Дисциплина: «МДК 01.03. Математическое моделирование»

Тема «Транспортная задача. Методы нахождения начального решения транспортной задачи»

Преподаватель спец. дисциплин Радунцева Александра Антоновна

Транспортная задача

Транспортная задача - это математическая задача линейного программирования специального вида о поиске оптимального распределения однородных объектов с минимизацией затрат на перемещение.

Существует несколько методов решения транспортной задачи. Два из них:

- решение транспортной задачи методом потенциалов (будем использовать)
- решение транспортной задачи с использованием симплекс метода.

Решение задачи методом потенциалов происходит в несколько этапов:

- Определение опорного решения.
- Применение к найденному опорному решению самого метода потенциалов.
- Проверка единственности решения.

Определение опорного плана, в свою очередь, можно выполнить несколькими способами. Рассмотрим два из них:

- метод северо-западного угла
- метод минимальных стоимостей

О чем говорится в определении транспортной задачи?

- У нас есть некоторый груз, который находится на складах: склад 1, склад 2, ..., склад n - это пункты отправления.
- Этот груз нам необходимо развести по магазинам: магазин 1, магазин 2, ..., магазин k - это пункты назначения.
- Нам выгоднее как можно эффективнее выполнить работу, т.е. найти такой вариант перевозки, при котором затраты будут минимальными.
- Транспортная задача задается следующей таблицей:

		B_1 50	B_2 100	B_3 75	B_4 75
A_1	100	4	3	5	6
A_2	200	8	2	4	7

Что означают числа в условии транспортной задачи?

- два склада с товаром: А1 и А2
- объем товара - на складах А1 и А2
- пунктами назначения - В1, В2, В3 и В4
- потребности пунктов назначения
- матрица стоимостей (расценки) перевозки 1 единицы груза из соответствующих пунктов; расстояния между соответствующими пунктами

		B_1 50	B_2 100	B_3 75	B_4 75
A_1	100	4	3	5	6
A_2	200	8	2	4	7

Метод северо-западного угла

- Заполнение таблицы начинается с самой верхней левой (северо-западной) ячейки.
- Перед тем, как распределять ресурсы по "магазинам", проверим, равны ли общие потребности имеющимся ресурсам?
- Потребности: 50 + 100 + 75 + 75 = 300
- Ресурсы: 100 + 200 = 300
- Потребности = Ресурсам
- В этом случае говорят, что транспортная задача закрытая.

		B_1 50	B_2 100	B_3 75	B_4 75
A_1	100	4	3	5	6
A_2	200	8	2	4	7

Метод северо-западного угла

- Начнем нахождение опорного решения:

		B_1 50	B_2 100	B_3 75	B_4 75
A_1	100	✔			
A_2	200				

- В магазин B1 требуется 50 единиц товара. Со склада A1 отправим в этот магазин 50 единиц.
- Потребности магазин… бходимости везти туда груз со склада А2.

		B_1 50	B_2 100	B_3 75	B_4 75
A_1	100	50			
A_2	200	–			

- На складе А1 еще осталось 50 единиц груза. Эти остатки можем направить в магазин В2. Ресурсы склада А…

		B_1 50	B_2 100	B_3 75	B_4 75
A_1	100	50	50	–	–
A_2	200	–			

Метод северо-западного угла

- Переходим к складу А2.
- Так как потребности магазина В1 выполнены полностью, рассмотрим магазин В2, которому требуется 100-50=50 единиц товара. Направим их туда.

		B_1 50	B_2 100	B_3 75	B_4 75
A_1	100	50	50	–	–
A_2	200	–	50		

- Заметим, на складе А2 осталось еще 200-50=150 единиц груза, которые мы распределим по магазинам В3 и В4, полностью удовлетворяя и их потребности.

		B_1 50	B_2 100	B_3 75	B_4 75
A_1	100	50	50	–	–
A_2	200	–	50	75	75

- Склады пусты!
- Потребности магазинов в товаре полностью выполнены!
- Получен опорный (первоначальный) план транспортной задачи.

		B_1 50	B_2 100	B_3 75	B_4 75
A_1	100	50	50	–	–
A_2	200	–	50	75	75

Метод минимальных стоимостей получения опорного плана

- Суть метода состоим в том, чтобы в первую очередь направлять груз в те пункты, где "расценки" в матрице стоимостей минимальны. Если клеток с наименьшими тарифами несколько, то запол

		B_1 50	B_2 100	B_3 75	B_4 75
A_1	100	4	3	5	6
A_2	200	8	2	4	7

- Направляем 100 единиц груза из склада А2 в магазин В2.
- Остатки на складе А2 — 100 единиц. Потребности магазина В2 выполнены.

		B_1 50	B_2 100	B_3 75	B_4 75
A_1	100		–		
A_2	200		100		

- Груз со склада А2 отправим в магазин, у которого стоимость перевозки ниже — магазин В3, так как мин(4;7)=4
- Размер поставки равен потребности магазина — 75. Остатки со склада 200-100-75=25 перенесем в магаз

		B_1 50	B_2 100	B_3 75	B_4 75
A_1	100		–	–	
A_2	200		100	75	25

Метод минимальных стоимостей получения опорного плана

- Остается только раскидать груз со склада А1 по магазинам: В1 — 50 единиц, В4 — 75-25=50 единиц.

		B_1 50	B_2 100	B_3 75	B_4 75
A_1	100	50	–	–	50
A_2	200		100	75	25

- Получили два опорных плана: методом северо-западного угла и методом минимальных стоимостей.
- Первый опорный план (по методу северо-западного угла):

		B_1 50	B_2 100	B_3 75	B_4 75
A_1	100	50	50	–	–
A_2	200	–	50	75	75

- Второй опорный план (по методу минимальных стоимостей):

		B_1 50	B_2 100	B_3 75	B_4 75
A_1	100	50	–	–	50
A_2	200		100	75	25

Проверка правильности вычисления первоначального плана

- Правило:
- Количество заполненных клеток (базисных клеток) в первоначальном плане ВСЕГДА должно быть равно m + n - 1, где m - количество строк, n - количество столбцов
- В нашем случае условие выполняется: 2 + 4 - 1 = 5
- Во избежании случайных вычислительных ошибок проверим, равны ли суммарные значения каждой строки и каждого столбца соответствующим значениям условия.
- 100 = 50 + 50
- 200 = 100 + 75 + 25

		B_1 50	B_2 100	B_3 75	B_4 75
A_1	100	50			50
A_2	200		100	75	25

- По столбцам:

		B_1 50	B_2 100	B_3 75	B_4 75
A_1	100	50			50
A_2	200		100	75	25

- Суммарные значения элементов каждого столбца равны соответствующим потребностям магазинов.
- Несмотря на то, что опорные планы разные, оба приведут к одному оптимальному решению или же к решениям, имеющим одну стоимость перевозки.

Метод потенциалов решения транспортной задачи - шаг 1

- Начнем с проверки опорного плана на оптимальность.
- Выпишем матрицу стоимостей, данную в условии задачи.

Пункты отправления	Пункты назначения				
	B1	B2	B3	B4	Запасы
A1	4	3	5	6	100
A2	8	2	4	7	200
Потребности	50	100	75	75	

$$C = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 5 & 6 \\ 8 & 2 & 4 & 7 \end{pmatrix}$$

- Далее строим рядом две таблицы. Размерность таблиц как и в матрице стоимостей:
- количество строк = количеству складов, количество столбцов = количеству магазинов.
- Заполняем первую — левую таблицу в соответствии с полученным опорным планом.

	B1	B2	B3	B4
A1	50	50		
A2		50	75	75

Метод потенциалов решения транспортной задачи - шаг 1

- Переходим в правую таблицу.
- Переносим из матрицы стоимостей значения, которые соответствуют занятым клеткам левой таблицы.
- В матрице стоимости эти значения подчеркнуты.

$$C = \begin{pmatrix} \underline{4} & \underline{3} & 5 & 6 \\ 8 & \underline{2} & \underline{4} & \underline{7} \end{pmatrix}$$

	B1	B2	B3	B4
A1	50	50		
A2		50	75	75

4	3		
	2	4	7

- Припишем каждой строке правой таблице потенциалы u1, u2. Каждому столбцу — потенциалы v1, v2, v3, v4.

	B1	B2	B3	B4
A1	50	50		
A2		50	75	75

4	3			u_1
	2	4	7	u_2
v_1	v_2	v_3	v_4	

Метод потенциалов решения транспортной задачи - шаг 1

- Для вычисления этих потенциалов в некоторых учебниках составляют систему и из нее определяют неизвестные.
- Будем определять значения потенциалов непосредственно из правой таблицы.
- Составим систему уравнений по следующему правилу:
- Каждое из значений в ячейке (правая таблица) равно сумме потенциалов соответствующей строки и соответствующего столбца.
- Например: значение 4 находится в 1-й строке и 1-м столбце. Тогда сумма потенциалов 1-й строки (u1) и 1-ого столбца(v1) равна 4.

	B1	B2	B3	B4
A1	50	50		
A2		50	75	75

4	3			u_1
	2	4	7	u_2
v_1	v_2	v_3	v_4	

Метод потенциалов решения транспортной задачи - шаг 1

- Первое уравнение системы: $u1 + v1 = 4$
- Рассмотрим следующее значение таблицы.
- Значение 3 находится в первой строке (потенциал $u1$), втором столбце (потенциал $v2$).

	B1	B2	B3	B4
A1	50	50		
A2		50	75	75

4	3			u_1
	2	4	7	u_2
v_1	v_2	v_3	v_4	

- Второе уравнение системы: $u1 + v2 = 3$
- Аналогично для каждого значения таблицы составим уравнение.
- Получим систему уравнений:

$$\begin{cases} u_1 + v_1 = 4 \\ u_1 + v_2 = 3 \\ u_2 + v_2 = 2 \\ u_2 + v_3 = 4 \\ u_2 + v_4 = 7 \end{cases}$$

Метод потенциалов решения транспортной задачи - шаг 1

- Для того, чтобы система имела единственное решение, примем значение одного из потенциалов равным нулю

	B1	B2	B3	B4
A1	50	50		
A2		50	75	75

4	3			u_1
	2	4	7	u_2
v_1	v_2	v_3	0	

- Для удобства в качестве этого потенциала всегда будем брать v4.
- Тогда система уравнений будет выглядеть:

$$\begin{cases} u_1+v_1=4 \\ u_1+v_2=3 \\ u_2+v_2=2 \\ u_2+v_3=4 \\ u_2+0=7 \end{cases}$$

- Решим систему уравнений и получим значения потенциалов:

$$\begin{cases} u_1+v_1=4 \\ u_1+v_2=3 \\ u_2+v_2=2 \\ u_2+v_3=4 \\ u_2+0=7 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} u_1+v_1=4 \\ u_1+v_2=3 \\ 7+v_2=2 \\ 7+v_3=4 \\ u_2=7 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} u_1+v_1=4 \\ u_1-5=3 \\ v_2=-5 \\ v_3=-3 \\ u_2=7 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 8+v_1=4 \\ u_1=8 \\ v_2=-5 \\ v_3=-3 \\ u_2=7 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} v_1=-4 \\ u_1=8 \\ v_2=-5 \\ v_3=-3 \\ u_2=7 \end{cases}$$

Метод потенциалов решения транспортной задачи - шаг 1

- Наглядно:

	B1	B2	B3	B4
A1	50	50		
A2		50	75	75

4	3			8
	2	4	7	7
−4	−5	−3	0	

- Так как система очень проста, то значения потенциалов можно получить и устно.
- Подробно:

	B1	B2	B3	B4
A1	50	50		
A2		50	75	75

4	3			u_1
	2	4	7	u_2
v_1	v_2	v_3	0	

- Сумма отмеченных потенциалов равна 7, следовательно, потенциал u2 = 7

	B1	B2	B3	B4
A1	50	50		
A2		50	75	75

4	3			u_1
	2	4	7	7
v_1	v_2	v_3	0	

- Значение 4 базисной ячейки находится во 2-й строке, 3-м столбце, тогда рассмотрим сумму соответствующих потенциалов.
- v3 + 7 = 4 откуда v3 = -3

Метод потенциалов решения транспортной задачи - шаг 1

- Далее все аналогично:
- Значение 2 равно сумме потенциалов 2-й строки и 2-го столбца:
- 2 = v2 + 7 откуда v2 = -5
- u1 - 5 = 3, откуда u1 = 8
- v1 + 8 = 4, откуда v1 = -4
- В итоге получили:

	B1	B2	B3	B4
A1	50	50		
A2		50	75	75

4	3			u_i
	2	4	7	7
v_1	v_2	-3	0	

	B1	B2	B3	B4
A1	50	50		
A2		50	75	75

4	3			u_i
	2	4	7	7
v_1	-5	-3	0	

	B1	B2	B3	B4
A1	50	50		
A2		50	75	75

4	3			8
	2	4	7	7
v_1	-5	-3	0	

	B1	B2	B3	B4
A1	50	50		
A2		50	75	75

4	3			8
	2	4	7	7
-4	-5	-3	0	

Метод потенциалов решения транспортной задачи - шаг 1

- Далее приступим к заполнению пустых ячеек (свободные ячейки) правой таблицы.
- Свободные ячейки подчиняются тому же правилу суммирования потенциалов.

	B1	B2	B3	B4
A1	50	50		
A2		50	75	75

4	3	5	8	8
3	2	4	7	7
−4	−5	−3	0	

- Вычислим оценочную матрицу, по которой узнаем, оптимален ли рассматриваемый план.
- Из каждого элемента матрицы стоимостей вычтем соответствующий элемент правой таблицы:

$$C=\begin{pmatrix}4 & 3 & 5 & 6\\ 8 & 2 & 4 & 7\end{pmatrix} - \begin{array}{|c|c|c|c|}\hline 4 & 3 & 5 & 8\\ \hline 3 & 2 & 4 & 7\\ \hline\end{array} = \begin{array}{|c|c|c|c|}\hline 0 & 0 & 0 & -2\\ \hline 5 & 0 & 0 & 0\\ \hline\end{array}$$

- Получили оценочную матрицу. Заметим, что в базисных ячейках всегда получим нули.

Метод потенциалов решения транспортной задачи - шаг 1

- Критерий оптимальности:
- если в оценочной матрице нет отрицательных элементов, то решение оптимально, в противном случае решение не оптимально.
- Согласно критерию оптимальности, решение выше не оптимально, так как в оценочной таблице присутствует отрицательное значение.

0	0	0	-2
5	0	0	0

- Дабы не загромождать решение множеством таблиц, оценочная матрица в нашем решении будет "вписана" в правую таблицу.
- Подчеркнутые значения - базисные ячейки, как сказано выше, значения оценочной матрицы в базисных ячейках равны нулю, нули писать не будем. Выделенные значения - значения оценочной матрицы в свободных ячейках, среди них ищем отрицательные значения.
- Для перехода к следующему опорному решению выполним следующее (построим цикл пересчета):
- \- найдем среди отрицательных значений оценочной матрицы максимальный по модулю (или по другому, минимальный среди отрицательных)
- \- в соответствующей ячейке левой таблицы ставим знак " + "

	B1	B2	B3	B4
A1	50	50		
A2		50	75	75

<u>4</u>	<u>3</u>	$\boxed{0}$ 5	$\boxed{-2}$ 8	8
$\boxed{5}$ 3	<u>2</u>	<u>4</u>	<u>7</u>	7
-4	-5	-3	0	

Метод потенциалов решения транспортной задачи - шаг 1

- В нашем примере наименьшее отрицательное значение -2.
- Знак " + " ставим в ячейке 1-й строки, 4-го столбца левой таблицы - ячейка соответствующая значению (-2).

	B1	B2	B3	B4
A1	50	50		+
A2		50	75	75

4	3	0 5	-2 8	8
5 3	2	4	7	7
-4	-5	-3	0	

- Необходимо расставить чередующиеся значения "+ " и " — " в левой таблице так, чтобы получился замкнутый цикл и выполнялись правила:
- \- остальные знаки цикла (все кроме уже поставленного первого " + ") ставим только в заполненных (базисных) ячейках таблицы,
- \- если в строке есть "плюс" ("минус"), то в этой строке должен быть и "минус" ("плюс"),
- \- если в столбце есть " плюс" ("минус"), то в этом столбце должен быть и "минус" ("плюс").
- Применим к нашей таблице:
- В столбце B4 есть "плюс", следовательно в этом столбце должен быть и "минус".

	B1	B2	B3	B4
A1	50	50		+
A2		50	75	75 -

4	3	0 5	-2 8	8
5 3	2	4	7	7
-4	-5	-3	0	

Метод потенциалов решения транспортной задачи - шаг 1

- Аналогично, в строке A2 есть "минус", следовательно должен быть и "плюс".
- Если мы поставим этот "плюс" в столбце B3, то цепочка порвется, так как в этом же столбце невозможно поставить "минус" — нет заполненной ячейки.
- Ставим " + " в столбце B2 и продолжаем чередовать знаки.
- Получили замкнутый цикл чередующихся знаков. Цикл пересчета найден!

	B1	B2	B3	B4
A1	50	50 −		+
A2		50 +	75	75 −

4	3	0 5	-2 8	8
5 3	2	4	7	7
-4	-5	-3	0	

- Общее количество заполненных (базисных) ячеек при пересчете не должно изменится!
- Получили следующий опорный п

	B1	B2	B3	B4
A1	50			50
A2		100	75	25

Метод потенциалов решения транспортной задачи - шаг 1

- Вычислим стоимость перевозки на первом шаге.
- Для этого найдем сумму произведений значений опорного плана и матрицы стоимостей

	B1	B2	B3	B4
A1	50			50
A2		100	75	25

$$C = \begin{pmatrix} \underline{4} & 3 & 5 & \underline{6} \\ 8 & \underline{2} & \underline{4} & \underline{7} \end{pmatrix}$$

- S1 = 50 · 4 + 100 · 2 + 75 · 4 + 25 · 7 + 50 · 6 = 1275
- На первом шаге решения транспортной задачи получили опорный план:

	B1	B2	B3	B4
A1	50			50
A2		100	75	25

- Общая стоимость перевозки S1 = 1275

Метод потенциалов — шаг 2

- Алгоритм проверки плана на оптимальность и построение цикла пересчета очень подробно расписан в шаге 1.
- Далее решение задачи будем излагать менее детально.
- Для полученного опорного решения строим вспомогательную — правую таблицу и заполняем значениями из матрицы стоимостей базисные ячейки.

	B1	B2	B3	B4
A1	50			50
A2		100	75	25

4			6
	2	4	7
			0

- Вычисляем потенциалы строк и столбцов:

	B1	B2	B3	B4
A1	50			50
A2		100	75	25

4			6	6
	2	4	7	7
-2	-5	-3	0	

Метод потенциалов — шаг 2

- По правилу суммирования соответствующих потенциалов, заполняем свободные ячейки.

	B1	B2	B3	B4
A1	50			50
A2		100	75	25

4	1	3	6	6
5	2	4	7	7
-2	-5	-3	0	

- Вычисляем оценочные значения в свободных ячейках.
- Для этого из значений матрицы стоимостей вычитаем найденные значения соответствующих с

	B1	B2	B3	B4
A1	50			50
A2		100	75	25

4	2 1	2 3	6	6
3 5	2	4	7	7
-2	-5	-3	0	

- Среди оценочных значений нет отрицательных, следовательно план перевозки оптимален.
- Получили оптимальный план. Итоговая стоимость перевозки S1 = 1275

Задание

- В городе имеются три домостроительных комбината (ДСК): A1, A2, A3 и строятся четыре микрорайона: B1, B2, B3, B4. Известны ресурсы: A1 – 80, A2 – 130, A3 – 190 и производственные потребности унифицированных изделий микрорайона: B1 – 140, B2 – 100, B3 – 100, B4 – 60. Известны также затраты, связанные с доставкой одного комплекта унифицированных изделий из каждого пункта комплектования в кажды

	B1	B2	B3	B4
A1	3	1	5	7
A2	5	4	8	3
A3	7	6	12	11

- Требуется распределить продукцию ДСК по микрорайонам, чтобы суммарные приведенные затраты, связанные с доставкой всего груза от отправителя к потребителю, были минимальны.

Дисциплина: «МДК 01.03. Математическое моделирование»

Тема «Транспортная задача. Методы нахождения начального решения транспортной задачи»

Преподаватель спец. дисциплин Радунцева Александра Антоновна