

Дисциплина: «МДК 01.03. Математическое  
моделирование»

Тема «Транспортная задача. Методы нахождения  
начального решения транспортной задачи»

Преподаватель спец. дисциплин Радунцева Александра Антоновна

# Транспортная задача

Транспортная задача - это математическая задача линейного программирования специального вида о поиске оптимального распределения однородных объектов с минимизацией затрат на перемещение.

Существует несколько методов решения транспортной задачи. Два из них:

- решение транспортной задачи методом потенциалов (будем использовать)
- решение транспортной задачи с использованием симплекс метода.

Решение задачи методом потенциалов происходит в несколько этапов:

- Определение опорного решения.
- Применение к найденному опорному решению самого метода потенциалов.
- Проверка единственности решения.

Определение опорного плана, в свою очередь, можно выполнить несколькими способами. Рассмотрим два из них:

- метод северо-западного угла
- метод минимальных стоимостей

# О чем говорится в определении транспортной задачи?

- У нас есть некоторый груз, который находится на складах: склад 1, склад 2, ..., склад  $n$  - это пункты отправления.
- Этот груз нам необходимо развести по магазинам: магазин 1, магазин 2, ..., магазин  $k$  - это пункты назначения.
- Нам выгоднее как можно эффективнее выполнить работу, т.е. найти такой вариант перевозки, при котором затраты будут минимальными.
- Транспортная задача задается следующей таблицей:

		$B_1$	$B_2$	$B_3$	$B_4$
		50	100	75	75
$A_1$	100	4	3	5	6
$A_2$	200	8	2	4	7

# Что означают числа в условии транспортной задачи?

- два склада с товаром:  $A_1$  и  $A_2$
- объем товара - на складах  $A_1$  и  $A_2$
- пунктами назначения -  $B_1$ ,  $B_2$ ,  $B_3$  и  $B_4$
- потребности пунктов назначения
- матрица стоимостей (расценки) перевозки 1 единицы груза из соответствующих пунктов; расстояния между соответствующими пунктами

		$B_1$ 50	$B_2$ 100	$B_3$ 75	$B_4$ 75
$A_1$	100	4	3	5	6
$A_2$	200	8	2	4	7

# Метод северо-западного угла

- Заполнение таблицы начинается с самой верхней левой (северо-западной) ячейки.
- Перед тем, как распределять ресурсы по "магазинам", проверим, равны ли общие потребности имеющимся ресурсам?
- Потребности:  $50 + 100 + 75 + 75 = 300$
- Ресурсы:  $100 + 200 = 300$
- Потребности = Ресурсам
- В этом случае говорят, что транспортная задача закрытая.

		$B_1$ 50	$B_2$ 100	$B_3$ 75	$B_4$ 75
$A_1$	100	4	3	5	6
$A_2$	200	8	2	4	7

# Метод северо-западного угла

- Начнем нахождение опорного решения:

		B <sub>1</sub>	B <sub>2</sub>	B <sub>3</sub>	B <sub>4</sub>
		50	100	75	75
A <sub>1</sub>	100	✓			
A <sub>2</sub>	200				

- В магазин В1 требуется 50 единиц товара. Со склада А1 отправим в этот магазин 50 единиц.

- Потребности магазинов  
груз со склада А2.

		B <sub>1</sub>	B <sub>2</sub>	B <sub>3</sub>	B <sub>4</sub>
		50	100	75	75
A <sub>1</sub>	100	→ 50 ↑			
A <sub>2</sub>	200	-			

необходимости везти туда

- На складе А1 еще осталось 50 единиц груза. Эти остатки можем направить в магазин В2. Ресурсы склада А1

		B <sub>1</sub>	B <sub>2</sub>	B <sub>3</sub>	B <sub>4</sub>
		50	100	75	75
A <sub>1</sub>	100	→ 50 ↓	→ 50 ↑		
A <sub>2</sub>	200	-			

# Метод северо-западного угла

- Переходим к складу A2.
- Так как потребности магазина B1 выполнены полностью, рассмотрим магазин B2, которому требуется  $100 - 50 = 50$  единиц товара. Направим их туда.

		B <sub>1</sub> 50	B <sub>2</sub> 100	B <sub>3</sub> 75	B <sub>4</sub> 75
A <sub>1</sub>	100	50	50	-	-
A <sub>2</sub>	200	-	50		

- Заметим, на складе A2 осталось еще  $200 - 50 = 150$  единиц груза, которые мы распределим по магазинам B3 и B4, полностью удовлетворяя и их потребности.

		B <sub>1</sub> 50	B <sub>2</sub> 100	B <sub>3</sub> 75	B <sub>4</sub> 75
A <sub>1</sub>	100	50	50	-	-
A <sub>2</sub>	200	-	50	75	75

- Склады пусты!
- Потребности магазинов в товаре полностью выполнены!
- Получен опорный (первоначальный) план транспортной задачи.

		B <sub>1</sub> 50	B <sub>2</sub> 100	B <sub>3</sub> 75	B <sub>4</sub> 75
A <sub>1</sub>	100	50	50	-	-
A <sub>2</sub>	200	-	50	75	75

# Метод минимальных стоимостей получения опорного плана

- Суть метода состоит в том, чтобы в первую очередь направлять груз в те пункты, где "расценки" в матрице стоимостей минимальны. Если клеток с наименьшими тарифами несколько, то запол

		B <sub>1</sub>	B <sub>2</sub>	B <sub>3</sub>	B <sub>4</sub>
		50	100	75	75
A <sub>1</sub>	100	4	3	5	6
A <sub>2</sub>	200	8	2 ✓	4	7

- Направляем 100 единиц груза из склада A<sub>2</sub> в магазин B<sub>2</sub>.
- Остатки на складе A<sub>2</sub> — 100 единиц. Потребности магазина B<sub>2</sub> выполнены.

		B <sub>1</sub>	B <sub>2</sub>	B <sub>3</sub>	B <sub>4</sub>
		50	100	75	75
A <sub>1</sub>	100		-		
A <sub>2</sub>	200		100		

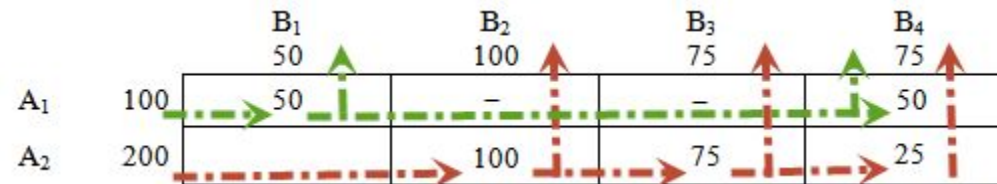
- Груз со склада A<sub>2</sub> отправим в магазин, у которого стоимость перевозки ниже — магазин B<sub>3</sub>, так как  $\min(4; 7) = 4$
- Размер поставки равен потребности магазина — 75. Остатки со склада  $200 - 100 - 75 = 25$  перенесем в магази

		B <sub>1</sub>	B <sub>2</sub>	B <sub>3</sub>	B <sub>4</sub>
		50	100	75	75
A <sub>1</sub>	100		-	-	
A <sub>2</sub>	200		100	75	25



# Метод минимальных стоимостей получения опорного плана

- Остается только раскидать груз со склада A1 по магазинам: B1 — 50 единиц, B4 —  $75-25=50$  единиц.



- Получили два опорных плана: методом северо-западного угла и методом минимальных стоимостей.
- Первый опорный план (по методу северо-западного угла):

		B <sub>1</sub> 50	B <sub>2</sub> 100	B <sub>3</sub> 75	B <sub>4</sub> 75
A <sub>1</sub>	100	50	50	-	-
A <sub>2</sub>	200	-	50	75	75

- Второй опорный план (по методу минимальных стоимостей):

		B <sub>1</sub> 50	B <sub>2</sub> 100	B <sub>3</sub> 75	B <sub>4</sub> 75
A <sub>1</sub>	100	50	-	-	50
A <sub>2</sub>	200	-	100	75	25

# Проверка правильности вычисления первоначального плана

- Правило:
- Количество заполненных клеток (базисных клеток) в первоначальном плане ВСЕГДА должно быть равно  $m + n - 1$ , где  $m$  - количество строк,  $n$  - количество столбцов
- В нашем случае условие выполняется:  $2 + 4 - 1 = 5$
- Во избежании случайных вычислительных ошибок проверим, равны ли суммарные значения каждой строки и каждого столбца соответствующим значениям условия.

- $100 = 50 + 50$
- $200 = 100 + 75 + 25$

		B <sub>1</sub>	B <sub>2</sub>	B <sub>3</sub>	B <sub>4</sub>
		50	100	75	75
A <sub>1</sub>	100 =	50			50
A <sub>2</sub>	200 =		100	75	25

- По столбцам:

		B <sub>1</sub>	B <sub>2</sub>	B <sub>3</sub>	B <sub>4</sub>
		50	100	75	75
A <sub>1</sub>	100	50			50
A <sub>2</sub>	200		100	75	25

- Суммарные значения элементов каждого столбца равны соответствующим потребностям магазинов.
- Несмотря на то, что опорные планы разные, оба приведут к одному оптимальному решению или же к решениям, имеющим одну стоимость перевозки.

# Метод потенциалов решения транспортной задачи - шаг 1

- Начнем с проверки опорного плана на оптимальность.
- Выпишем матрицу стоимостей, данную в условии задачи.

Пункты отправления	Пункты назначения				Запасы
	B1	B2	B3	B4	
A1	4	3	5	6	100
A2	8	2	4	7	200
Потребности	50	100	75	75	

$$C = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 5 & 6 \\ 8 & 2 & 4 & 7 \end{pmatrix}$$

- Далее строим рядом две таблицы. Размерность таблиц как и в матрице стоимостей:
- количество строк = количеству складов, количество столбцов = количеству магазинов.
- Заполняем первую — левую таблицу в соответствии с полученным опорным планом.

	B1	B2	B3	B4	
A1	50	50			
A2		50	75	75	

# Метод потенциалов решения транспортной задачи - шаг 1

- Переходим в правую таблицу.
- Переносим из матрицы стоимостей значения, которые соответствуют занятым клеткам левой таблицы.
- В матрице стоимости эти значения подчеркнуты.

	B1	B2	B3	B4
A1	50	50		
A2		50	75	75

$$C = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 5 & 6 \\ 8 & 2 & 4 & 7 \end{pmatrix}$$

4	3		
	2	4	7

- Припишем каждой строке правой таблице потенциалы  $u_1, u_2$ . Каждому столбцу — потенциалы  $v_1, v_2, v_3, v_4$ .

	B1	B2	B3	B4
A1	50	50		
A2		50	75	75

4	3			$u_1$
	2	4	7	$u_2$
$v_1$	$v_2$	$v_3$	$v_4$	

# Метод потенциалов решения транспортной задачи - шаг 1

- Для вычисления этих потенциалов в некоторых учебниках составляют систему и из нее определяют неизвестные.
- Будем определять значения потенциалов непосредственно из правой таблицы.
- Составим систему уравнений по следующему правилу:
- Каждое из значений в ячейке (правая таблица) равно сумме потенциалов соответствующей строки и соответствующего столбца.
- Например: значение 4 находится в 1-й строке и 1-м столбце. Тогда сумма потенциалов 1-й строки ( $u_1$ ) и 1-ого столбца( $v_1$ ) равна 4.

	B1	B2	B3	B4
A1	50	50		
A2		50	75	75



# Метод потенциалов решения транспортной задачи - шаг 1

- Первое уравнение системы:  $u_1 + v_1 = 4$
- Рассмотрим следующее значение таблицы.
- Значение 3 находится в первой строке (потенциал  $u_1$ ), втором столбце (потенциал  $v_2$ ).

	B1	B2	B3	B4
A1	50	50		
A2		50	75	75

4	3			$u_1$
	2	4	7	$u_2$
$v_1$	$v_2$	$v_3$	$v_4$	

- Второе уравнение системы:  $u_1 + v_2 = 3$
- Аналогично для каждого значения таблицы составим уравнение.
- Получим систему уравнений:

$$\begin{cases} u_1 + v_1 = 4 \\ u_1 + v_2 = 3 \\ u_2 + v_2 = 2 \\ u_2 + v_3 = 4 \\ u_2 + v_4 = 7 \end{cases}$$

# Метод потенциалов решения транспортной задачи - шаг 1

- Для того, чтобы система имела единственное решение, примем значение одного из потенциалов равным нулю

	B1	B2	B3	B4
A1	50	50		
A2		50	75	75

4	3			$u_1$
	2	4	7	$u_2$
$v_1$	$v_2$	$v_3$	0	

- Для удобства в качестве этого потенциала всегда будем брать  $v_4$ .
- Тогда система уравнений будет выглядеть:
- Решим систему уравнений и получим значения потенциалов:

$$\begin{cases} u_1 + v_1 = 4 \\ u_1 + v_2 = 3 \\ u_2 + v_2 = 2 \\ u_2 + v_3 = 4 \\ u_2 + 0 = 7 \end{cases}$$

$$\begin{cases} u_1 + v_1 = 4 \\ u_1 + v_2 = 3 \\ u_2 + v_2 = 2 \\ u_2 + v_3 = 4 \\ u_2 + 0 = 7 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} u_1 + v_1 = 4 \\ u_1 + v_2 = 3 \\ 7 + v_2 = 2 \\ 7 + v_3 = 4 \\ u_2 = 7 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} u_1 + v_1 = 4 \\ u_1 - 5 = 3 \\ v_2 = -5 \\ v_3 = -3 \\ u_2 = 7 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 8 + v_1 = 4 \\ u_1 = 8 \\ v_2 = -5 \\ v_3 = -3 \\ u_2 = 7 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} v_1 = -4 \\ u_1 = 8 \\ v_2 = -5 \\ v_3 = -3 \\ u_2 = 7 \end{cases}$$

# Метод потенциалов решения транспортной задачи - шаг 1

- Наглядно:

	B1	B2	B3	B4
A1	50	50		
A2		50	75	75

4	3			8
	2	4	7	7
-4	-5	-3	0	

- Так как система очень проста, то значения потенциалов можно получить и устно.

- Подробно:

	B1	B2	B3	B4
A1	50	50		
A2		50	75	75

4	3			$u_1$
	2	4	7	$u_2$
$v_1$	$v_2$	$v_3$	0	

- Сумма отмеченных потенциалов равна 7, следовательно, потенциал  $u_2 = 7$

	B1	B2	B3	B4
A1	50	50		
A2		50	75	75

4	3			$u_1$
	2	4	7	7
$v_1$	$v_2$	$v_3$	0	

- Значение 4 базисной ячейки находится во 2-й строке, 3-м столбце, тогда рассмотрим сумму соответствующих потенциалов.

- $v_3 + 7 = 4$  откуда  $v_3 = -3$



# Метод потенциалов решения транспортной задачи - шаг 1

- Далее все аналогично:
- Значение 2 равно сумме потенциалов 2-й строки и 2-го столбца:
- $2 = v_2 + 7$  откуда  $v_2 = -5$
- $u_1 - 5 = 3$ , откуда  $u_1 = 8$
- $v_1 + 8 = 4$ , откуда  $v_1 = -4$
- В итоге получили:

	B1	B2	B3	B4
A1	50	50		
A2		50	75	75

4	3			$u_1$
	2	4	7	7
$v_1$	$v_2$	-3	0	+

	B1	B2	B3	B4
A1	50	50		
A2		50	75	75

4	3			$u_1$
	2	4	7	7
$v_1$	-5	-3	0	+

	B1	B2	B3	B4
A1	50	50		
A2		50	75	75

4	3			8
	2	4	7	7
$v_1$	-5	-3	0	+

	B1	B2	B3	B4
A1	50	50		
A2		50	75	75

4	3			8
	2	4	7	7
-4	-5	-3	0	

# Метод потенциалов решения транспортной задачи - шаг 1

- Далее приступим к заполнению пустых ячеек (свободные ячейки) правой таблицы.
- Свободные ячейки подчиняются тому же правилу суммирования потенциалов.

	B1	B2	B3	B4
A1	50	50		
A2		50	75	75

- Вычислим оценочную матрицу, по которой узнаем, оптимален ли рассматриваемый план.
- Из каждого элемента матрицы стоимостей вычтем соответствующий элемент правой таблицы:

$$C = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 5 & 6 \\ 8 & 2 & 4 & 7 \end{pmatrix} - \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 4 & 3 & 5 & 8 \\ \hline 3 & 2 & 4 & 7 \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 0 & 0 & 0 & -2 \\ \hline 5 & 0 & 0 & 0 \\ \hline \end{array}$$

- Получили оценочную матрицу. Заметим, что в базисных ячейках всегда получим нули.

# Метод потенциалов решения транспортной задачи - шаг 1

- Критерий оптимальности:
- если в оценочной матрице нет отрицательных элементов, то решение оптимально, в противном случае решение не оптимально.

0	0	0	-2
5	0	0	0

- Согласно критерию оптимальности, решение выше не оптимально, так как в оценочной таблице присутствует отрицательное значение.
- Дабы не загромождать решение множеством таблиц, оценочная матрица в нашем решении будет "вписана" в правую таблицу.
- Подчеркнутые значения - базисные ячейки, как сказано выше, значения оценочной матрицы в базисных ячейках равны нулю, нули писать не будем. Выделенные значения - значения оценочной матрицы в свободных ячейках, среди них ищем отрицательные значения.
- Для перехода к следующему опорному решению выполним следующее (построим цикл пересчета):
- найдем среди отрицательных значений оценочной матрицы максимальный по модулю (или по другому, минимальный среди отрицательных)
- в соответствующей ячейке левой таблицы ставим знак "+"

	B1	B2	B3	B4
A1	50	50		
A2		50	75	75

<u>4</u>	<u>3</u>	<u>0</u>	<u>-2</u>	8
<u>5</u>	<u>2</u>	<u>4</u>	<u>7</u>	7
-4	-5	-3	0	

# Метод потенциалов решения транспортной задачи - шаг 1

- В нашем примере наименьшее отрицательное значение -2.

	B1	B2	B3	B4
A1	50	50		+
A2		50	75	75

<u>4</u>	<u>3</u>	<u>0</u>	<u>-2</u>	8
<u>5</u>	<u>2</u>	<u>4</u>	<u>7</u>	7
-4	-5	-3	0	

- Знак " + " ставим в ячейке 1-й строки, 4-го столбца левой таблицы - ячейка соответствующая значению (-2).
- Необходимо расставить чередующиеся значения " + " и " - " в левой таблице так, чтобы получился замкнутый цикл и выполнялись правила:
  - - остальные знаки цикла (все кроме уже поставленного первого " + ") ставим только в заполненных (базисных) ячейках таблицы,
  - - если в строке есть "плюс" ("минус"), то в этой строке должен быть и "минус" ("плюс"),
  - - если в столбце есть "плюс" ("минус"), то в этом столбце должен быть и "минус" ("плюс").
- Применим к нашей таблице:
  - В столбце B4 есть "плюс", следовательно в этом столбце должен быть и "минус".

	B1	B2	B3	B4
A1	50	50		+
A2		50	75	75

<u>4</u>	<u>3</u>	0	-2	8
5	<u>2</u>	<u>4</u>	<u>7</u>	7
3	-4	-5	-3	0

# Метод потенциалов решения транспортной задачи - шаг 1

- Аналогично, в строке A2 есть "минус", следовательно должен быть и "плюс".
- Если мы поставим этот "плюс" в столбце B3, то цепочка порвется, так как в этом же столбце невозможно поставить "минус" — нет заполненной ячейки.
- Ставим " + " в столбце B2 и продолжаем чередовать знаки.
- Получили замкнутый цикл чередующихся знаков. Цикл пересчета найден!

	B1	B2	B3	B4
A1	50	50 -		+
A2		50 +	75	75 -

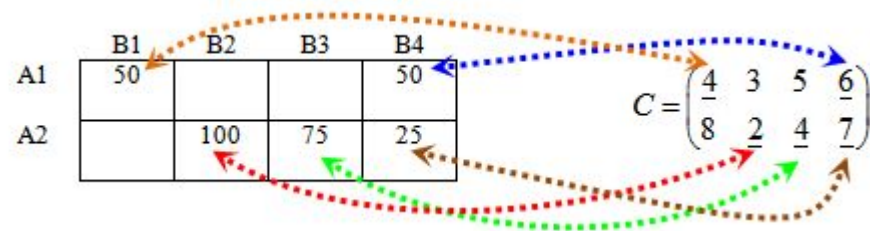
<u>4</u>	<u>3</u>	0	-2	8
5	2	4	7	
3				7
-4	-5	-3	0	

- Общее количество заполненных (базисных) ячеек при пересчете не должно измениться!
- Получили следующий опорный п

	B1	B2	B3	B4
A1	50			50
A2		100	75	25

# Метод потенциалов решения транспортной задачи - шаг 1

- Вычислим стоимость перевозки на первом шаге.
- Для этого найдем сумму произведений значений опорного плана и матрицы стоимости



- $S_1 = 50 \cdot 4 + 100 \cdot 2 + 75 \cdot 4 + 25 \cdot 7 + 50 \cdot 6 = 1275$
- На первом шаге решения транспортной задачи получили опорный план:

	B1	B2	B3	B4
A1	50			50
A2		100	75	25

- Общая стоимость перевозки  $S_1 = 1275$

# Метод потенциалов — шаг 2

- Алгоритм проверки плана на оптимальность и построение цикла пересчета очень подробно расписан в шаге 1.
- Далее решение задачи будем излагать менее детально.
- Для полученного опорного решения строим вспомогательную — правую таблицу и заполняем значениями из матрицы стоимостей базисные ячейки.

	B1	B2	B3	B4
A1	50			50
A2		100	75	25

4			6
	2	4	7
			0

- Вычисляем потенциалы строк и столбцов:

	B1	B2	B3	B4
A1	50			50
A2		100	75	25

4			6	6
	2	4	7	7
-2	-5	-3	0	

# Метод потенциалов — шаг 2

- По правилу суммирования соответствующих потенциалов, заполняем свободные ячейки.

	B1	B2	B3	B4
A1	50			50
A2		100	75	25

4	1	3	6	6
5	2	4	7	7
-2	-5	-3	0	

- Вычисляем оценочные значения в свободных ячейках.
- Для этого из значений матрицы стоимостей вычитаем найденные значения соответствующих  $c_{ij}$

	B1	B2	B3	B4
A1	50			50
A2		100	75	25

4	2	2	6	6
3	2	4	7	7
5	-5	-3	0	

- Среди оценочных значений нет отрицательных, следовательно план перевозки оптимален.
- Получили оптимальный план. Итоговая стоимость перевозки  $S_1 = 1275$



# Задание

- В городе имеются три домостроительных комбината (ДСК): А1, А2, А3 и строятся четыре микрорайона: В1, В2, В3, В4. Известны ресурсы: А1 – 80, А2 – 130, А3 – 190 и производственные потребности унифицированных изделий микрорайона: В1 – 140, В2 – 100, В3 – 100, В4 – 60. Известны также затраты, связанные с доставкой одного комплекта унифицированных изделий из каждого пункта комплектования в каждый

	В1	В2	В3	В4
А1	3	1	5	7
А2	5	4	8	3
А3	7	6	12	11

- Требуется распределить продукцию ДСК по микрорайонам, чтобы суммарные приведенные затраты, связанные с доставкой всего груза от отправителя к потребителю, были минимальны.

Дисциплина: «МДК 01.03. Математическое  
моделирование»

Тема «Транспортная задача. Методы нахождения  
начального решения транспортной задачи»

Преподаватель спец. дисциплин Радунцева Александра Антоновна