

# Олимпиадная математика

## Занятие 1. Доказательство от противного

# Что это такое?

---

- **Доказательство «от противного»** (лат. *contradictio in contrarium*) в математике — один из самых часто используемых методов доказательства утверждений. Доказательство от противного — вид доказательства, при котором «доказывание» некоторого суждения (тезиса доказательства) осуществляется через опровержение отрицания этого суждения — антитезиса. Этот способ доказательства основывается на истинности законе двойного отрицания в классической логике.

# А если попроще?

---

- Проще так. Чтобы доказать утверждение (пусть будет  $A$ ), можно предположить, что  $A$  неверно и верно утверждение не  $A$ . Тогда, если мы путем размышлений придем к противоречию, т. е. к тому, что заведомо не может быть истинным, то получится, что мы изначально неверно предположили, и утверждение  $A$  доказано.

# Пример 1.

---

- Врач, убеждая пациента в том, что тот не болен гриппом, может рассуждать следующим образом: «Если бы вы действительно были больны гриппом, то у вас была бы повышена температура, был заложен нос и т. д. Но ничего этого нет. Следовательно, нет и гриппа».
- Здесь:
- $A$  – я не болен гриппом.
- $\neg A$  – я болен гриппом.
- Противоречие – отсутствие симптомов болезни у больного (Но ничего этого нет.).

## Пример 2.

---

- Докажите, что квадрат размером  $5 \times 5$  нельзя разрезать на квадратики размером  $2 \times 2$ .
- Доказательство. Предположим, что разрезать можно. В этом случае у нас получится несколько квадратиков  $2 \times 2$ , т. е. площадью 4. Тогда общая площадь квадратиков делится на 4. Но по условию площадь исходного квадрата  $5 \times 5 = 25$  не делится на 4. Получили противоречие. Значит, разрезать подобным образом нельзя.