Лекция 5. Счетные и несчетные множества. Алгебраические структуры

Счетные множества

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5.1 Множество, равномощное множеству N, называется *счетным*.

Иными словами счетными являются такие множества, элементы которых можно занумеровать натуральными числами.

Подтверждением высказанного странного утверждения о «малости» такой бесконечности являются следующие результаты.

ТЕОРЕМА 5.2. Во всяком бесконечном множестве содержится счетное подмножество.

Доказательство. Пусть множество A бесконечное. Поскольку оно непустое, выберем в нем какой-нибудь элемент a_1.

Множество $A\setminus\{a_1\}$ бесконечное, поскольку при удалении одного элемента множество не может из бесконечного стать конечным. Выберем в нем какой-нибудь элемент a_2.

Множество $A\setminus\{a_1, a_2\}$ также бесконечное. Выберем в нем какой-нибудь элемент a_3.

Этот процесс продолжается неограниченно. В результате получаем множество $\{a_1, a_2, a_3, \ldots\}$ – счетное подмножество A, что и требовалось.

Теорема 5.3. Всякое бесконечное подмножество счетного множества является счетным.

Доказательство. Пусть $A \subset B$, причем множества A – бесконечное, а B – счетное. По предыдущей теореме в A существует счетное подмножество C. Тогда $|C| \leq |A| \leq |B|$, причем $|C| = |B|$ (оба множества счетные). В силу антисимметричности отношения порядка мощностей, отсюда $|C| = |A| = |B|$, т.е. множество A счетное, что и требовалось.

Теорема 5.4. Объединение счетного числа счетных множеств является счетным.

Доказательство. Пусть каждое из множеств $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots$ счетное. Можно считать, что эти множества попарно не пересекаются (в противном случае повторяющиеся элементы можно удалить). Расположим эти множества в виде таблицы

A_1:	a_{11}	a_{12}	a_{13}	a_{14}	a_{15}	…
A_2:	a_{21}	a_{22}	a_{23}	a_{24}	a_{25}	…
A_3:	a_{31}	a_{32}	a_{33}	a_{34}	a_{35}	…
A_4:	a_{41}	a_{42}	a_{43}	a_{44}	a_{45}	…
A_5:	a_{51}	a_{52}	a_{53}	a_{54}	a_{55}	…
…	…	…	…	…	…	…

Выпишем элементы объединения $\bigcup_{i=1} A_i$ в следующем порядке:

$a_{11}, a_{21}, a_{12}, a_{31}, a_{22}, a_{13}, a_{41}, a_{32}, a_{23}, a_{14}, \ldots$.

A_1:	a_{11}	a_{12}	a_{13}	a_{14}	a_{15}	…
A_2:	a_{21}	a_{22}	a_{23}	a_{24}	a_{25}	…
A_3:	a_{31}	a_{32}	a_{33}	a_{34}	a_{35}	…
A_4:	a_{41}	a_{42}	a_{43}	a_{44}	a_{45}	…
A_5:	a_{51}	a_{52}	a_{53}	a_{54}	a_{55}	…
…	…	…	…	…	…	…

Занумеруем все эти элементы последовательно. (Каким будет номер элемента a_{ij}?). Теорема доказана.

Следствие. Множество рациональных чисел Q счетное.

Доказательство. Рациональные числа это числа, которые представимы в виде $\frac{p}{q}$, где числа p,q целые, $q\neq 0$. Достаточно проверить утверждение для положительных рациональных чисел (почему?). $Q=\bigcup_{q=1}^{\infty} Q_q$, где $Q_q=\left\{\frac{1}{q},\frac{2}{q},\frac{3}{q},\dots\right\}$. Таким образом, множество положительных рациональных чисел является объединением счетного семейства счетных множеств, т.е. счетное.

Теорема 5.5.. Множество Q рациональных чисел счетно.

Доказательство. Для каждого рационального числа вида $\frac{p}{q}$, где $p \in Z$, $q \in N$ введем понятие «веса» $h = |p| + q$. Тогда все множество рациональных чисел разобьется на непересекающиеся подмножества чисел с одинаковым весом:

$h = 1 \quad : \quad \frac{0}{1}$

$h = 2 \quad : \quad \frac{0}{2}, \frac{1}{1}, \frac{-1}{1}$

$h = 3 \quad : \quad \frac{0}{3}, \frac{1}{2}, \frac{-1}{2}, \frac{2}{1}, \frac{-2}{1}$

....

Расположим числа

1) в порядке возрастания веса

2) с одинаковым весом – в порядке убывания знаменателей

3) с одинаковыми знаменателями – в порядке убывания числителей

и занумеруем их в этом порядке. Если нам мешает «повторяемость» рациональных чисел – можно в дальнейшем их перенумеровать, убрав одинаковые.

Теорема доказана.

Для доп.баллов – определить номер произвольного рационального $\frac{p}{q}$ в этой схеме.

Некоторые свойства бесконечных множеств

Уже отмечалось, что конечное множество не равномощно своей части, в то же время, бесконечное множество *может быть* равномощным своей части. Оказывается, это характеристическое свойство бесконечных множеств.

Теорема 5.6. Всякое бесконечное множество равномощно некоторой своей части.

Доказательство. Пусть A – бесконечное множество. По Теореме 5.2 существует счетное множество $\{a_1, a_2, \ldots\} \subseteq A$. Не исключается случай равенства этих множеств! Построим следующее отображение:

$$f(x) = x \text{ при } x \notin \{a_1, a_2, \ldots\}, f(a_i) = a_{i+1} \ (i=1,2,\ldots).$$

Очевидно, что f – взаимно однозначное соответствие между A и $A \setminus \{a_1\}$, что и требовалось доказать.

Теорема 4.12 утверждает, что множество [0,1] «массивнее» множества N. Между этими двумя множествами существует тесная связь.

Теорема 5.7 $|[0,1]| = B(N)$

Доказательство. Для доказательства надо установить взаимно однозначное соответствие между булеаном множества N и отрезком [0,1]. Нам потребуется запись чисел из отрезка [0,1] в двоичной системе счисления, т.е. в виде $0,a_1a_2\ldots a_n\ldots$, где a_n=0 или 1 при n=1,2,… (вам известно, как число представить в таком виде?). Пусть $A\subset N$. Сопоставим ему число в двоичной записи, где $a_n = 1$ тогда и только тогда, когда $n\in A$,(например, подмножеству {1,2,5} соответствует число 0,11001). По числу множество A восстанавливается однозначно, т.е. установлено взаимно однозначное соответствие между множеством записей вида и множеством $\mathfrak{B}(N)$.

Мощность точек отрезка [0,1] называется *мощностью континуума*. Принято обозначать мощность счетного множества символом $\aleph_0$ (древнееврейская буква «алеф»), а мощность континуума $\aleph$. Мощности бесконечных (в некоторых источниках и конечных) чисел называют еще *кардинальными числами*.

По теореме 4.13 (первой теореме Кантора) мощность $\aleph_0$ счетных множеств меньше мощности континуума : $\aleph_0 < \aleph$.

Есть ли между $\aleph_0$ и $\aleph$ другие кардинальные числа – знаменитая *проблема* (*гипотеза*) *континуума* в математике, которая в 1963 г. была решена американским математиком П. Коэном. Он доказал независимость гипотезы континуума от других аксиом теории множеств. Проблема континуума решается аналогично проблеме пятого постулата Евклида в геометрии. Ни утверждение проблемы, ни отрицание ее из аксиоматики теории множеств доказать нельзя. Если в качестве аксиомы взять, что между $\aleph_0$ и $\aleph$ есть другие кардинальные числа, то возникает одна ветвь математики, если нет, то другая, совершенно независимая.

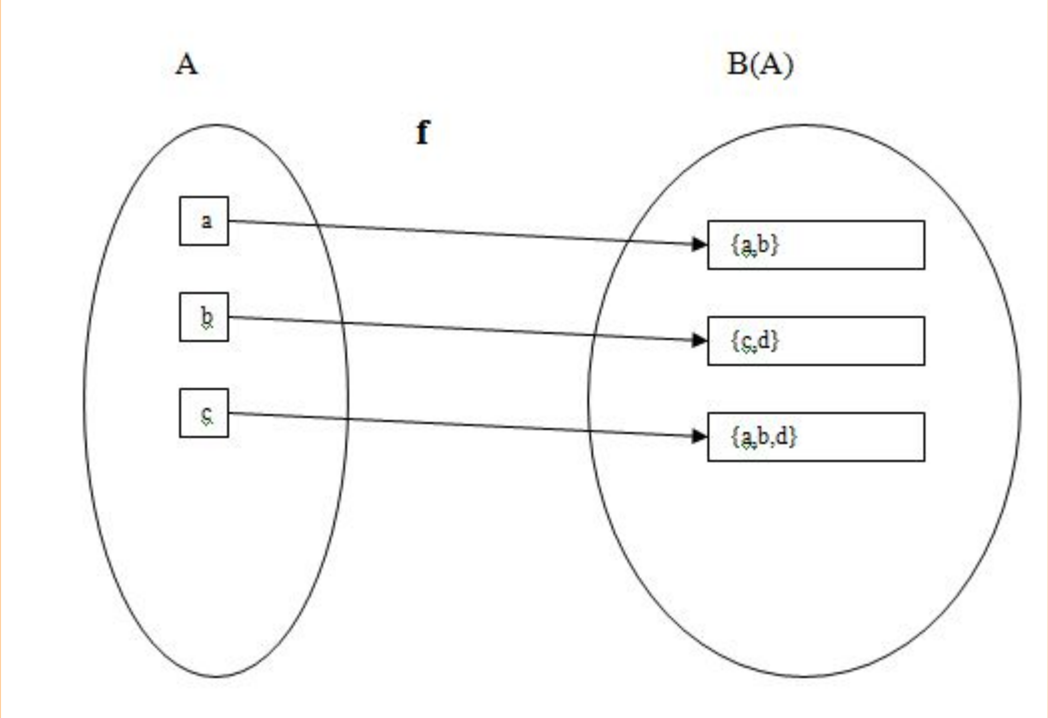
Теорема 6.5. (Вторая теорема Кантора) $|A| < |\mathfrak{B}(A)|$ для всякого множества A.

Отметим, что в частных случаях этот факт вам уже известен: для конечных множеств это теорема 2.1, для счетных – теорема 5.10.

Доказательство в некотором смысле аналогично диагональному методу Кантора.

Вначале проверим, что $|A| \le |\mathfrak{B}(A)|$ (легкая часть). Рассмотрим подмножество $U \subset \mathfrak{B}(A)$, состоящее из одноэлементных множеств. $|A| = |U|$, поскольку отображение $f : A \to U$, имеющее вид $f(a) = \{a\}$, является взаимно однозначным соответствием. Итак, в $\mathfrak{B}(A)$ есть подмножество, равномощное A, что и требовалось.

Докажем теперь, что $|A| \neq |\mathfrak{B}(A)|$ (трудная часть). Доказательство будем проводить от противного. Пусть напротив $|A| = |\mathfrak{B}(A)|$. Это значит, что существует взаимно однозначное отображение $f: A \to \mathfrak{B}(A)$. Важно, что любое подмножество A является образом некоторого элемента множества A ! Для каждого элемента $a \in A$ выполняется одно из двух свойств: либо $a \in f(a)$, либо $a \notin f(a)$. Если $a \in f(a)$, назовем элемент a – правильным, если же $a \notin f(a)$ – назовем элемент особым.

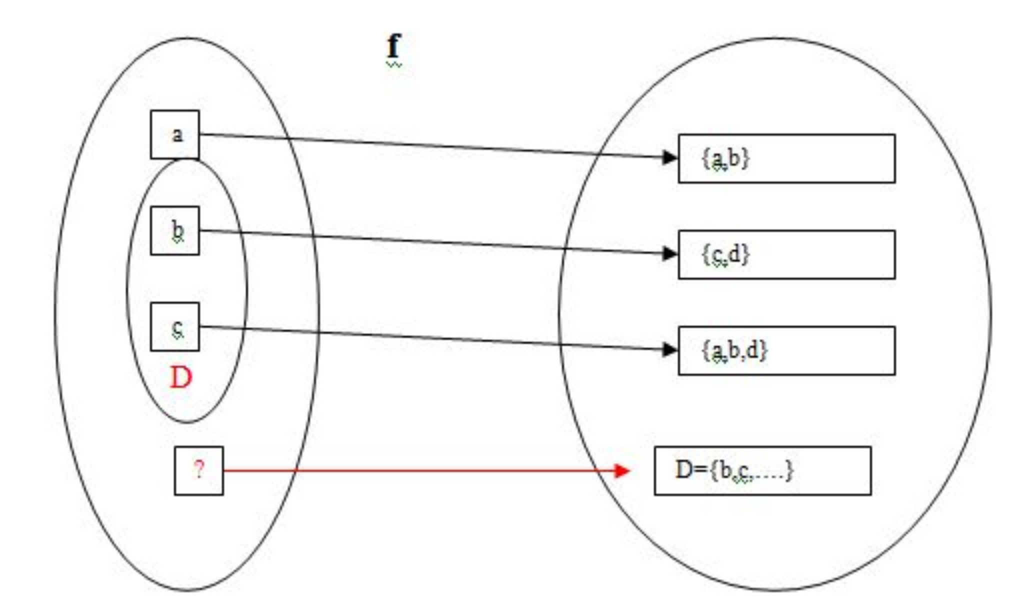


Пусть D – множество всех особых элементов, то есть $D = \{x \mid x \notin f(x)\}$. Очевидно, D является подмножеством А. По предположению о существовании биекции в множестве А должен найтись элемент d, соответствующий подмножеству D, $f(d) = D$. Рассмотрим вопрос о принадлежности этого элемента d своему образу D.

Если $d \in D$, то по определению D он не должен принадлежать своему образу! – получили противоречие.

Если же $d \notin D$, то он является особым и должен входить в D! – снова противоречие.

Значит, предположение о существовании биекции между множеством и его булеаном было неверным.



Задачи на установление кардинальных чисел

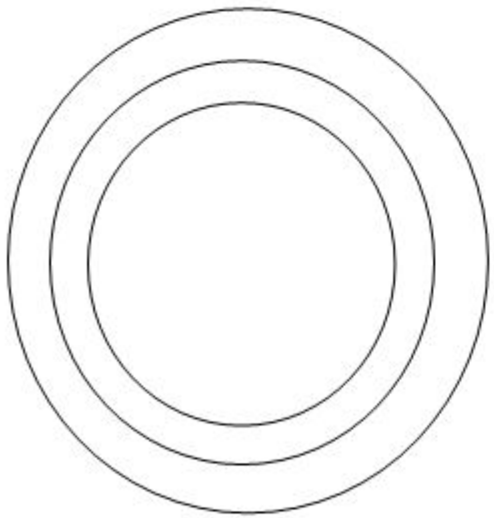
Доказать, что множество всех многочленов n-й степени от x с рациональными коэффициентами счётно

Каждый такой многочлен имеет вид $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$, то есть может быть описан n+1 рациональным числом ($a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0$). Множество таких наборов есть объединение счетного числа конечных множеств. Почему это объединение счетного числа? Потому что множество этих наборов есть декартово произведение Q^{n+1} множества рациональных чисел. А по теореме 5.4 объединение счетного числа счетных (а тем более конечных) множеств счетно.

Доказать, что множество

непересекающихся окружностей на плоскости может быть континуально

Возьмем на плоскости произвольную окружность радиуса а. Нарисуем внутри нее множество концентрических с ней (с одним и тем же центром) окружностей всевозможных радиусов. Радиусы есть действительные числа, поэтому каждой такой окружности соответствует действительное число. То есть между окружностями и действительными числами из промежутка (а,0) можно установить биекцию. Поскольку множество действительных чисел на этом промежутке континуально, то и множество окружностей континуально.



Алгебраические структуры

Алгебраические операции и их свойства

Бинарные и ***n***-местные алгебраические операции

Пусть А – непустое множество.

Определение 5.**9.** Отображение множества А×А в А называется бинарной алгебраической операцией на множестве А.

Примерами бинарных алгебраических операций являются обычное сложение и умножение на множестве целых чисел, объединение и пересечение на булеане непустого множества.

Определение 5.**10.** Отображение множества $А^n$ в А называется n-арной (n-местной) алгебраической операцией на множестве А, а число n ($n \geq 1$) – рангом операции. Выделение (фиксация) некоторого элемента множества А называется нульарной (нульместной) операцией на множестве А, число 0 – рангом нульарной операции.

Определение **5.11.** Частичная функция из множества $А^n$ в А называется частичной n-арной алгебраической операцией на множестве А.

Пример **5.12** 1. Пусть А $\neq \varnothing$. Отображение, ставящее в соответствие каждому подмножеству $X \in$ Р(A) его дополнение $\overline{X}$, является унарной алгебраической операцией на Р(А).

2. Операция деления рациональных чисел является частичной бинарной алгебраической операцией на множестве рациональных чисел.

3. Операция, ставящая в соответствие каждому кортежу натуральных чисел длины n наибольший общий делитель этих чисел, является n-арной алгебраической операцией на множестве N.

Для обозначения n-арной алгебраической операции используется та же форма записи, что и для произвольных отображений. Если f есть n-арная алгебраическая операция на множестве А и $((x_1, x_2, \ldots, x_n), x_{n+1}) \in f$, то пишут $x_{n+1} = f\,(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ и говорят, что x_{n+1} является значением операции f при значениях аргументов $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Свойства бинарных алгебраических операций

Пусть $*$ и $\circ$ – произвольные бинарные алгебраические операции на непустом множестве А.

Определение **4.4.** Бинарная алгебраическая операция $*$ называется коммутативной, если $(\forall a, b \in \mathrm{A})\ a * b = b * a$.

Определение **4.5.** Бинарная алгебраическая операция $*$ называется ассоциативной, если $(\forall a, b, c \in \mathrm{A})\ a * (b * c) = (a * b) * c$.

Если операция $*$ ассоциативна, то можно опускать скобки и писать $a * b * c$ вместо $a * (b * c)$ или $(a * b) * c$.

Определение **4.6.** Бинарная алгебраическая операция $\circ$ называется дистрибутивной относительно бинарной операции $*$, если

$(\forall a, b, c \in \mathrm{A})\ (a * b) \circ c = (a \circ c) * (b \circ c)$ и $c \circ (a * b) = (c \circ a) * (c \circ b)$.

Пример **5.13.** 1. Сложение и умножение действительных чисел являются коммутативными и ассоциативными бинарными алгебраическими операциями. Умножение действительных чисел дистрибутивно относительно сложения, но сложение не дистрибутивно относительно умножения, так как условие

$(\forall a, b, c \in \mathrm{A})\ a + b \cdot c = (a + b)\,(a + c)$ не выполняется.

2. Операции объединения и пересечения подмножеств непустого множества A коммутативны, ассоциативны и дистрибутивны относительно друг друга на булеане P(A).

3. Композиция функций есть ассоциативная бинарная алгебраическая операция. Композиция функций не коммутативна, так как условие

$(\forall f, g)\ f \circ g = g \circ f$ не выполняется.

Нейтральные элементы

Пусть $*$ – бинарная алгебраическая операция на непустом множестве A.

Определение **5.14.** Элемент e $\in$ A называется нейтральным относительно операции $*$, если $(\forall a \in \mathrm{A})\ a * e = e * a = a$.

Теорема **5.15**. Если нейтральный элемент относительно операции $*$ существует, то он единственен.

Доказательство. Пусть e и e' – нейтральные элементы относительно операции $*$. Тогда $e = e * e' = e'$, то есть $e = e'$.

Пример **5.16.** 1. Число 0 есть нейтральный элемент относительно сложения действительных чисел. Число 1 есть нейтральный элемент относительно умножения действительных чисел.

2. На булеане P(A) пустое множество является нейтральным элементом относительно объединения подмножеств непустого множества A, а P(A) – нейтральным элементом относительно пересечения подмножеств.

Симметричные элементы

Пусть $*$ есть бинарная алгебраическая операция на непустом множестве A и элемент e $\in$ A – нейтральный элемент относительно $*$.

Определение **5.17.** Элемент a$'$ $\in$ A называется симметричным к элементу a $\in$ A относительно операции $*$, если $a * a' = a' * a = e$. В этом случае элемент a называется симметризуемым, а элементы a и a$'$ – взаимно симметричными.

Пример **5.18.** 1. Любое целое число имеет симметричный к нему элемент относительно сложения – то же число, взятое со знаком минус.

2. Любое ненулевое действительное число a имеет симметричный к нему элемент $\dfrac{1}{a}$, число нуль не имеет симметричного элемента относительно умножения.

Теорема **5.18.** Если операция $*$ ассоциативна и элемент a симметризуем, то существует единственный элемент, симметричный к а.

Доказательство. Пусть a', a'' есть элементы, симметричные к элементу a относительно $*$. Следовательно, $a * a' = a' * a = e$ и $a * a'' = a'' * a = e$. Тогда в силу ассоциативности операции $*$ получаем

$a' = a' * e = a' * (a * a'') = (a' * a) * a'' = e * a'' = a''$, то есть $a' = a''$.

Подмножества, замкнутые относительно бинарной алгебраической операции

Пусть $*$ – бинарная алгебраическая операция на непустом множестве А.

Определение **5.20.** Подмножество B множества А называется замкнутым относительно операции $*$, если $(\forall\ a, b \in B)\ a * b \in B$.

Пустое множество замкнуто относительно любой операции $*$.

Пример 5.**21.** Сложение и вычитание являются бинарными алгебраическими операциями на множестве всех действительных чисел. Множество всех положительных действительных чисел замкнуто относительно сложения, но не замкнуто относительно вычитания.

Аддитивная и мультипликативная форма записи бинарной алгебраи- ческой операции

Для обозначения бинарной алгебраической операции $*$ наиболее часто используются аддитивная и мультипликативная формы записи. При аддитивной форме записи операцию $*$ называют сложением, а ее результат $a * b$ – суммой а и b. При этом вместо $a * b$ пишут а + b. Нейтральный элемент относительно сложения называют нулевым элементом (или нулем) и обозначают символом 0.

Элемент, симметричный к элементу а, называют противоположным к элементу а и обозначают через –а.

При мультипликативной форме записи операцию $*$ называют умножени- ем, а ее результат а $*$ b – произведением а и b. При этом вместо а $*$ b пишут $a \cdot b$. Нейтральный элемент относительно умножения называют единичным элементом (или единицей) и обозначают символом 1. Элемент, симметричный к элементу а, называют обратным к элементу а и обозначают через a^{-1}.

Понятие алгебраической структуры

Определение 5.22. Алгебраической структурой (универсальной алгеброй или просто алгеброй) называется упорядоченная пара $\boldsymbol{A} = < A, \Sigma >$, где A – непустое множество и Σ – множество алгебраических операций на A.

Таким образом, алгебра представляет собой непустое множество A вместе с заданной на нем совокупностью операций $\Sigma = \{f_1, \ldots, f_m, \ldots\}$, где f_i: $A^{n_i} \to A$ и n_i – ранг операции f_i. Множество A называется основным (несущим) множеством или основой (носителем) алгебры; упорядоченная последовательность рангов $(n_1,\ldots, n_m)$ называется типом алгебры; множество операций $\boldsymbol{\Sigma}$ называется сигнатурой алгебры.

Если $< A, \Sigma >$ – алгебра, то также говорят, что множество A есть алгебра относительно операций Σ.

Наиболее частым является случай, когда сигнатура конечна. Если $\Sigma = \{f_1, \ldots, f_m\}$, то вместо записи $\boldsymbol{A} = < A, \{f_1, \ldots, f_m \}>$ обычно употребляется запись $\boldsymbol{A} = < A, f_1, \ldots, f_m >$.