

Аркосинус. Частные случаи решения уравнения $\cos x = a$

Задача 1 Решите уравнение $\cos x = -\frac{1}{2}$.

Решение

$$\blacktriangleright x = \pm \arccos\left(-\frac{1}{2}\right) + 2\pi n, \quad n \in \mathbf{Z},$$

$$x = \pm\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) + 2\pi n,$$

$$x = \pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi n.$$

Ответ: $\pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi n, \quad n \in \mathbf{Z}$. \blacktriangleleft

Комментарий

Поскольку $\left|-\frac{1}{2}\right| < 1$, то данное уравнение вида $\cos x = a$ имеет корни, которые можно найти по формуле (1).

Для вычисления $\arccos\left(-\frac{1}{2}\right)$

можно воспользоваться формулой:

$$\arccos(-a) = \pi - \arccos a.$$

Тогда

$$\arccos\left(-\frac{1}{2}\right) = \pi - \arccos\left(\frac{1}{2}\right) = \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}.$$

Задача 2 Решите уравнение $\cos x = \sqrt{2}$.

Решение

► Поскольку $|\sqrt{2}| > 1$, то корней нет.

Ответ: корней нет. ◁

Комментарий

Поскольку $|\sqrt{2}| > 1$, то данное уравнение не имеет корней (то есть формулу (1) нельзя применить).

Задача 3 Решите уравнение $\cos 4x = \frac{1}{3}$.

Решение

► $4x = \pm \arccos \frac{1}{3} + 2\pi n, n \in \mathbf{Z},$

$$x = \pm \frac{1}{4} \arccos \frac{1}{3} + \frac{\pi n}{2}, n \in \mathbf{Z}.$$

Ответ:

$$\pm \frac{1}{4} \arccos \frac{1}{3} + \frac{\pi n}{2}, n \in \mathbf{Z}. \triangleleft$$

Комментарий

Поскольку $|\frac{1}{3}| < 1$, то можно воспользоваться формулой (1).

Учитывая, что $\arccos \frac{1}{3}$ не является табличным значением, для получения ответа достаточно после нахождения $4x$ по формуле (1) обе части последнего уравнения разделить на 4.

Задача 4Решите уравнение $\cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$.**Решение**

$$\blacktriangleright 2x - \frac{\pi}{3} = \pm \arccos \frac{\sqrt{2}}{2} + 2\pi n, \quad n \in \mathbf{Z},$$

$$2x - \frac{\pi}{3} = \pm \frac{\pi}{4} + 2\pi n,$$

$$x = \frac{\pi}{6} \pm \frac{\pi}{8} + \pi n, \quad n \in \mathbf{Z}.$$

Ответ: $\frac{\pi}{6} \pm \frac{\pi}{8} + \pi n, \quad n \in \mathbf{Z}.$ ◀

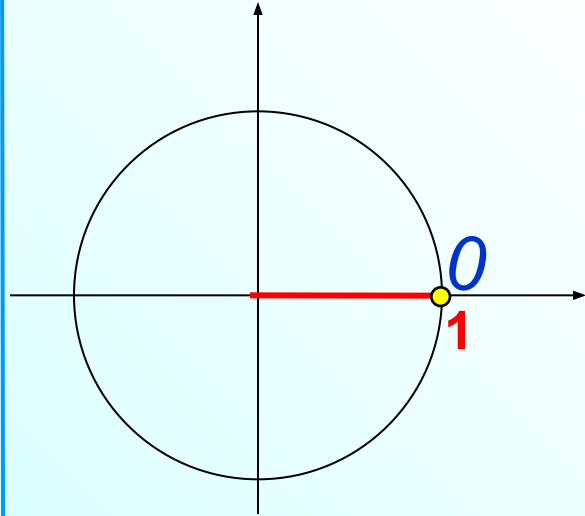
Комментарий

Поскольку $\left|\frac{\sqrt{2}}{2}\right| < 1$, то можно воспользоваться формулой (1) для нахождения значения выражения $2x - \frac{\pi}{3}$, стоящего под знаком косинуса. После этого из полученного линейного уравнения находим x .

Обратите внимание,
никаких x в ответе нет,
тем более с индексами

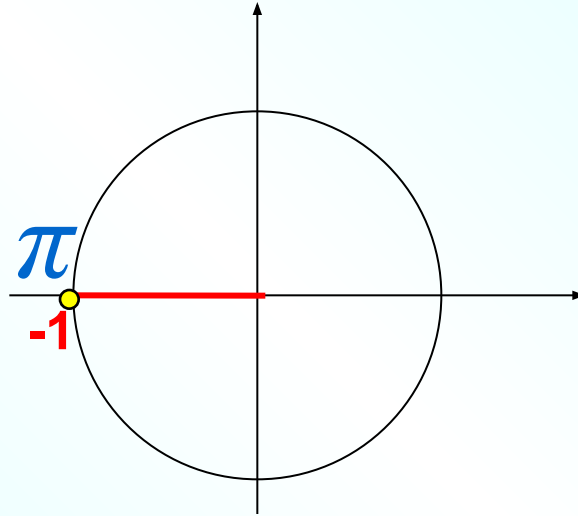
Частные случаи

$$\cos x = 1$$



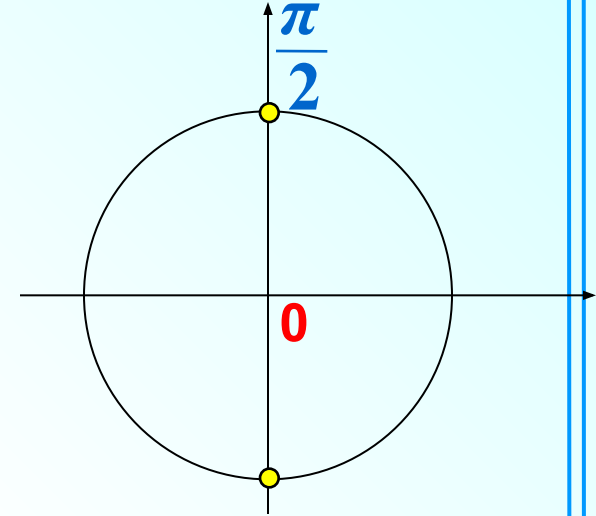
$$x = 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$$

$$\cos x = -1$$



$$x = \pi + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$$

$$\cos x = 0$$



$$x = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$$

Тренируемся решать:

$$1. \cos 5x = 1$$

$$5x = 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$$

$$x = \frac{2\pi}{5}n, n \in \mathbb{Z}$$

$$\text{Ответ: } \frac{2\pi}{5}n, n \in \mathbb{Z}$$

Тренируемся решать:

$$\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 0$$

$$\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$$

$$x = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$$

$$x = \frac{3\pi}{4} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$$

$$\text{Ответ: } \frac{3\pi}{4} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$$