



РГСУ

Математика
Лекция
Тема 1
Векторная алгебра

Для создания трехмерной анимации требуется не только разбираться в программном обеспечении, но и быть знатоком физики с математикой. Только обладая совокупностью этих познаний, можно создать реалистичный виртуальный мир.

Представьте себе локоть. Когда он гнется, рука, предплечье, запястье двигаются, а мышцы сжимаются и разжимаются – и все это можно описать при помощи математики.

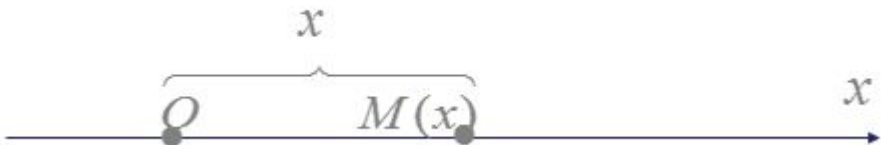
При работе над трехмерной анимацией или графикой компьютерной игры тригонометрия помогает задать вращение и движение, алгебра используется при создании спецэффектов, а интегральное исчисление помогает создать реалистичное освещение.

Стив Джобс.

Декартовы прямоугольные координаты на плоскости

Числовая прямая Ox :

O — начальная точка;



единица измерения и положительное направление;

x — координата точки M : $M(x)$.

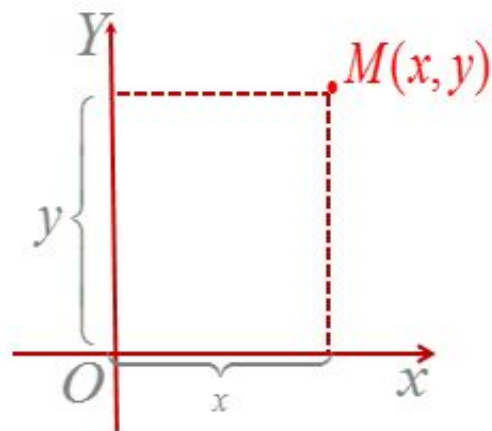
Прямоугольная (или декартовая) система координат на плоскости Oxy :

две взаимно перпендикулярные оси

Ox и Oy , имеющие общее начало O .

Ox — ось абсцисс, Oy — ось ординат.

$(x; y)$ — координата точки M : $M(x; y)$.



Декартовы прямоугольные координаты в пространстве

• **Прямоугольная (или декартовая) система координат в пространстве $Oxyz$:**

три взаимно перпендикулярные оси

Ox , Oy и Oz , имеющие общее начало O .

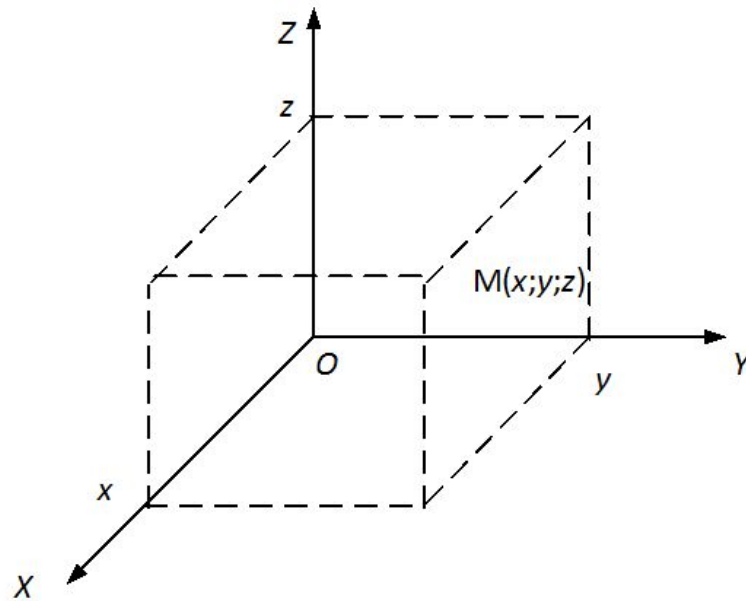
Ox — ось абсцисс,

Oy — ось ординат,

Oz — ось аппликата.

$(x; y; z)$ — координата

точки M : $M(x; y; z)$.



ВЕКТОРЫ

Математические величины делятся на скалярные и векторные.

Скаляр – это некоторое число.

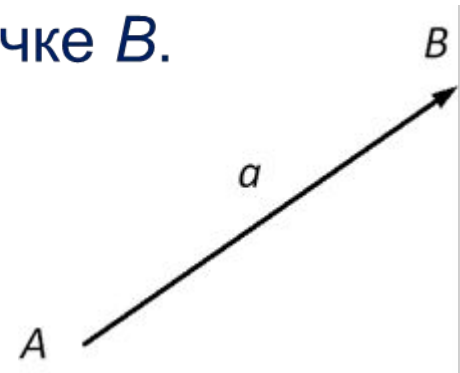
Примеры: длина, объем, масса, температура.

Для скалярных величин введены операции равенства, сравнения, сложения, вычитания, умножения, деления, возведения в степень.

Вектором \overrightarrow{AB} называется направленный отрезок с началом в точке A и концом в точке B .

Другое обозначение:

$$\vec{a} = \overrightarrow{AB}$$



ЭЛЕМЕНТЫ ВЕКТОРНОЙ АЛГЕБРЫ

Длиной (или *модулем*) вектора \overrightarrow{AB} называется длина отрезка AB .

$$|\overrightarrow{AB}| = |\vec{a}| = a$$

Существует нуль-вектор: $\vec{0} = \overrightarrow{AA}$; $|\vec{0}| = 0$

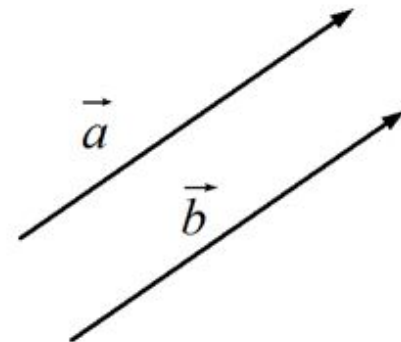
Два вектора называются **равными**:

$$\vec{a} = \vec{b}$$

если 1) они коллинеарные, т.е. лежат на параллельных прямых;

2) направлены в одну сторону (сонаправленные);

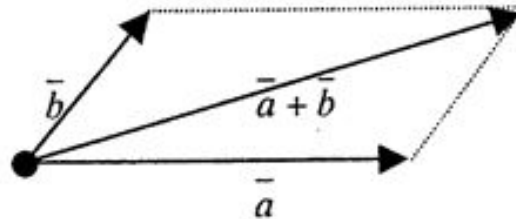
3) имеют одинаковые длины.



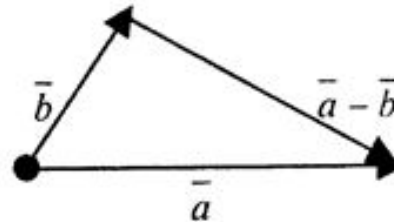
ОПЕРАЦИИ НАД ВЕКТОРАМИ

Линейные операции над векторами

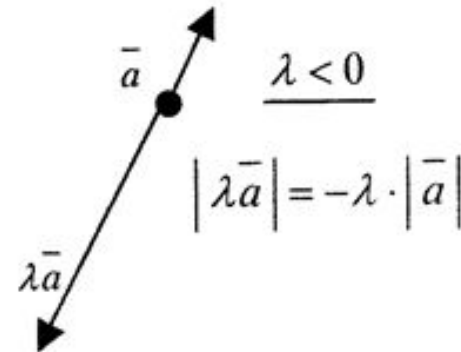
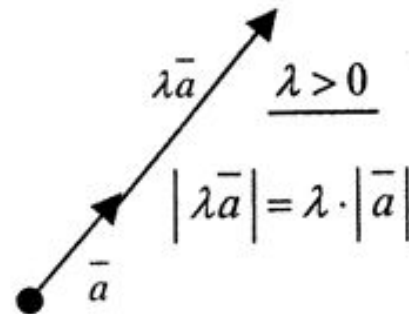
1) Сложение



2) Вычитание



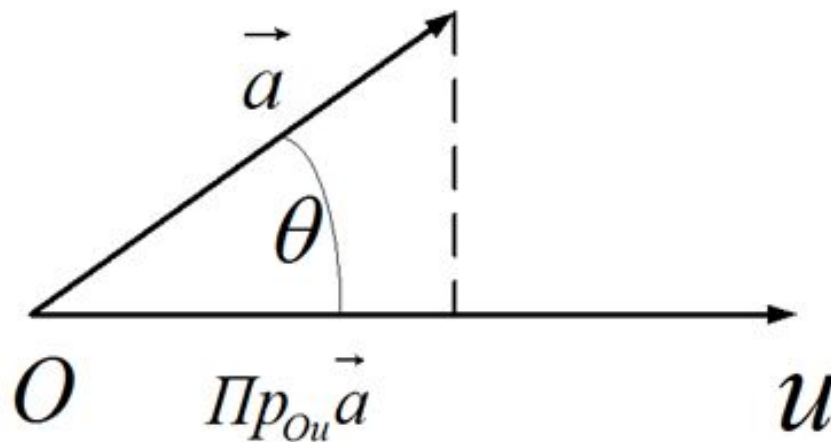
3) Умножение вектора на скаляр λ :



Операции над векторами

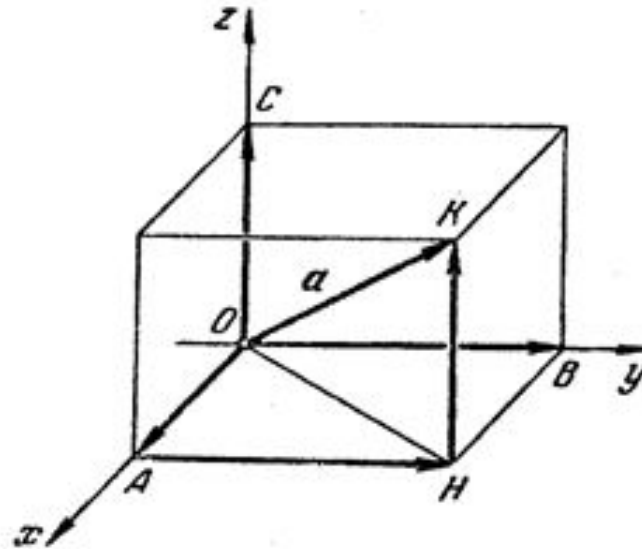
Проекцией вектора \vec{a} на ось Ou называется число обозначаемое $Pr_{Ou}\vec{a}$, вычисляемое по формуле:

$$Pr_{Ou}\vec{a} = |\vec{a}| \cdot \cos(\widehat{\vec{a}, Ou})$$



Координаты вектора

Координатами вектора \vec{a} называются проекции вектора \vec{a} на оси Ox , Oy , Oz : $\vec{a} = (a_x; a_y; a_z)$



$$\vec{a} = \overrightarrow{OK}, \quad a_x = OA, \quad a_y = OB, \quad a_z = OC.$$

Направляющие косинусы

Направляющими углами вектора \vec{a} называются углы между ним и координатными осями:

$$\alpha = (\vec{a}; Ox), \beta = (\vec{a}; Oy), \gamma = (\vec{a}; Oz)$$

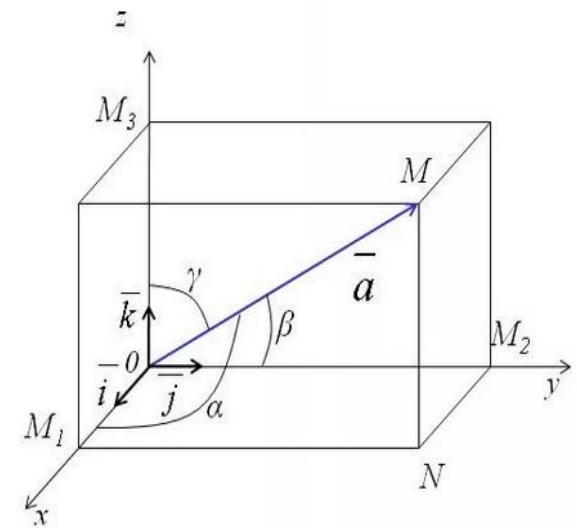
Косинусы направляющих углов называются **направляющими косинусами** вектора \vec{a} :

$$\cos \alpha = \cos(\vec{a}; Ox),$$

$$\cos \beta = \cos(\vec{a}; Oy),$$

$$\cos \gamma = \cos(\vec{a}; Oz).$$

$$\cos \alpha = \frac{a_x}{|\vec{a}|}, \cos \beta = \frac{a_y}{|\vec{a}|}, \cos \gamma = \frac{a_z}{|\vec{a}|}$$



Операции над векторами, заданными своими координатами

Пусть $\vec{a} = (a_x; a_y; a_z)$. $\vec{b} = (b_x; b_y; b_z)$

Тогда: $|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$.

$$\vec{a} = \vec{b} \Leftrightarrow a_x = b_x; \quad a_y = b_y; \quad a_z = b_z.$$

$$\vec{a} + \vec{b} = (a_x + b_x, a_y + b_y, a_z + b_z),$$

$$\vec{a} - \vec{b} = (a_x - b_x, a_y - b_y, a_z - b_z),$$

$$\lambda \cdot \vec{a} = (\lambda \cdot a_x, \lambda \cdot a_y, \lambda \cdot a_z).$$

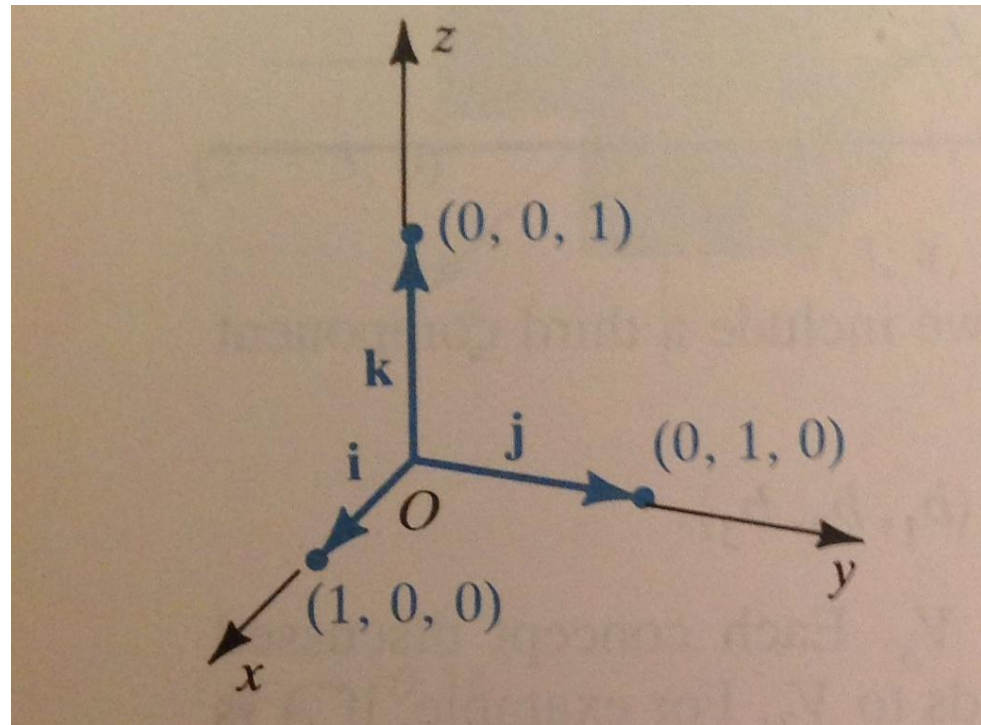
Пример.

Пусть $\vec{a} = (2; 5; -2)$, $\vec{b} = (-1; 3; 7)$.

$$\vec{a} + \vec{b} = (1; 8; 5), \quad \vec{a} - \vec{b} = (3; 2; -9), \quad 3\vec{a} + \vec{b} = (5; 18; 1)$$

Разложение вектора по ортам

Орты $\vec{i}; \vec{j}; \vec{k}$ – единичные векторы осей Ox , Oy , Oz .



Тогда

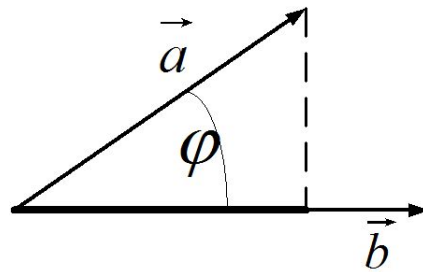
$$\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}.$$

Скалярное произведение

Скалярным произведением двух векторов \vec{a} и \vec{b} называется число (\vec{a}, \vec{b}) или $\vec{a} \cdot \vec{b}$, вычисляемое по формуле

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \varphi$$

где φ – угол между векторами \vec{a} и \vec{b}



$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \text{Пр}_{\vec{b}} \vec{a} \cdot |\vec{b}|$$

Если известны координаты векторов, то

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x \cdot b_x + a_y \cdot b_y + a_z \cdot b_z$$

Свойства скалярного произведения

- 1. $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$
- 2. $(\alpha \cdot \vec{a}) \cdot (\beta \cdot \vec{b}) = \alpha\beta \cdot \vec{a} \cdot \vec{b}$
- 3. $\vec{c} \cdot (\vec{a} + \vec{b}) = \vec{c} \cdot \vec{a} + \vec{c} \cdot \vec{b}$
- 4. $\cos \varphi = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$ φ — угол между двумя векторами

Коллинеарность и перпендикулярность векторов

Векторы коллинеарные тогда и только тогда, когда координаты пропорциональны:

$$\vec{a} \parallel \vec{b} \Leftrightarrow \frac{a_x}{b_x} = \frac{a_y}{b_y} = \frac{a_z}{b_z} = k$$

Векторы перпендикулярные тогда и только тогда, когда их скалярное произведение равно нулю.

$$\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0$$

Пример скалярного произведения:

$$\vec{a} = (2; 5; -2), \vec{b} = (-1; 3; 7) \quad \vec{a} \cdot \vec{b} = -2 + 15 - 14 = -1$$

Пример

Даны векторы : $\vec{a} = (2; -1; -2)$; $\vec{b} = (8; -4; 0)$.

Найти:

1. $\vec{c} = 2\vec{a}$; $\vec{d} = \vec{b} - \vec{a}$;

2. длины векторов \vec{c} и \vec{d} ;

3. скалярный квадрат вектора \vec{d} ;

4. скалярное произведение векторов \vec{c} и \vec{d} ;

5. угол между векторами \vec{c} и \vec{d}

$$\vec{a} = (2; -1; -2); \quad \vec{b} = (8; -4; 0).$$

Решение

1. По определению

$$\vec{c} = 2\vec{a} = (4; -2; -4), \quad \vec{d} = \vec{b} - \vec{a} = (6; -3; 2).$$

2. Найдем длины векторов \vec{c} и \vec{d} . По формуле найдем

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$$

$$|\vec{c}| = \sqrt{4^2 + (-2)^2 + (-4)^2} = 6, \quad |\vec{d}| = \sqrt{6^2 + (-3)^2 + 2^2} = 7.$$

3. Скалярный квадрат равен квадрату модуля вектора, т.е.

$$(\vec{d}, \vec{d}) = d^2 = 49.$$

4. Скалярное произведение

$$(\vec{c} \vec{d}) = c_x d_x + c_y d_y + c_z d_z.$$

$$(\vec{c} \vec{d}) = 4 \cdot 6 + (-2) \cdot (-3) + (-4) \cdot 2 = 22.$$

5. Угол между векторами \vec{c} и \vec{d} определяется равенством:

$$\cos \varphi = \frac{(\vec{c}, \vec{d})}{|\vec{c}| \cdot |\vec{d}|} = \frac{22}{6 \cdot 7} \approx 0,52$$

Откуда

$$\varphi = \arccos 0,52 \approx 58^\circ.$$

Разложение вектора

Задача: разложить вектор $\vec{c} = (3; 4)$ по векторам

$$\vec{a} = (3; -1) \text{ и } \vec{b} = (1; -2).$$

Решение. Найдем числа α и β , удовлетворяющие равенству

$$\vec{c} = \alpha \cdot \vec{a} + \beta \cdot \vec{b}$$

или $(c_x; c_y) = \alpha \cdot (a_x; a_y) + \beta \cdot (b_x; b_y)$

Для примера: $(3; 4) = \alpha \cdot (3; -1) + \beta \cdot (1; -2)$.

Перейдем от векторного к покомпонентному равенству:

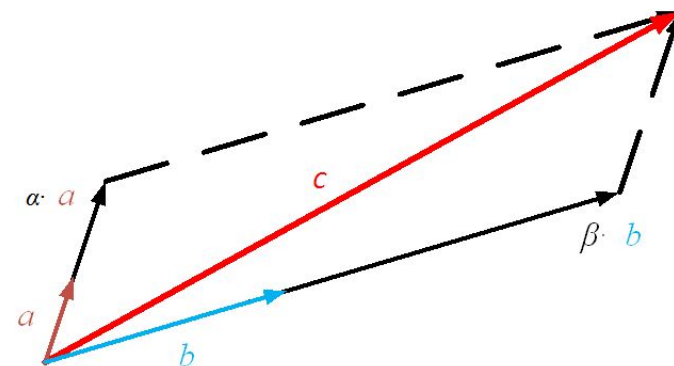
$$\begin{cases} c_x = \alpha \cdot a_x + \beta \cdot b_x, \\ c_y = \alpha \cdot a_y + \beta \cdot b_y. \end{cases}$$

Для примера получим систему
$$\begin{cases} 3\alpha + \beta = 3, \\ -\alpha - 2\beta = 4. \end{cases}$$

Из системы находим коэффициенты α и β :

Тогда

$$\vec{c} = 2\vec{a} - 3\vec{b}$$



Матрицы второго и третьего порядка

Квадратной матрицей второго порядка называется таблица чисел:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

содержащая две строки и два столбца.

Числа a_{11}, a_{22} образуют главную диагональ матрицы A ; числа a_{12}, a_{21} – побочную (второстепенную) диагональ матрицы.

Квадратной матрицей третьего порядка называется таблица чисел:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

содержащая три строки и три столбца.

Числа a_{11}, a_{22}, a_{33} образуют главную диагональ матрицы; числа a_{13}, a_{22}, a_{31} – побочную (второстепенную) диагональ матрицы.

Определитель второго порядка

Определителем квадратной матрицы A второго порядка или – определителем второго порядка) называется число, обозначаемое:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \quad (\text{или } |A|)$$

и вычисляемое по формуле:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

Пример. $\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 3 \cdot 4 - (-1) \cdot 2 = 12 + 2 = 14$

Определитель третьего порядка

Определителем квадратной матрицы A третьего порядка или- определителем третьего порядка) называется число, обозначаемое:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \quad (\text{или } |A|)$$

и вычисляемое по формуле:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \cdot \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \cdot \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

которая называется формулой **разложения определителя по элементам первой строки.**

Определитель третьего порядка.

Пример 1.

Вычислить определитель:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 6 \\ 4 & 3 & -1 \\ 2 & -2 & 5 \end{vmatrix}$$

Решение:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 6 \\ 4 & 3 & -1 \\ 2 & -2 & 5 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 5 \end{vmatrix} - 2 \cdot \begin{vmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} + 6 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} =$$

$$= (3 \cdot 5 - (-2) \cdot (-1)) - 2 \cdot (4 \cdot 5 - 2 \cdot (-1)) + 6 \cdot (4 \cdot (-2) - 2 \cdot 3) =$$
$$= (15 - 2) - 2 \cdot (20 + 2) + 6 \cdot (-8 - 6) = 13 - 44 - 84 = -115.$$

Разложения определителя по элементам любой строки (столбца) матрицы

- Для вычисления определителя третьего порядка можно воспользоваться правилом разложения определителя по элементам любой строки (столбца) матрицы A .
- При этом элементы выбранной строки (столбца) берут со знаками, указанными в следующей схеме:

$$\begin{vmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{vmatrix}$$

то есть знак «+» ставят у тех элементов a_{ij} , для которых сумма индексов $i+j$ есть число четное, «-» – сумма индексов $i+j$ есть число нечетное.

Разложение определителя третьего порядка по элементам второй строки

Например, выбрав для разложения вторую строку определителя, получим формулу разложения определителя третьего порядка по элементам второй строки:

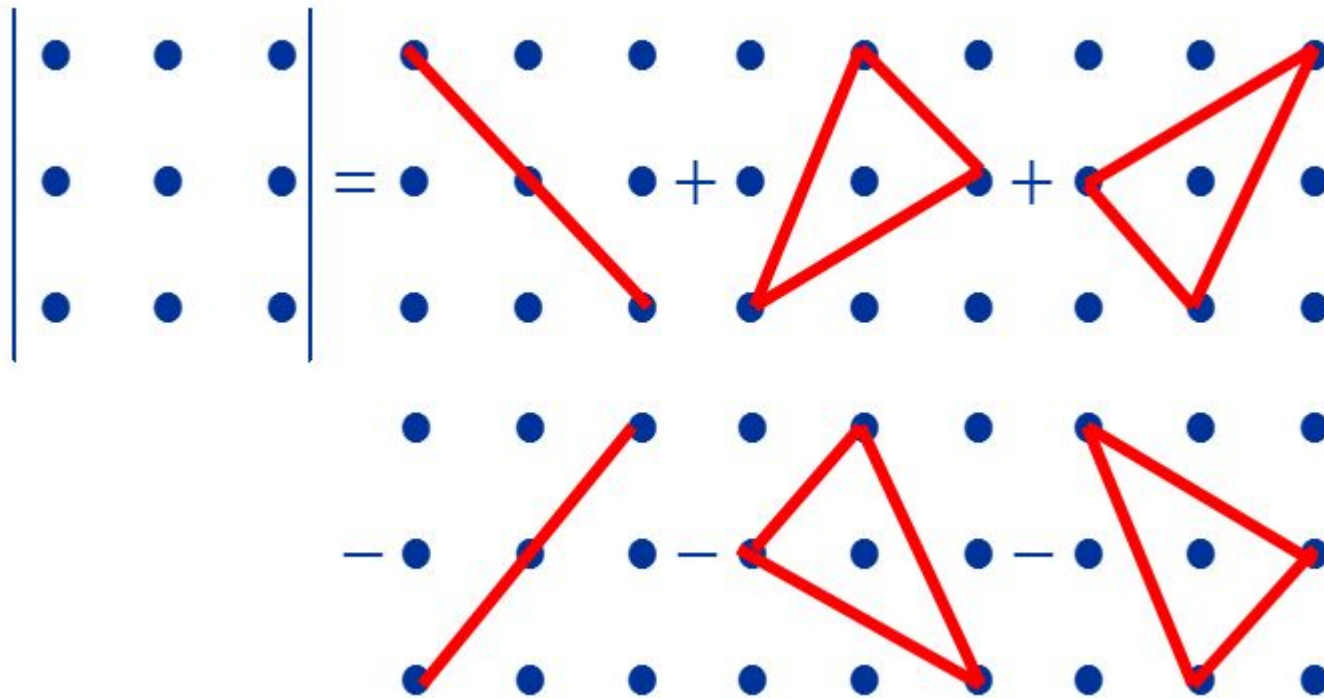
$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = -a_{21} \cdot \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{22} \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{23} \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}.$$

Пример.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 5 & -1 \\ 1 & 7 & 0 \end{vmatrix} = -0 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 7 & 0 \end{vmatrix} + 5 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} - (-1) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 7 \end{vmatrix} =$$
$$0 + 5 \cdot (-1) + (7 - 2) = -5 + 5 = 0$$

Правило треугольников вычисления определителя третьего порядка

Для вычисления определителя третьего порядка можно воспользоваться правилом треугольников:



где выделенные элементы нужно перемножить.

Пример правила треугольников вычисления определителя третьего порядка

Вычислить определитель:

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 7 & 4 \\ 5 & 3 & -3 \end{vmatrix}$$

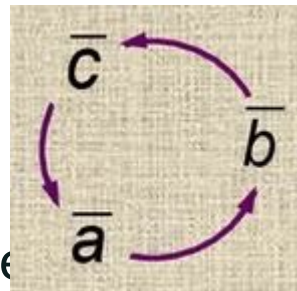
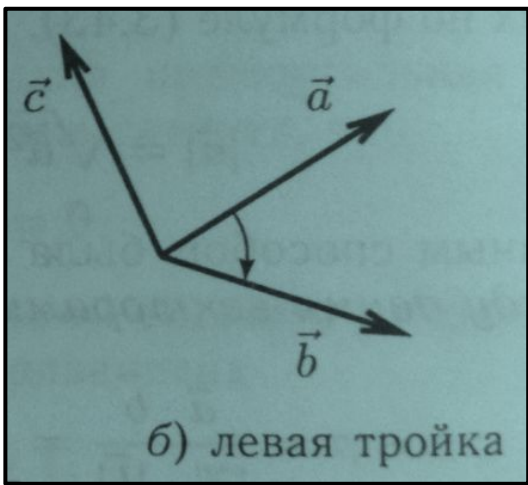
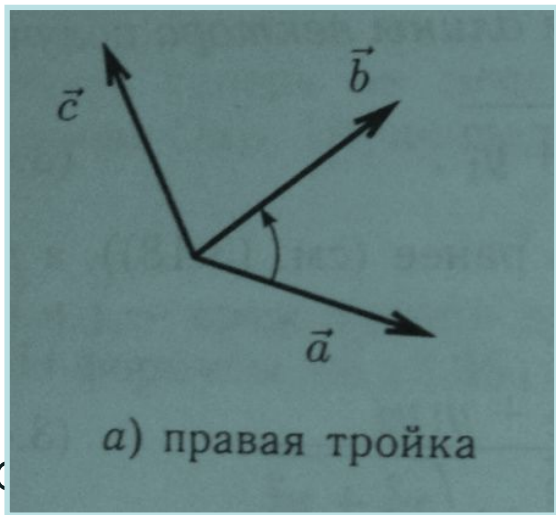
Решение.

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 7 & 4 \\ 5 & 3 & -3 \end{vmatrix} = 1 \cdot 7 \cdot (-3) + (-2) \cdot 4 \cdot 5 + 0 \cdot 3 \cdot 3 - 5 \cdot 7 \cdot 3 - \\ - 3 \cdot 4 \cdot 1 - 0 \cdot (-2) \cdot (-3) = -21 - 40 - 105 - 12 = -178$$

Ориентация тройки векторов

Три некопланарных вектора образуют правую тройку, если с конца третьего вектора кратчайший поворот от первого вектора ко второму вектору виден против часовой.

Три некопланарных вектора образуют левую тройку, если с конца третьего вектора кратчайший поворот от первого вектора ко второму вектору виден по часовой стрелке.



Ор... ров
перестановке этих векторов.

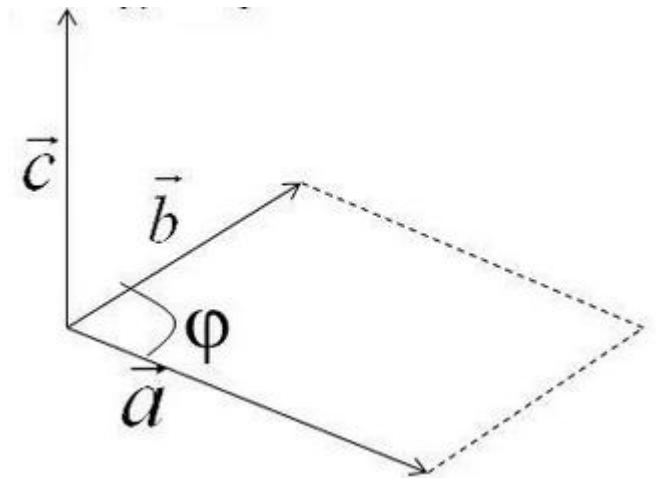
кличес

Векторное произведение двух векторов

Векторным произведением вектора \vec{a} на вектор \vec{b} называется вектор \vec{c} , удовлетворяющий условиям:

- длина вектора \vec{c} равна $|\vec{c}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \sin \varphi$,
где φ — угол между векторами \vec{a} и \vec{b} .
- вектор \vec{c} ортогонален векторам \vec{a} и \vec{b} .
- векторы $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ образуют правую тройку.

Векторное произведение вектора \vec{a} на вектор \vec{b} обозначается $\vec{a} \times \vec{b}$ или $[\vec{a}, \vec{b}]$.

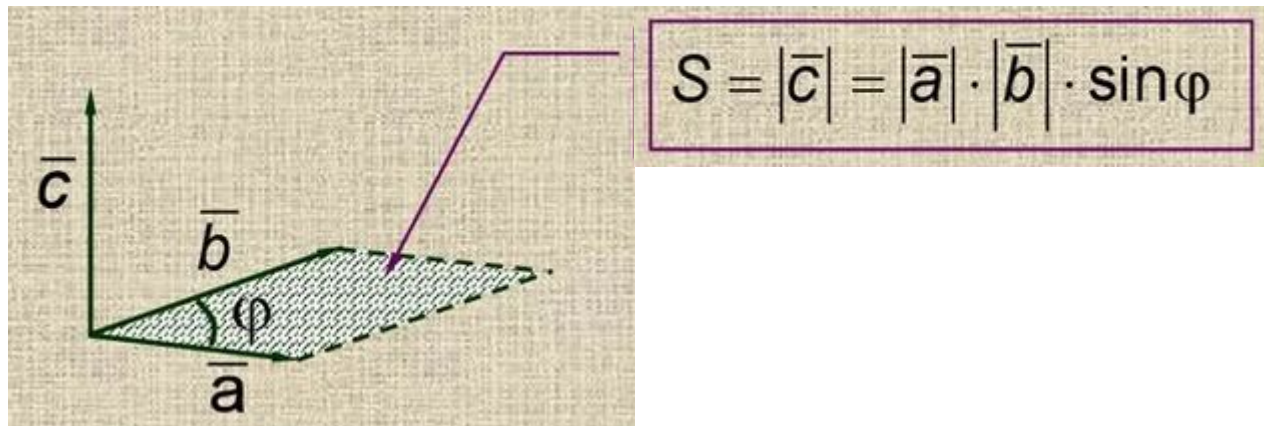


Основные свойства векторного произведения

- Векторное произведение $\vec{a} \times \vec{b}$ равно нулю тогда и только тогда, когда векторы \vec{a} и \vec{b} коллинеарные.

$$\vec{a} \times \vec{b} = 0 \iff \vec{a} \parallel \vec{b}$$

- Длина вектора $\vec{a} \times \vec{b}$ численно равна площади параллелограмма, сторонами которого служат векторы \vec{a} и \vec{b} .



Законы векторного произведения

$$1) \bar{a} \times \bar{b} = -\bar{b} \times \bar{a}$$

$$2) \bar{a} \times (\bar{b} + \bar{c}) = \bar{a} \times \bar{b} + \bar{a} \times \bar{c}$$

$$3) \lambda(\bar{a} \times \bar{b}) = (\lambda\bar{a}) \times \bar{b} = \bar{a} \times (\lambda\bar{b})$$

$$4) \bar{a} \times \bar{a} = \mathbf{0} \text{ - векторный квадрат равен нулю для любого вектора}$$

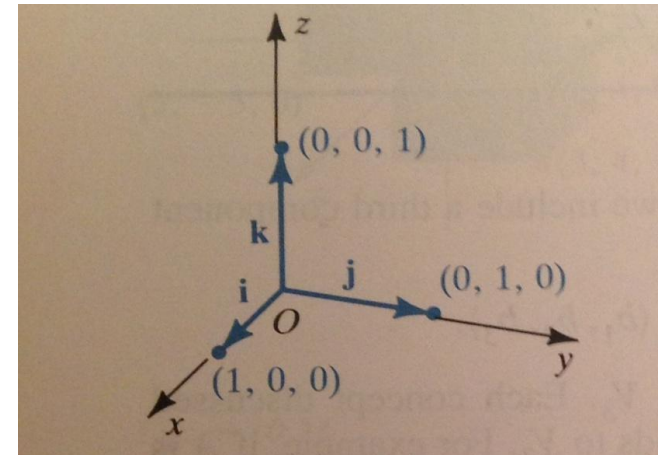
Выражение векторного произведения через прямоугольные координаты

Пусть $Oxyz$ - прямоугольная система координат,

$\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ – орты координатных осей этой системы.

$$\vec{a} = (a_x; a_y; a_z) \quad \vec{b} = (b_x; b_y; b_z)$$

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix};$$



$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix} \vec{k}$$

Пример применения в геометрии векторного произведения

Векторное произведение векторов

Найти площадь треугольника с вершинами:

$$A(2; 3; 1) \quad B(5; 6; 3) \quad C(7; 1; 10)$$

Найдем координаты векторов:

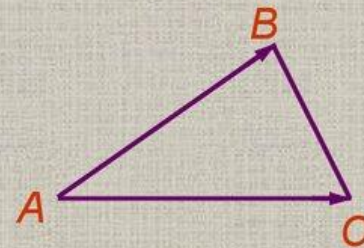
$$\overline{AB} = \{5 - 2; 6 - 3; 3 - 1\} = \{3; 3; 2\}$$

$$\overline{AC} = \{7 - 2; 1 - 3; 10 - 1\} = \{5; -2; 9\}$$

$$S = \frac{1}{2} |\overline{a} \times \overline{b}|$$

$$\overline{a} \times \overline{b} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 3 & 3 & 2 \\ 5 & -2 & 9 \end{vmatrix} = 31\bar{i} - 17\bar{j} - 21\bar{k}$$

$$S = \frac{1}{2} \sqrt{31^2 + (-17)^2 + (-21)^2} = \frac{1}{2} \sqrt{1691} \approx 20.6$$



Смешанное произведение трех векторов

• Смешанным произведением трех векторов \vec{a} , \vec{b} и \vec{c} называется число, обозначаемое $\vec{a} \cdot \vec{b} \cdot \vec{c}$ равное скалярному произведению векторов \vec{a} и $\vec{b} \times \vec{c}$.

$$\vec{a} \cdot \vec{b} \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})$$

Свойства смешанного произведения

1. $\vec{a} \cdot \vec{b} \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}$

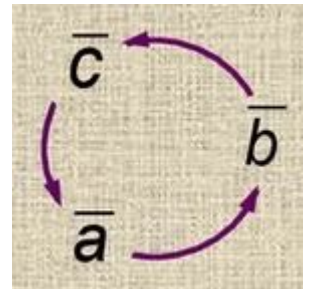
2. Смешанное произведение не меняется при циклической перестановке векторов:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} \cdot \vec{c} = \vec{b} \cdot \vec{c} \cdot \vec{a} = \vec{c} \cdot \vec{a} \cdot \vec{b}$$

3. $(\alpha \vec{a}) \cdot (\beta \vec{b}) \cdot (\gamma \vec{c}) = (\alpha \beta \gamma) \cdot (\vec{a} \cdot \vec{b} \cdot \vec{c}), \quad \alpha, \beta, \gamma - const$

4. $(\vec{a}_1 + \vec{a}_2) \cdot \vec{b} \cdot \vec{c} = \vec{a}_1 \cdot \vec{b} \cdot \vec{c} + \vec{a}_2 \cdot \vec{b} \cdot \vec{c}$

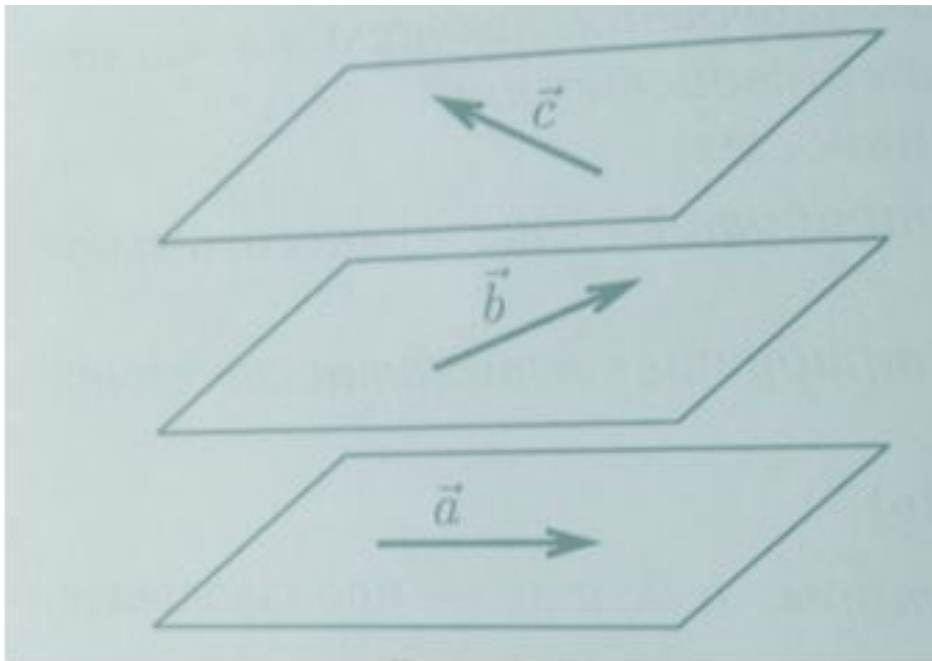
Возможные обозначения: $\vec{a} \cdot \vec{b} \cdot \vec{c} = (\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$



Компланарные векторы

Три вектора $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ называются **компланарными**, если они лежат на одной плоскости или на параллельных плоскостях.

В противном случае векторы $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ называются **некомпланарными**.



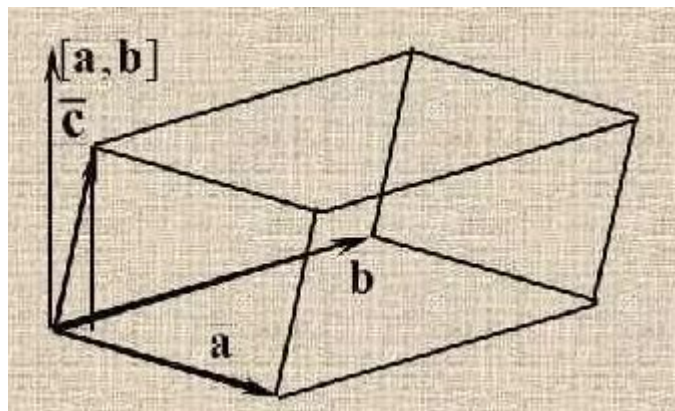
Если хотя бы один из векторов $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ нулевой, то эти векторы компланарны.

Свойства смешанного произведения

5. Смешанное произведение векторов \vec{a} , \vec{b} и \vec{c} равно нулю тогда и только тогда, когда эти векторы компланарны.

$$\vec{a}\vec{b}\vec{c} = 0 \iff \vec{a}; \vec{b}; \vec{c} \text{ – компланарны}$$

6. Абсолютная величина смешанного произведения трех векторов численно равна объему параллелепипеда, построенного на этих векторах



$$V = |(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})|.$$

Объем треугольной пирамиды

$$V = \frac{1}{6} \cdot |(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})|.$$

Выражение смешанного произведения через координаты векторов

$$\bar{b} \times \bar{c} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}, \quad \text{или} \quad \bar{b} \times \bar{c} = \left\{ \begin{vmatrix} b_y & b_z \\ c_y & c_z \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} b_z & b_x \\ c_z & c_x \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} b_x & b_y \\ c_x & c_y \end{vmatrix} \right\}.$$

$$\bar{a} \cdot (\bar{b} \times \bar{c}) = a_x \begin{vmatrix} b_y & b_z \\ c_y & c_z \end{vmatrix} + a_y \begin{vmatrix} b_z & b_x \\ c_z & c_x \end{vmatrix} + a_z \begin{vmatrix} b_x & b_y \\ c_x & c_y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}.$$

$$\bar{a} \cdot (\bar{b} \times \bar{c}) = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}.$$

Пример применения смешанного произведения трех векторов

Пример. Найти объем пирамиды с вершинами

$$A(3,0,0), B = (1,3,0), C = (-2,-1,0), D = (1,1,6).$$

Решение. Данная пирамида построена на векторах

$$\vec{a} = \overrightarrow{AB} = (-2, -3, 0), \vec{b} = \overrightarrow{AC} = (-5, -1, 0), \vec{c} = \overrightarrow{AD} = (-2, 1, 6).$$

Вычислим смешанное произведение этих векторов по формуле

$$\vec{a} \cdot \vec{b} \cdot \vec{c} = \begin{vmatrix} -2 & 3 & 0 \\ -5 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & 6 \end{vmatrix} = 6 \cdot \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ -5 & -1 \end{vmatrix} = 6 \cdot (2 + 15) = 102.$$

$$V = \frac{1}{6} \vec{a} \cdot \vec{b} \cdot \vec{c} = \frac{102}{6} = 17.$$

Ответ : 17

