

Олимпиадная математика

Занятие 1. Доказательство от противного

Что это такое?

- **Доказательство «от противного»** (лат. *contradictio in contrarium*) в математике — один из самых часто используемых методов доказательства утверждений. Доказательство от противного — вид доказательства, при котором «доказывание» некоторого суждения (тезиса доказательства) осуществляется через опровержение отрицания этого суждения — антитезиса. Этот способ доказательства основывается на истинности законе двойного отрицания в классической логике.

А если попроще?

- Проще так. Чтобы доказать утверждение (пусть будет A), можно предположить, что A неверно и верно утверждение не A . Тогда, если мы путем размышлений придем к противоречию, т. е. к тому, что заведомо не может быть истинным, то получится, что мы изначально неверно предположили, и утверждение A доказано.

Пример 1.

- Врач, убеждая пациента в том, что тот не болен гриппом, может рассуждать следующим образом: «Если бы вы действительно были больны гриппом, то у вас была бы повышена температура, был заложен нос и т. д. Но ничего этого нет. Следовательно, нет и гриппа».
- Здесь:
- A – я не болен гриппом.
- $\neg A$ – я болен гриппом.
- Противоречие – отсутствие симптомов болезни у больного (Но ничего этого нет.).

Пример 2.

- Докажите, что квадрат размером 5×5 нельзя разрезать на квадратики размером 2×2 .
- Доказательство. Предположим, что разрезать можно. В этом случае у нас получится несколько квадратиков 2×2 , т. е. площадью 4. Тогда общая площадь квадратиков делится на 4. Но по условию площадь исходного квадрата $5 \times 5 = 25$ не делится на 4. Получили противоречие. Значит, разрезать подобным образом нельзя.