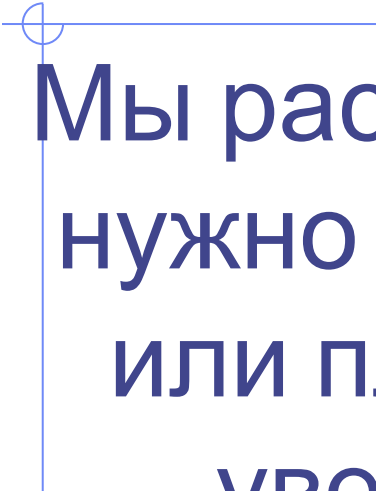


Задание №8

Метод коэффициентов

(по материалам открытого банка
задач ЕГЭ по математике)



Мы рассмотрим задачи, в которых
нужно узнать изменения объёма
или площади поверхности при
увеличении (уменьшении)
линейных размеров объёмного
тела.

Учитываем и запоминаем:

Объёмное тело рассматриваем в трёхмерном пространстве. Значит все изменения с ним происходят по одной из трёх осей: Ox , Oy и Oz .

- **Теорема.**

Пусть дан объем исходного многогранника

$V_{\text{старый}}$. Пусть также известны числа a , b и c

— коэффициенты растяжения для осей Ox ,

Oy и Oz соответственно.

Тогда объем нового многогранника $V_{\text{новый}}$ рассчитывается по формуле:

$$V_{\text{новый}} = V_{\text{старый}} \cdot a \cdot b \cdot c$$

(Если по какой-то оси производится *сжатие*

многогранника, а не растяжение, то

В задаче:

«Длина основания уменьшена в 2 раза, ширина увеличена в 5 раз, а высота увеличена в 3 раза».

Значит:

- По ОХ – сжатие в 2 раза $\Rightarrow a = 2$,
- по ОУ – растяжение в 5 раз $\Rightarrow b = 5$,
- по ОZ – растяжение в 3 раза $\Rightarrow c = 3$.

Следовательно:

$$V_{\text{новый}} = V_{\text{старый}} : 2 \cdot 5 \cdot 3 = 7,5 V_{\text{старый}}$$

- **Задача.**

Во сколько раз увеличится объём конуса, если радиус его основания увеличить в 8 раз, а высоту уменьшить в 4 раза?

Значит:

- По OX – растяжение в 8 раз $\Rightarrow a = 8$,
- по OY – растяжение в 8 раз $\Rightarrow b = 8$,
- по OZ – сжатие в 4 раза $\Rightarrow c = 4$.

Следовательно:

$$V_{\text{новый}} = V_{\text{старый}} \cdot 8 \cdot 8 : 4 = 16 V_{\text{старый}}$$

Обратите внимание:

Растяжение произошло сразу *по двум осям*. Окружность — фигура двумерная. Поэтому изменение радиуса у фигур вращения (кроме шара!) влечет за собой растяжение сразу «в обе стороны» - по осям OX и OY .

У шара, при изменении радиуса, сжатие или растяжение происходит сразу по трём осям координат.

№ 1. Объем первого цилиндра равен 12 м^3 . У второго цилиндра высота в три раза больше, а радиус основания — в два раза меньше, чем у первого. Найдите объем второго цилиндра. Ответ дайте в кубических метрах.

$$V_{\text{ц.}} = S_{\text{o}} h$$

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{\cancel{\pi} \cancel{r^2} \cancel{h}}{\cancel{\pi} \left(\frac{r}{2}\right)^2 \cancel{3h}} = \frac{\cancel{r^2}}{\frac{\cancel{r^2}}{4} \cdot 3} = \frac{4}{3}$$

Найдем отношение объемов

$$\frac{1}{2} \frac{V_1}{V_2} = \frac{4}{3}$$

$$\frac{1}{2V} = \frac{4}{3}$$

Ответ: 9.

№ 1. Объем первого цилиндра равен 12 м^3 . У второго цилиндра высота в три раза больше, а радиус основания — в два раза меньше, чем у первого. Найдите объем второго цилиндра. Ответ дайте в кубических метрах.

2 способ

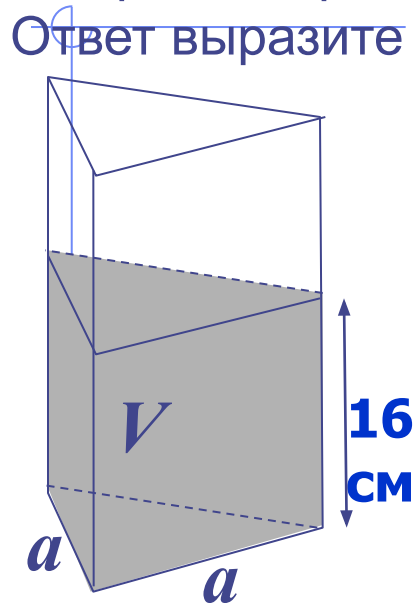
- По OX – сжатие в 2 раза $\Rightarrow a = 2$,
- по OY – сжатие в 2 раза $\Rightarrow b = 2$,
- по OZ – растяжение в 3 раза $\Rightarrow c = 3$.

$$V_{\text{новый}} = V_{\text{старый}} : 2 : 2 \cdot 3 = 12 : 2 : 2 \cdot 3 = 9$$

Ответ: 9.

№ 2. В сосуд, имеющий форму правильной треугольной призмы, налили воду. Уровень воды достигает 16 см. На какой высоте будет находиться уровень воды, если ее перелить в другой такой же сосуд, у которого сторона основания $4a$, чем у первого?

$$S_{\Delta} = \frac{1}{2} ab \sin \alpha$$

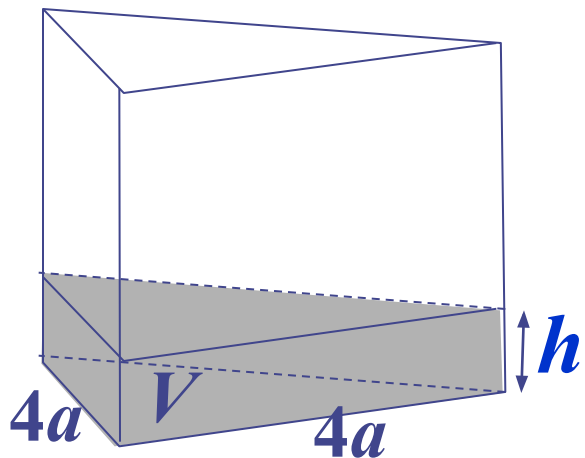


$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{S_1 h_1}{S_2 h_2} = \frac{\frac{1}{2} \cdot a \cdot a \cdot \sin 60^\circ \cdot h_1}{\frac{1}{2} \cdot 4a \cdot 4a \cdot \sin 60^\circ \cdot h_2} = \frac{h_1}{16h_2}$$

Найдем Объем жидкости не изменился, т.е.

$$V_1 = V_2$$

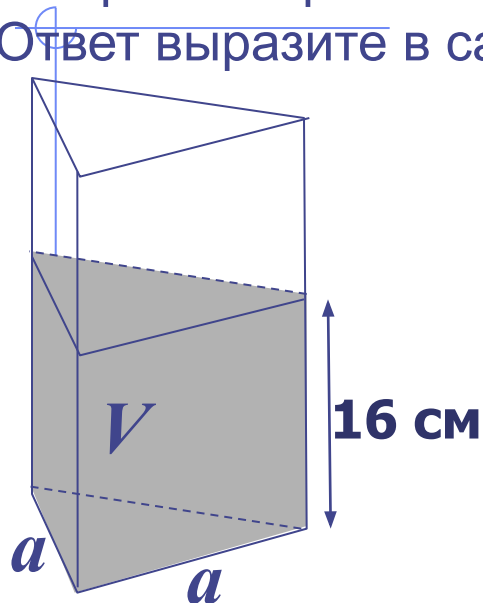
$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{h_1^3}{16h_2^3} \quad \frac{1}{1} = \frac{1}{16h}$$



Ответ: 1.

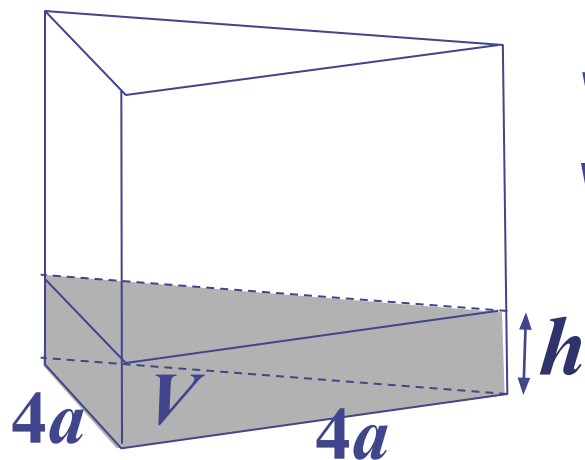
№ 2. В сосуд, имеющий форму правильной треугольной призмы, налили воду. Уровень воды достигает 16 см. На какой высоте будет находиться уровень воды, если ее перелить в другой такой же сосуд, у которого сторона основания в 4 раза больше, чем у первого?

Ответ выразите в сантиметрах. **2 способ**



Сторона основания в 4 раза больше
Значит:

- По OX – растяжение в 4 раза $\Rightarrow a=4$,
- по OY – растяжение в 4 раза $\Rightarrow b = 4$,
- по OZ – изменений нет.



$$V_{\text{новый}} = V_{\text{старый}} \cdot 4 \cdot 4 = 16V_{\text{старый}}$$

$$V_{\text{новый}} = V_{\text{старый}} \quad h_{\text{новый}} = 1$$

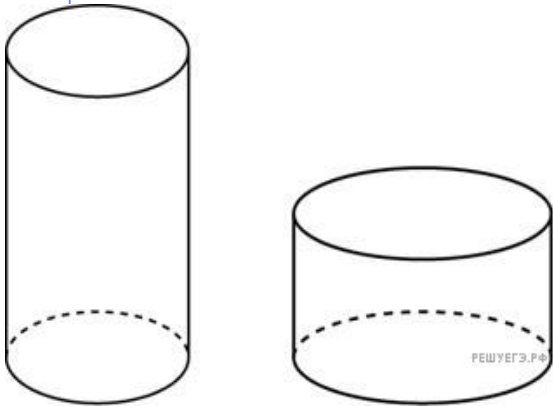
Ответ: 1.

№ 3

Одна цилиндрическая кружка вдвое выше второй, зато вторая в полтора раза шире. Во сколько раз объём первой кружки меньше объёма второй.

Решение.

- По OX – растяжение в 1,5 раз $\Rightarrow a = 1,5$,
- По OY – растяжение в 1,5 раз $\Rightarrow b = 1,5$,
- По OZ – сжатие в 2 раза $\Rightarrow c = 2$.

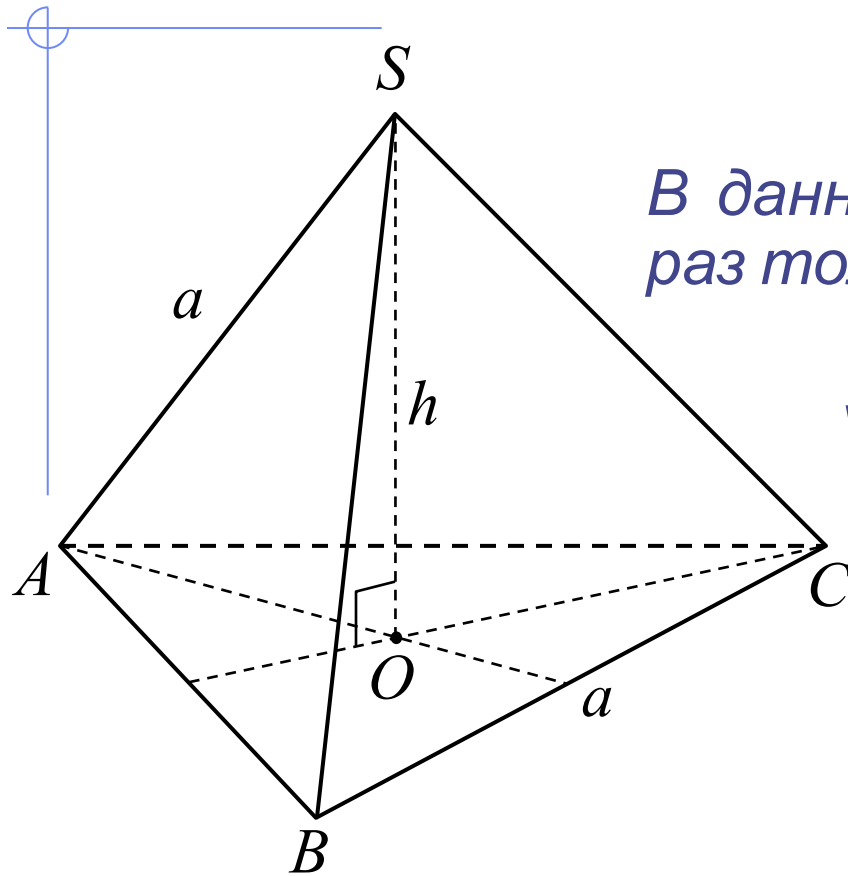


$$V_{\text{новый}} = V_{\text{старый}} \cdot 1,5 \cdot 1,5 : 2 = 1,125 V_{\text{старый}}$$

Ответ: 1,125

№ 4

Во сколько раз увеличится объём пирамиды, если ее высоту увеличить в пятнадцать раз?



Решени

е.

В данной задаче растяжение в 15 раз только по оси OZ .

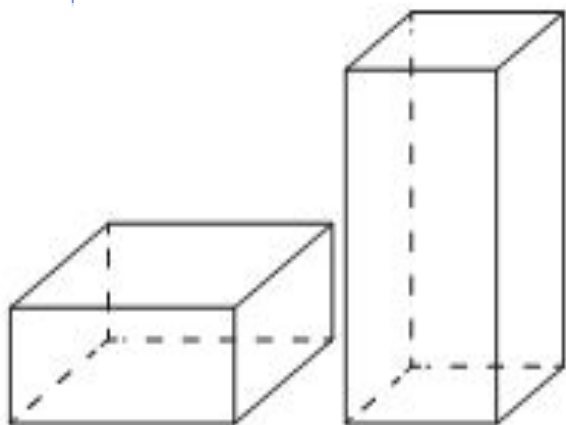
$$V_{\text{новый}} = V_{\text{старый}} \cdot 15$$

Ответ:

15.

№ 5. Даны две коробки, имеющие форму правильной четырёхугольной призмы, стоящей на основании. Первая коробка в четыре с половиной раза ниже второй, а вторая втрое уже первой. Во сколько раз объём первой коробки больше объёма второй?

Решение.



Правильная призма, значит, в основании квадрат.

- По Ox – сжатие в 3 раза $\Rightarrow a = 3$,
- По Oy – сжатие в 3 раза $\Rightarrow b = 3$,
- По Oz – растяжение в 4,5 раза $\Rightarrow c = 4,5$.

$$V_{\text{новый}} = V_{\text{старый}} : 3 : 3 \cdot 4,5 = 1,5 V_{\text{старый}}$$

Ответ: 1,5.

№ 6. Бетонный шар весит 0,75 т. Сколько будет весить шар, изготовленный из того же материала, если его радиус в 2 раза больше?

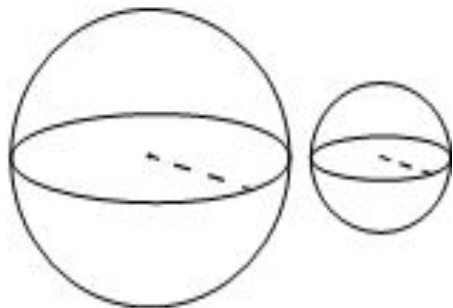
Решение.

Шары изготовлены из одного и того же материала.

Следовательно, масса меняется по тому же закону, что и объем.

- $V_{\text{старый}} = 0,75$;
- Растяжение в 2 раза по всем осям $\Rightarrow a = b = c = 2$.

$$V_{\text{новый}} = V_{\text{старый}} \cdot a^3 = 0,75 \cdot 2^3 = 6$$



Ответ: 6.

Теорема.

Если все стороны многогранника увеличить в n раз, то

его *площадь увеличится* в n^2 раз: $S_{\text{новая}} = S_{\text{старая}} \cdot n^2$

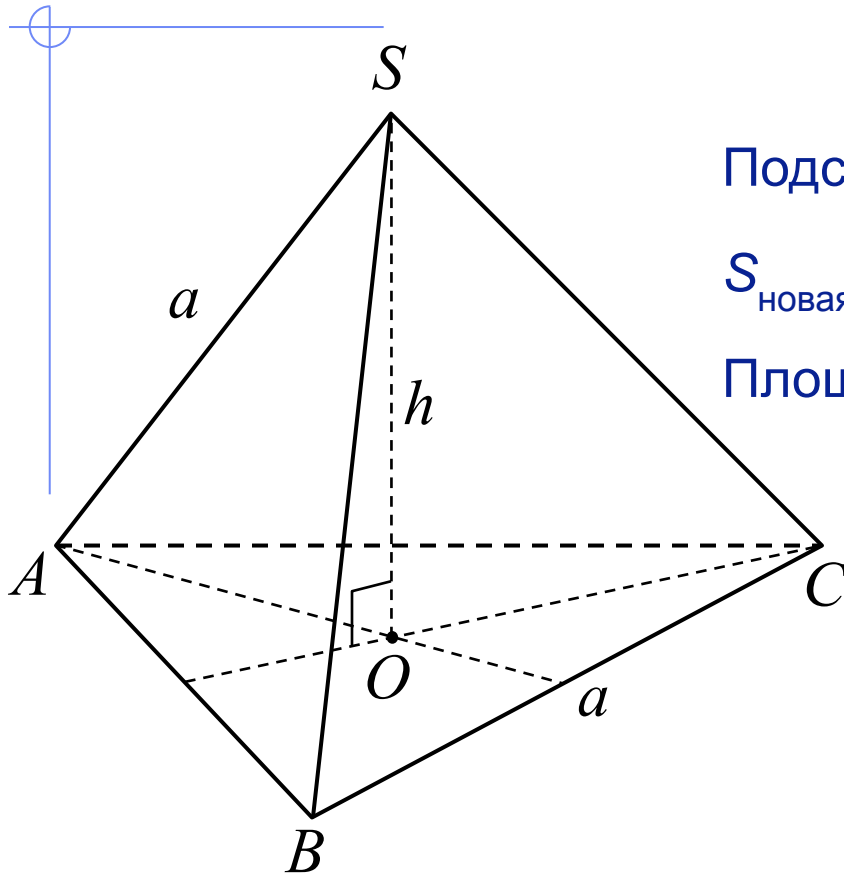
Аналогично, если все стороны сжать в n раз, то площадь уменьшится в n^2 раз.

Формула площадей очень похожа на частный случай формулы объемов.

Разница лишь в степени:

- **$V_{\text{новый}} = V_{\text{старый}} \cdot n^3$** , поскольку объем — это «трехмерная» величина и объем измеряется в кубических метрах (м^3);
- **$S_{\text{новая}} = S_{\text{старая}} \cdot n^2$** , поскольку площадь — величина «двумерная» и измеряется в квадратных метрах (м^2).

Во сколько раз увеличится площадь поверхности правильного тетраэдра, если все его рёбра увеличить в десять раз?



Решени

Подставляем $n = 10$ в формулу площади:

$$S_{\text{новая}} = S_{\text{старая}} \cdot 10^2 = 100 \cdot S_{\text{старая}}$$

Площадь увеличится в 100 раз.

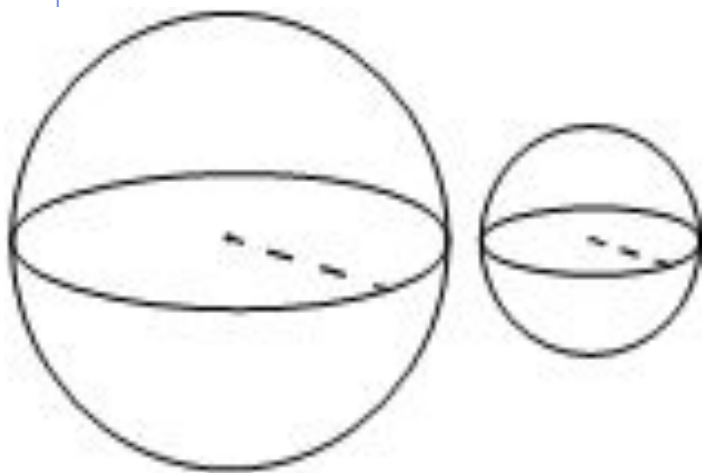
Ответ:
100.

№ 8. Площадь первой сферы равна 175. Найдите площадь второй сферы, если ее радиус в 5 раз меньше радиуса первой.

Решение.

$$S_{\text{новая}} = S_{\text{старая}} : n^2 = 175 : 5^2 = 175 : 25 = 7$$

Ответ: 7.



№ 9. В пространстве даны два прямых круговых конуса. У второго конуса радиус основания и высота в 3 раза больше, чем у первого. Найдите площадь боковой поверхности первого конуса, если площадь боковой поверхности второго равна 324 см^2 .

Решение.

1. $n = 3$ —растяжение по каждой оси;
2. $S_{\text{новая}} = 324$ — площадь второго конуса.

$$S_{\text{новая}} = S_{\text{старая}} \cdot n^2$$

$$324 = S_{\text{старая}} \cdot 9$$

$$S_{\text{старая}} = 324 : 9 = 36$$

Ответ: 36.

Источники:

1. Банк задач ЕГЭ.

<http://prof.mathege.ru/prototypes/?position=9&filter=&limit=1000>

2. Сайт Савченко Е.М. <http://le-savchen.ucoz.ru>