2,5\}$ соответствует число $0,11001$). По числу множество A восстанавливается однозначно, т.е. установлено взаимно однозначное соответствие между множеством записей вида и множеством $\mathcal{B}(N)$.

Мощность точек отрезка $[0,1]$ называется *мощностью континуума*. Принято обозначать мощность счетного множества символом \aleph_0 (древнееврейская буква «алеф»), а мощность континуума \aleph . Мощности бесконечных (в некоторых источниках и конечных) чисел называют еще *кардинальными числами*.

По теореме 4.13 (первой теореме Кантора) мощность \aleph_0 счетных множеств меньше мощности континуума: $\aleph_0 < \aleph$.

Есть ли между \aleph_0 и \aleph другие кардинальные числа – знаменитая *проблема (гипотеза) континуума* в математике, которая в 1963 г. была решена американским математиком П. Коэном. Он доказал независимость гипотезы континуума от других аксиом теории множеств. Проблема континуума решается аналогично проблеме пятого постулата Евклида в геометрии. Ни утверждение проблемы, ни отрицание ее из аксиоматики теории множеств доказать нельзя. Если в качестве аксиомы взять, что между \aleph_0 и \aleph есть другие кардинальные числа, то возникает одна ветвь математики, если нет, то другая, совершенно независимая.

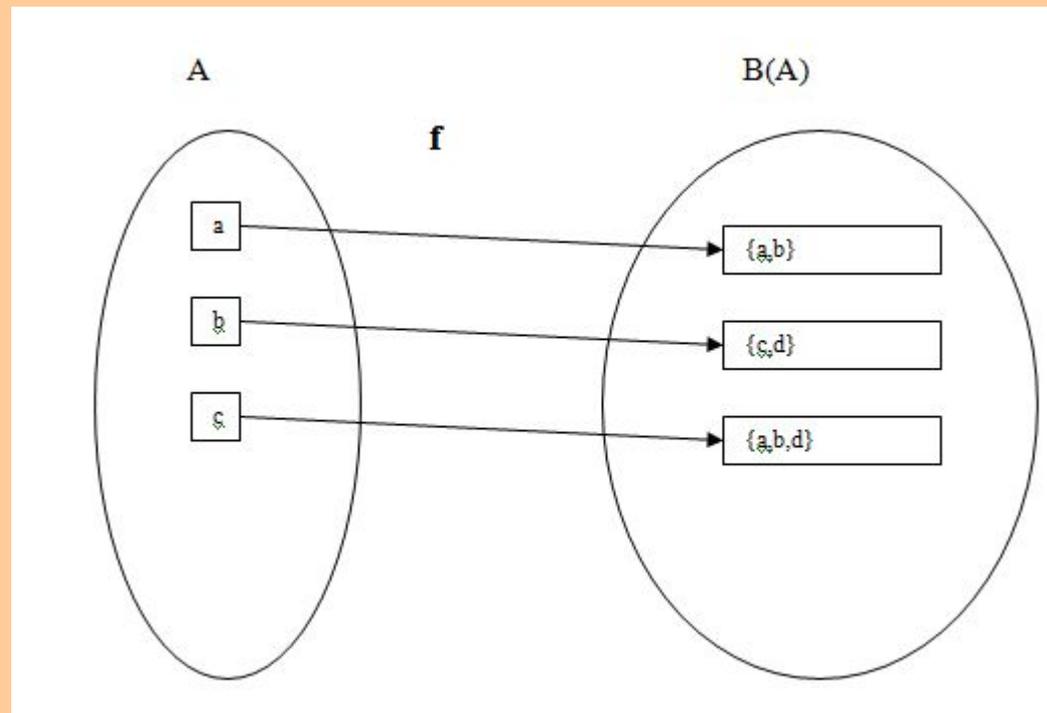
Теорема 6.5. (Вторая теорема Кантора) $|A| < |\mathfrak{B}(A)|$ для всякого множества A .

Отметим, что в частных случаях этот факт вам уже известен: для конечных множеств это теорема 2.1, для счетных – теорема 5.10.

Доказательство в некотором смысле аналогично диагональному методу Кантора.

Вначале проверим, что $|A| \leq |\mathfrak{B}(A)|$ (легкая часть). Рассмотрим подмножество $U \subset \mathfrak{B}(A)$, состоящее из одноэлементных множеств, $|A| = |U|$, поскольку отображение $f: A \rightarrow U$, имеющее вид $f(a) = \{a\}$, является взаимно однозначным соответствием. Итак, в $\mathfrak{B}(A)$ есть подмножество, равномощное A , что и требовалось.

Докажем теперь, что $|A| \neq |\mathcal{B}(A)|$ (трудная часть). Доказательство будем проводить от противного. Пусть напротив $|A| = |\mathcal{B}(A)|$. Это значит, что существует взаимно однозначное отображение $f: A \rightarrow \mathcal{B}(A)$. Важно, что любое подмножество A является образом некоторого элемента множества A ! Для каждого элемента $a \in A$ выполняется одно из двух свойств: либо $a \in f(a)$, либо $a \notin f(a)$. Если $a \in f(a)$, назовем элемент a – правильным, если же $a \notin f(a)$ – назовем элемент особым.

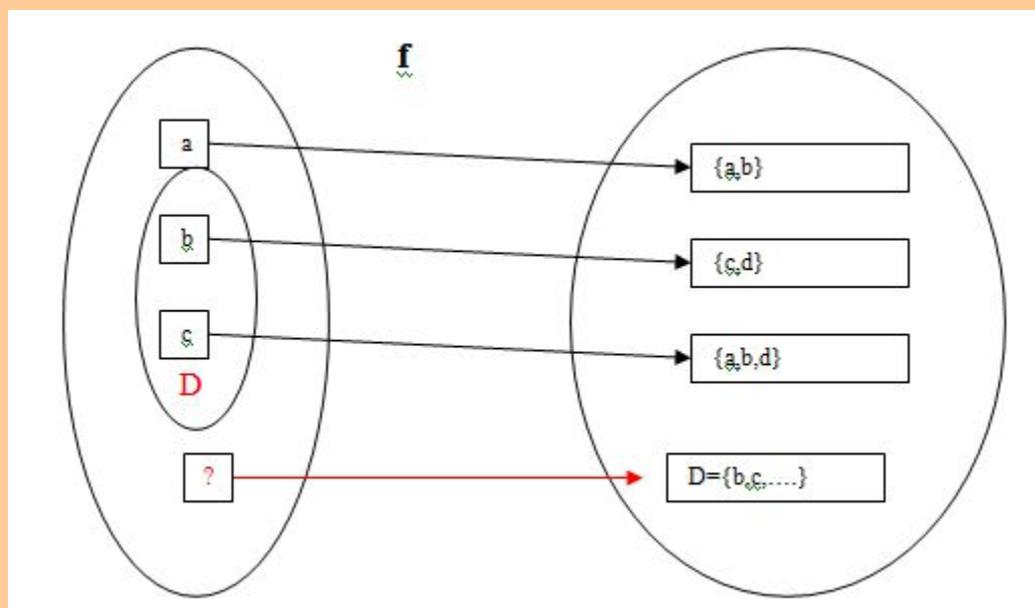


Пусть D – множество всех особых элементов, то есть $D = \{x \mid x \notin f(x)\}$. Очевидно, D является подмножеством A . По предположению о существовании биекции в множестве A должен найтись элемент d , соответствующий подмножеству D , $f(d) = D$. Рассмотрим вопрос о принадлежности этого элемента d своему образу D .

Если $d \in D$, то по определению D он не должен принадлежать своему образу! – получили противоречие.

Если же $d \notin D$, то он является особым и должен входить в D ! – снова противоречие.

Значит, предположение о существовании биекции между множеством и его булеаном было неверным.



Задачи на установление кардинальных чисел

Доказать, что множество

всех многочленов n -й степени от x с рациональными коэффициентами счётно

Каждый такой многочлен имеет вид

$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$, то есть может быть описан $n+1$

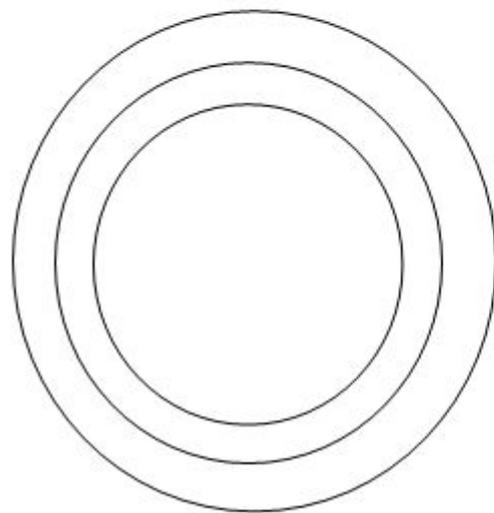
рациональным числом $(a_n, a_{n-1}, \dots, a_1, a_0)$. Множество таких наборов есть объединение счетного числа конечных множеств.

Почему это объединение счетного числа? Потому что множество этих наборов есть декартово произведение \mathbb{Q}^{n+1} множества рациональных чисел. А по теореме 5.4 объединение счетного числа счетных (а тем более конечных) множеств счётно.

Доказать, что множество

непересекающихся окружностей на плоскости может быть континуально

Возьмем на плоскости произвольную окружность радиуса a . Нарисуем внутри нее множество концентрических с ней (с одним и тем же центром) окружностей всевозможных радиусов. Радиусы есть действительные числа, поэтому каждой такой окружности соответствует действительное число. То есть между окружностями и действительными числами из промежутка $(a,0)$ можно установить биекцию. Поскольку множество действительных чисел на этом промежутке континуально, то и множество окружностей континуально.



Алгебраические структуры

Алгебраические операции и их свойства

Бинарные и n -местные алгебраические операции

Пусть A – непустое множество.

Определение 5.9. Отображение множества $A \times A$ в A называется бинарной алгебраической операцией на множестве A .

Примерами бинарных алгебраических операций являются обычное сложение и умножение на множестве целых чисел, объединение и пересечение на булеане непустого множества.

Определение 5.10. Отображение множества A^n в A называется n -арной (n -местной) алгебраической операцией на множестве A , а число n ($n \geq 1$) – рангом операции. Выделение (фиксация) некоторого элемента множества A называется нулевой (нульместной) операцией на множестве A , число 0 – рангом нулевой операции.

Определение 5.11. Частичная функция из множества A^n в A называется частичной n -арной алгебраической операцией на множестве A .

Пример **5.12** 1. Пусть $A \neq \emptyset$. Отображение, ставящее в соответствие каждому подмножеству $X \in \mathcal{P}(A)$ его дополнение \overline{X} , является унарной алгебраической операцией на $\mathcal{P}(A)$.

2. Операция деления рациональных чисел является частичной бинарной алгебраической операцией на множестве рациональных чисел.

3. Операция, ставящая в соответствие каждому кортежу натуральных чисел длины n наибольший общий делитель этих чисел, является n -арной алгебраической операцией на множестве N .

Для обозначения n -арной алгебраической операции используется та же форма записи, что и для произвольных отображений. Если f есть n -арная алгебраическая операция на множестве A и $((x_1, x_2, \dots, x_n), x_{n+1}) \in f$, то пишут $x_{n+1} = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ и говорят, что x_{n+1} является значением операции f при значениях аргументов x_1, x_2, \dots, x_n .

Свойства бинарных алгебраических операций

Пусть $*$ и \circ – произвольные бинарные алгебраические операции на непустом множестве A .

Определение 4.4. Бинарная алгебраическая операция $*$ называется коммутативной, если $(\forall a, b \in A) \underline{a} * b = b * \underline{a}$.

Определение 4.5. Бинарная алгебраическая операция $*$ называется ассоциативной, если $(\forall a, b, c \in A) \underline{a} * (b * \underline{c}) = (\underline{a} * b) * \underline{c}$.

Если операция $*$ ассоциативна, то можно опускать скобки и писать $\underline{a} * b * c$ вместо $\underline{a} * (b * c)$ или $(\underline{a} * b) * c$.

Определение 4.6. Бинарная алгебраическая операция \circ называется дистрибутивной относительно бинарной операции $*$, если

$$(\forall a, b, c \in A) (\underline{a} * b) \circ c = (a \circ c) * (b \circ c) \text{ и } c \circ (a * b) = (c \circ a) * (c \circ b).$$

Пример 5.13. 1. Сложение и умножение действительных чисел являются коммутативными и ассоциативными бинарными алгебраическими операциями. Умножение действительных чисел дистрибутивно относительно сложения, но сложение не дистрибутивно относительно умножения, так как условие $(\forall a, b, c \in \mathbb{A}) a + b \cdot c = (a + b) \cdot c$ не выполняется.

2. Операции объединения и пересечения подмножеств непустого множества A коммутативны, ассоциативны и дистрибутивны относительно друг друга на булеане $P(A)$.

3. Композиция функций есть ассоциативная бинарная алгебраическая операция. Композиция функций не коммутативна, так как условие $(\forall f, g) f \circ g = g \circ f$ не выполняется.

Нейтральные элементы

Пусть $*$ – бинарная алгебраическая операция на непустом множестве A .

Определение 5.14. Элемент $e \in A$ называется нейтральным относительно операции $*$, если $(\forall a \in A) a * e = e * a = a$.

Теорема 5.15. Если нейтральный элемент относительно операции $*$ существует, то он единственен.

Доказательство. Пусть e и e' – нейтральные элементы относительно операции $*$. Тогда $e = e * e' = e'$, то есть $e = e'$.

Пример 5.16. 1. Число 0 есть нейтральный элемент относительно сложения действительных чисел. Число 1 есть нейтральный элемент относительно умножения действительных чисел.

2. На булеане $P(A)$ пустое множество является нейтральным элементом относительно объединения подмножеств непустого множества A , а $P(A)$ – нейтральным элементом относительно пересечения подмножеств.

Симметричные элементы

Пусть $*$ есть бинарная алгебраическая операция на непустом множестве A и элемент $e \in A$ – нейтральный элемент относительно $*$.

Определение **5.17.** Элемент $a' \in A$ называется симметричным к элементу $a \in A$ относительно операции $*$, если $a * a' = a' * a = e$. В этом случае элемент a называется симметризуемым, а элементы a и a' – взаимно симметричными.

Пример **5.18.** 1. Любое целое число имеет симметричный к нему элемент относительно сложения – то же число, взятое со знаком минус.

2. Любое ненулевое действительное число a имеет симметричный к нему элемент $\frac{1}{a}$, число нуль не имеет симметричного элемента относительно умножения.

Теорема 5.18. Если операция $*$ ассоциативна и элемент a симметризуем, то существует единственный элемент, симметричный к a .

Доказательство. Пусть a', a'' есть элементы, симметричные к элементу a относительно $*$. Следовательно, $a * a' = a' * a = e$ и $a * a'' = a'' * a = e$. Тогда в силу ассоциативности операции $*$ получаем

$$a' = a' * e = a' * (a * a'') = (a' * a) * a'' = e * a'' = a'', \text{ то есть } a' = a''.$$

Подмножества, замкнутые относительно бинарной алгебраической операции

Пусть $*$ – бинарная алгебраическая операция на непустом множестве A .

Определение 5.20. Подмножество B множества A называется замкнутым относительно операции $*$, если $(\forall a, b \in B) a * b \in B$.

Пустое множество замкнуто относительно любой операции $*$.

Пример 5.21. Сложение и вычитание являются бинарными алгебраическими операциями на множестве всех действительных чисел. Множество всех положительных действительных чисел замкнуто относительно сложения, но не замкнуто относительно вычитания.

Аддитивная и мультипликативная форма записи бинарной алгебраической операции

Для обозначения бинарной алгебраической операции $*$ наиболее часто используются аддитивная и мультипликативная формы записи. При аддитивной форме записи операцию $*$ называют сложением, а ее результат $a * b$ – суммой a и b . При этом вместо $a * b$ пишут $a + b$. Нейтральный элемент относительно сложения называют нулевым элементом (или нулем) и обозначают символом 0 .

Элемент, симметричный к элементу a , называют противоположным к элементу a и обозначают через $-a$.

При мультипликативной форме записи операцию $*$ называют умножением, а ее результат $a * b$ – произведением a и b . При этом вместо $a * b$ пишут $a \cdot b$. Нейтральный элемент относительно умножения называют единичным элементом (или единицей) и обозначают символом 1 . Элемент, симметричный к элементу a , называют обратным к элементу a и обозначают через a^{-1} .

Понятие алгебраической структуры

Определение 5.22. Алгебраической структурой (универсальной алгеброй или просто алгеброй) называется упорядоченная пара $A = \langle A, \Sigma \rangle$, где A – непустое множество и Σ – множество алгебраических операций на A .

Таким образом, алгебра представляет собой непустое множество A вместе с заданной на нем совокупностью операций $\Sigma = \{f_1, \dots, f_m, \dots\}$, где $f_i: A^{n_i} \rightarrow A$ и n_i – ранг операции f_i . Множество A называется основным (несущим) множеством или основой (носителем) алгебры; упорядоченная последовательность рангов (n_1, \dots, n_m) называется типом алгебры; множество операций Σ называется сигнатурой алгебры.

Если $\langle A, \Sigma \rangle$ – алгебра, то также говорят, что множество A есть алгебра относительно операций Σ .

Наиболее частым является случай, когда сигнатура конечна. Если $\Sigma = \{f_1, \dots, f_m\}$, то вместо записи $A = \langle A, \{f_1, \dots, f_m\} \rangle$ обычно употребляется запись $A = \langle A, f_1, \dots, f_m \rangle$.