Арккосинус. Частные случаи решения уравнения cosx=a

Задача 1 Решите уравнение $\cos x = -\frac{1}{2}$.

Решение

▶ $x = \pm\arccos\left(-\frac{1}{2}\right) + 2\pi n,\ n \in Z,$

$$x = \pm\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) + 2\pi n,$$

$$x = \pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi n.$$

Ответ: $\pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi n,\ n \in Z.$ ◁

Комментарий

Поскольку $\left|-\frac{1}{2}\right| < 1$, то данное уравнение вида $\cos x = a$ имеет корни, которые можно найти по формуле (1).

Для вычисления $\arccos\left(-\frac{1}{2}\right)$ можно воспользоваться формулой:

$$\mathbf{arccos}\ (-a) = \pi - \mathbf{arccos}\ a.$$

Тогда

$$\arccos\left(-\frac{1}{2}\right) = \pi - \arccos\left(\frac{1}{2}\right) = \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}.$$

Задача 2 Решите уравнение $\cos x = \sqrt{2}$.

Решение

▶ Поскольку $\left|\sqrt{2}\right| > 1$, то корней нет.

Ответ: корней нет. ◁

Комментарий

Поскольку $\left|\sqrt{2}\right| > 1$, то данное уравнение не имеет корней (то есть формулу (1) нельзя применить).

Задача 3 Решите уравнение $\cos 4x = \frac{1}{3}$.

Решение

▶ $4x = \pm\arccos\frac{1}{3} + 2\pi n,\ n \in Z,$

$$x = \pm\frac{1}{4}\arccos\frac{1}{3} + \frac{\pi n}{2},\ n \in Z.$$

Ответ:

$$\pm\frac{1}{4}\arccos\frac{1}{3} + \frac{\pi n}{2},\ n \in Z. \ ◁$$

Комментарий

Поскольку $\left|\frac{1}{3}\right| < 1$, то можно воспользоваться формулой (1).

Учитывая, что $\arccos\frac{1}{3}$ не является табличным значением, для получения ответа достаточно после нахождения $4x$ по формуле (1) обе части последнего уравнения разделить на 4.

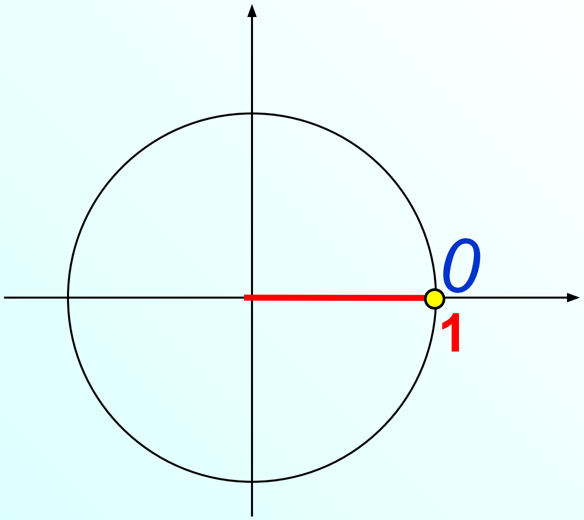
Задача 4 Решите уравнение $\cos\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Решение	Комментарий
$2x-\frac{\pi}{3}=\pm\arccos\frac{\sqrt{2}}{2}+2\pi n,\ n\in\mathbf{Z},$ $2x-\frac{\pi}{3}=\pm\frac{\pi}{4}+2\pi n,$ $x=\frac{\pi}{6}\pm\frac{\pi}{8}+\pi n,\ n\in\mathbf{Z}.$ *Ответ*: $\frac{\pi}{6}\pm\frac{\pi}{8}+\pi n,\ n\in\mathbf{Z}.$	Поскольку $\left\lvert\frac{\sqrt{2}}{2}\right\rvert<1$, то можно воспользоваться формулой (1) для нахождения значения выражения $2x-\frac{\pi}{3}$, стоящего под знаком косинуса. После этого из полученного линейного уравнения находим x.

Обратите внимание, никаких х в ответе нет, тем более с индексами

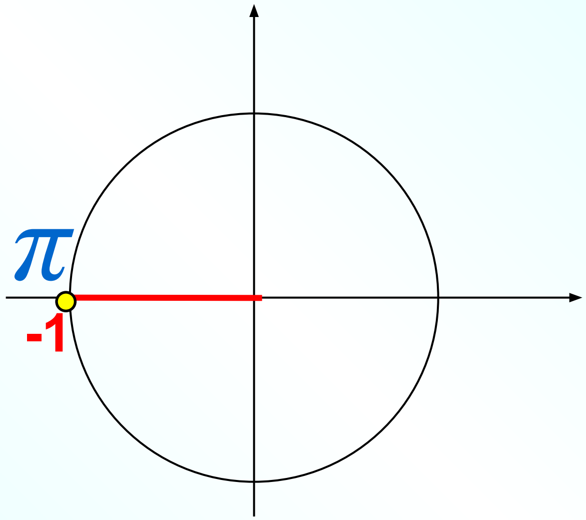
Частные случаи

cosx = 1



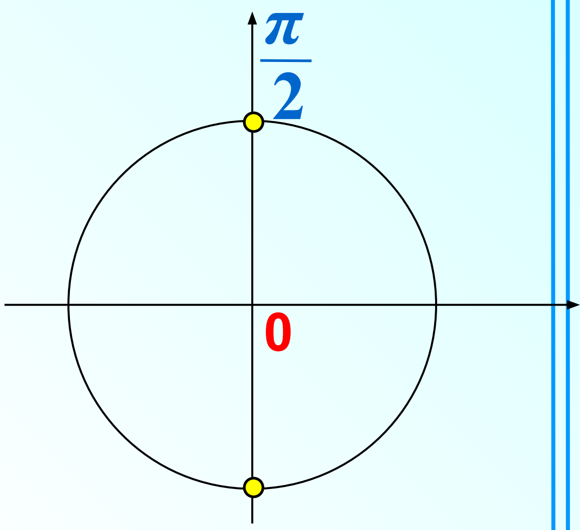
$$x = 2\pi n, \quad n \in Z$$

cosx = -1



$$x = \pi + 2\pi n, \quad n \in Z$$

cosx = 0



$$x = \frac{\pi}{2} + \pi n, \quad n \in Z$$

Тренируемся решать:

1. $\cos 5x = 1$

$$5x = 2\pi n, \;\; n \in Z$$

$$x = \frac{2\pi}{5} n, n \in Z$$

$$Ответ: \frac{2\pi}{5} n, n \in Z$$

Тренируемся решать:

$$\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=0$$

$$\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\pi}{2}+\pi n, n\in Z$$

$$x=\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{4}+\pi n, n\in Z$$

$$x=\frac{3\pi}{4}+\pi n, n\in Z$$

$$Ответ:\frac{3\pi}{4}+\pi n, n\in Z$$