РГСУ

Математика
Лекция
Тема 1
Векторная алгебра

Для создания трехмерной анимации требуется не только разбираться в программном обеспечении, но и быть знатоком физики с математикой. Только обладая совокупностью этих познаний, можно создать реалистический виртуальный мир.

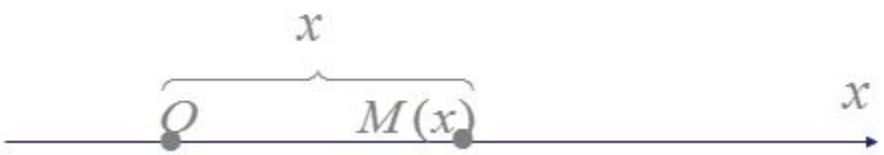
Представьте себе локоть. Когда он гнется, рука, предплечье, запястье двигаются , а мышцы сжимаются и разжимаются – и все это можно описать при помощи математики.

При работе над трехмерной анимацией или графикой компьютерной игры тригонометрия помогает задать
вращение и движение, алгебра используется при создании спецэффектов, а интегральное исчисление помогает создать реалистичное освещение.

Стив Джобс.

Декартовы прямоугольные координаты на плоскости

- ***Числовая прямая Ox:***



O — начальная точка;

единица измерения и положительное направление;

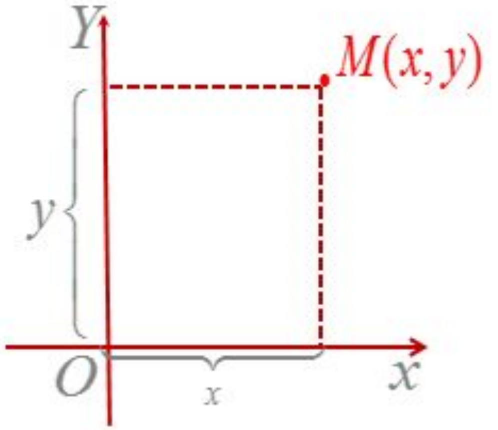
x — координата точки M: $M(x)$.

Прямоугольная (или декартовая) система координат на плоскости Oxy:

две взаимно перпендикулярные оси Ox и Oy, имеющие общее начало O.

Ox — ось абсцисс, Oy — ось ординат.

$(x; y)$ — координата точки M: $M(x; y)$.



Декартовы прямоугольные координаты в пространстве

- ***Прямоугольная (или декартовая) система координат в пространстве $Oxyz$:***

три взаимно перпендикулярные оси

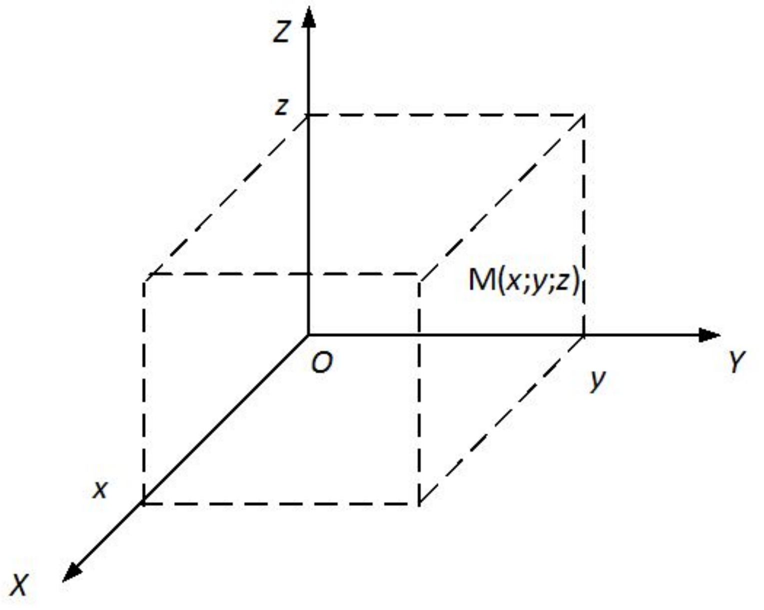
Ox , Oy и Oz, имеющие общее начало *O*.

Ox — ось абсцисс,

Oy — ось ординат,

Oz — ось аппликата.

$(x; y; z)$ — координата точки *M*: $M(x; y; z)$.



ВЕКТОРЫ

Математические величины делятся на скалярные и векторные.

Скаляр – это некоторое число.

Примеры: длина, объем, масса, температура.

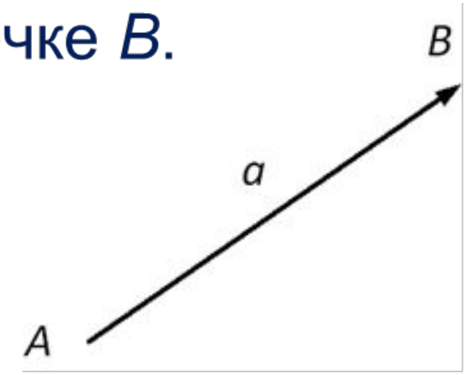
Для скалярных величин введены операции

равенства, сравнения, сложения, вычитания, умножения, деления, возведения в степень.

Вектором $\overrightarrow{AB}$ называется направленный отрезок с началом в точке *A* и концом в точке *B*.

Другое обозначение:

$$\vec{a} = \overrightarrow{AB}$$



ЭЛЕМЕНТЫ ВЕКТОРНОЙ АЛГЕБРЫ

Длиной (или *модулем*) вектора $\overrightarrow{AB}$ называется длина отрезка *AB*.

$$\left|\overrightarrow{AB}\right| = |\vec{a}| = a$$

Существует нуль- вектор: $\vec{0} = \overrightarrow{AA}$ $\quad |\vec{0}| = 0$

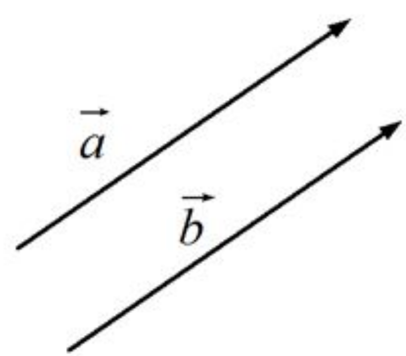
Два вектора называются равными:

$$\vec{a} = \vec{b}$$

если 1) они коллинеарные, т.е. лежат на параллельных прямых;

2) направлены в одну сторону (сонаправленые);

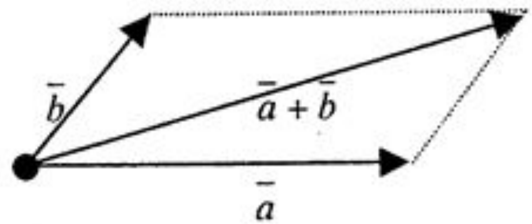
3) имеют одинаковые длины.



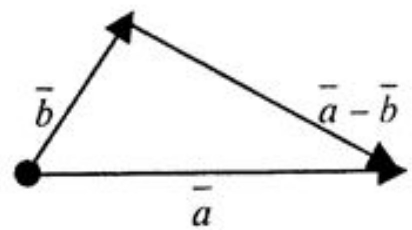
ОПЕРАЦИИ НАД ВЕКТОРАМИ

Линейные операции над векторами

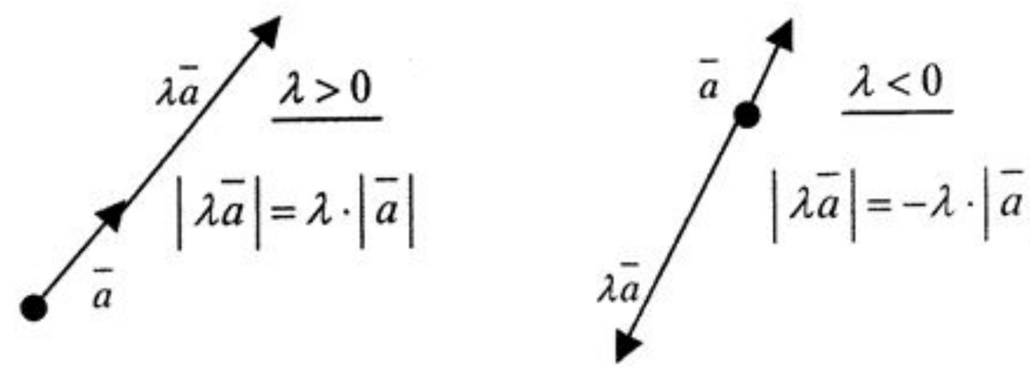
1) *Сложение*



2) *Вычитание*



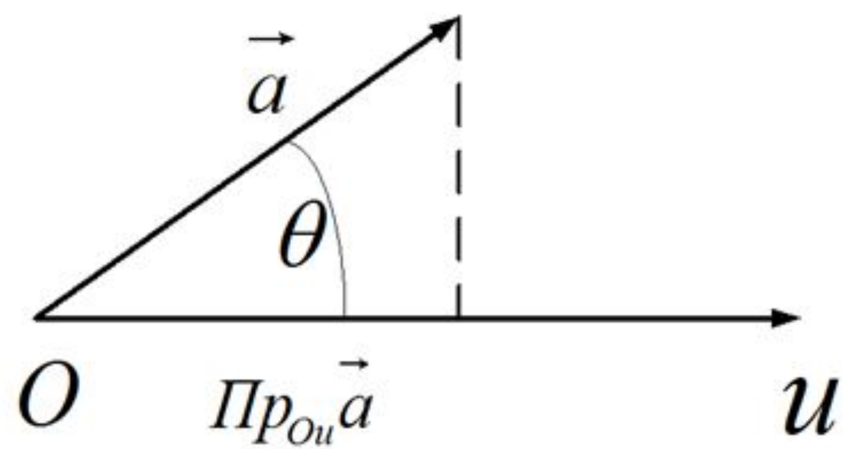
3) *Умножение вектора на скаляр* λ **:**



Операции над векторами

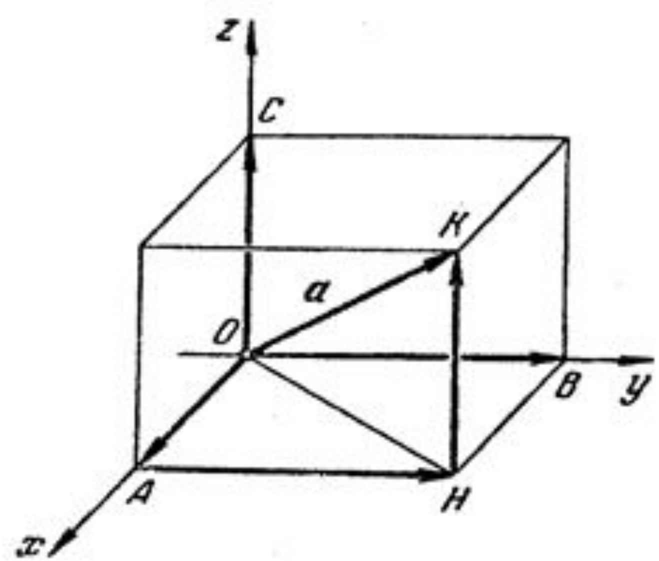
Проекцией вектора $\vec{a}$ на ось Ou называется число обозначаемое $Пр_{Ou}\vec{a}$, вычисляемое по формуле:

$$Пр_{Ou}\,\bar{a} = |\bar{a}| \cdot \cos(\widehat{\bar{a}, Ou})$$



Координаты вектора

Координатами вектора $\vec{a}$ называются проекции вектора $\vec{a}$ на оси *Ox*, *Oy*, *Oz*: $\vec{a} = (a_x; a_y; a_z)$



$\vec{a} = \overrightarrow{OK}$, $a_x = OA$, $a_y = OB$, $a_z = OC$.

Направляющие косинусы

- ***Направляющими углами*** вектора $\vec{a}$ называются углы между ним и координатными осями:

$$\alpha = (\vec{a}; 0x), \beta = (\vec{a}; 0y), \gamma = (\vec{a}; 0z)$$

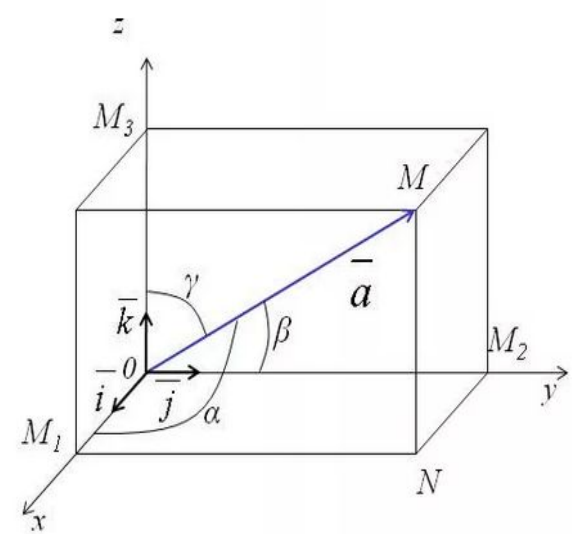
Косинусы направляющих углов называются **направляющими косинусами вектора** $\vec{a}$:

$$cos\alpha = cos(\vec{a}; 0x),$$

$$cos\beta = cos(\vec{a}; 0y),$$

$$cos\gamma = cos(\vec{a}; 0z).$$

$$\cos\alpha = \frac{a_x}{|\bar{a}|},\ \cos\beta = \frac{a_y}{|\bar{a}|},\ \cos\gamma = \frac{a_z}{|\bar{a}|}$$



Операции над векторами, заданными своими координатами

Пусть $\vec{a} = (a_x; a_y; a_z)$. $\vec{b} = (b_x; b_y; b_z)$

Тогда: $|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$.

$$\vec{a} = \vec{b} \Leftrightarrow a_x = b_x; \quad a_y = b_y; \quad a_z = b_z.$$

$$\bar{a} + \bar{b} = (a_x + b_x, a_y + b_y, a_z + b_z),$$

$$\bar{a} - \bar{b} = (a_x - b_x, a_y - b_y, a_z - b_z),$$

$$\lambda \cdot \bar{a} = (\lambda \cdot a_x, \lambda \cdot a_y, \lambda \cdot a_z).$$

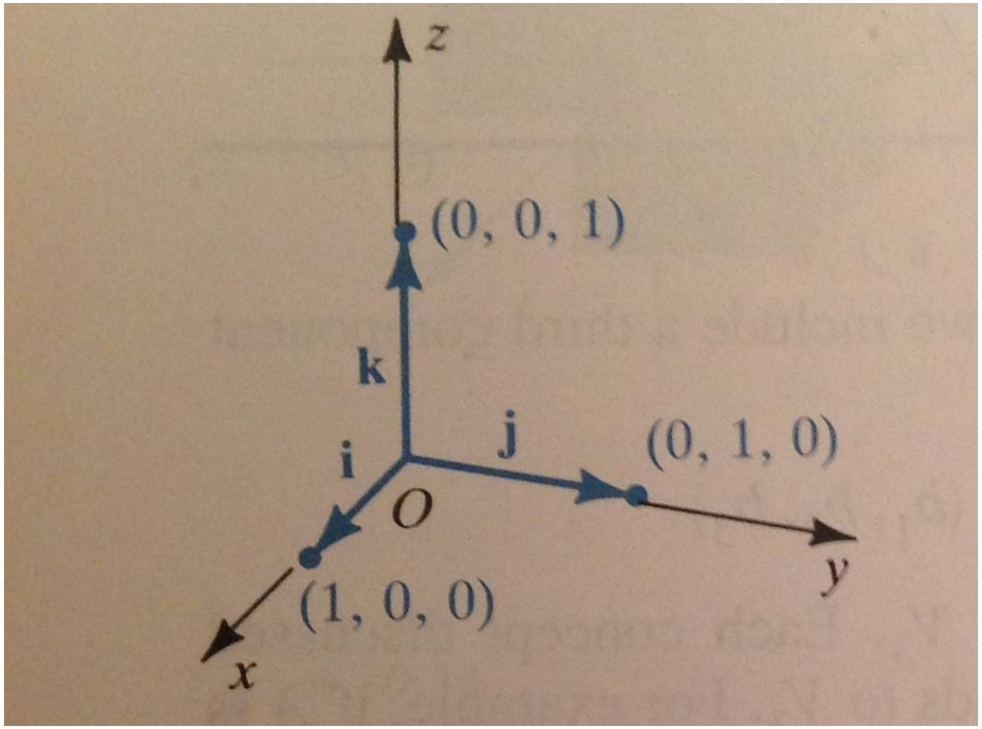
Пример.

Пусть $\vec{a} = (2; 5; -2)$, $\vec{b} = (-1; 3; 7)$.

$\vec{a} + \vec{b} = (1; 8; 5)$, $\vec{a} - \vec{b} = (3; 2; -9)$, $3\vec{a} + \vec{b} = (5; 18; 1)$

Разложение вектора по ортам

Орты $\vec{i};\vec{j};\vec{k}$ – единичные векторы осей *Ox*, *Oy*, *Oz*.



Тогда

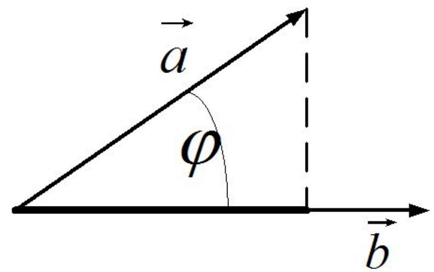
$$\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}.$$

Скалярное произведение

- Скалярным произведением двух векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется число $(\vec{a}, \vec{b})$ или $\vec{a} \cdot \vec{b}$, вычисляемое по формуле

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos\varphi$$

где φ – угол между векторами $\vec{a}$, $\vec{b}$



$$\vec{a} \cdot \vec{b} = Пр_{\vec{b}}\vec{a} \cdot |\vec{b}|$$

Если известны координаты векторов, то

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x \cdot b_x + a_y \cdot b_y + a_z \cdot b_z$$

Свойства скалярного произведения

- 1. $\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{a}$
- 2. $(\alpha\cdot\vec{a})\cdot(\beta\cdot\vec{b})=\alpha\beta\cdot\vec{a}\cdot\vec{b}$
- 3. $\vec{c}\cdot(\vec{a}+\vec{b})=\vec{c}\cdot\vec{a}+\vec{c}\cdot\vec{b}$
- 4. $\cos\varphi=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|}$ $\varphi-$ угол между двумя векторами

Коллинеарность и перпендикулярность векторов

Векторы коллинеарные тогда и только тогда, когда координаты пропорциональны:

$$\vec{a} \parallel \vec{b} \Leftrightarrow \quad \frac{a_x}{b_x} = \frac{a_y}{b_y} = \frac{a_z}{b_z} = k$$

Векторы перпендикулярные тогда и только тогда, когда их скалярное произведение равно нулю.

$$\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \quad \vec{a} \cdot \vec{b} = 0$$

Пример скалярного произведения:

$$\vec{a} = (2; 5; -2),\ \vec{b} = (-1; 3; 7) \qquad \vec{a} \cdot \vec{b} = -2 + 15 - 14 = -1$$

Пример

Даны векторы : $\vec{a} = (2;-1;-2); \quad \vec{b} = (8;-4;0).$

Найти:

1. $\vec{c} = 2\vec{a}; \ \vec{d} = \vec{b} - \vec{a};$
2. *длины векторов* $\vec{c}$ *и* $\vec{d}$;
3. *скалярный квадрат вектора* $\overrightarrow{d}$;
4. *скалярное произведение векторов* $\vec{c}$ *и* $\vec{d}$;
5. *угол между весторами* $\vec{c}$ *и* $\vec{d}$

$\vec{a} = (2;-1;-2); \quad \vec{b} = (8;-4;0).$

Решение

1. По определению

$$\vec{c} = 2\vec{a} = (4;-2;-4), \vec{d} = \vec{b} - \vec{a} = (6;-3;2).$$

2. Найдем длины векторов $\vec{c}$ и $\vec{d}$. По формуле найдем

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$$

$$|\vec{c}| = \sqrt{4^2 + (-2)^2 + (-4)^2} = 6, |\vec{d}| = \sqrt{6^2 + (-3)^2 + 2^2} = 7.$$

3. Скалярный квадрат равен квадрату модуля вектора, т.е.

$$(\vec{d}, \vec{d}) = d^2 = 49.$$

4. Скалярное произведение

$$(\vec{c}\,\vec{d}) = c_x d_x + c_y d_y + c_z d_z.$$

$$(\vec{c}\,\vec{d}) = 4 \cdot 6 + (-2) \cdot (-3) + (-4) \cdot 2 = 22.$$

5. Угол между векторами $\vec{c}$ *и* $\vec{d}$ определяется равенством:

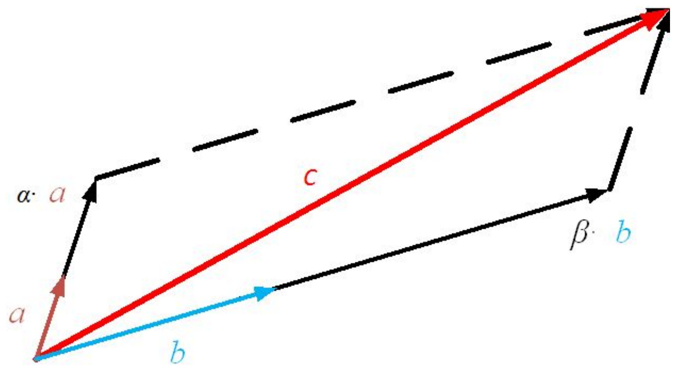
$$cos\varphi = \frac{\left(\vec{c}, \vec{d}\right)}{\left|\vec{c}\right| \cdot \left|\vec{d}\right|} = \frac{22}{6 \cdot 7} \approx 0{,}52$$

Откуда

$$\varphi = \arccos 0{,}52 \approx 58^0.$$

Разложение вектора

Задача: разложить вектор $\vec{c} = (3;4)$ по векторам $\vec{a} = (3;-1)$ и $\vec{b} = (1;-2)$.



Решение. Найдем числа α и β, удовлетворяющие равенству

$$\vec{c} = \alpha \cdot \vec{a} + \beta \cdot \vec{b}$$

или $(c_x; c_y) = \alpha \cdot (a_x; a_y) + \beta \cdot (b_x; b_y)$

Для примера: $(3;4) = \alpha \cdot (3;-1) + \beta \cdot (1;-2)$.

Перейдем от векторного к покоординатному равенству:

$$\begin{cases} c_x = \alpha \cdot a_x + \beta \cdot b_x, \\ c_y = \alpha \cdot a_y + \beta \cdot b_y. \end{cases}$$

Для примера получим систему $\begin{cases} 3\alpha + \beta = 3, \\ -\alpha - 2\beta = 4. \end{cases}$

Из системы находим коэффициенты α и β: $\begin{cases} \alpha = 2, \\ \beta = -3. \end{cases}$

Тогда

$$\vec{c} = 2\vec{a} - 3\vec{b}$$

Матрицы второго и третьего порядка

Квадратной матрицей второго порядка называется таблица чисел:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

содержащая две строки и два столбца.

Числа a_{11}, a_{22} образуют *главную диагональ* матрицы A; числа a_{12}, a_{21} – *побочную* (второстепенную) *диагональ* матрицы.

Квадратной матрицей третьего порядка называется таблица чисел:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

содержащая три строки и три столбца.

Числа a_{11}, a_{22}, a_{33} образуют *главную диагональ* матрицы; числа a_{13}, a_{22}, a_{31} – *побочную* (второстепенную) *диагональ* матрицы.

Определитель второго порядка

- *<u>Определителем</u>* квадратной *<u>матрицы А второго порядка</u>* или– *<u>определителем второго порядка</u>*) называется число, обозначаемое:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$ (или |A|)

и вычисляемое по формуле:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

Пример. $\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 3 \cdot 4 - (-1) \cdot 2 = 12 + 2 = 14$

Определитель третьего порядка

<u>Определителем</u> квадратной *<u>матрицы A третьего порядка</u>* или− *<u>определителем третьего порядка</u>*) называется число, обозначаемое:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \quad \text{(или } |A|\text{)}$$

и вычисляемое по формуле:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \cdot \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \cdot \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

которая называется формулой ***разложения определителя по элементам первой строки***.

Определитель третьего порядка.
Пример 1.

Вычислить определитель:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 6 \\ 4 & 3 & -1 \\ 2 & -2 & 5 \end{vmatrix}$$

Решение:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 6 \\ 4 & 3 & -1 \\ 2 & -2 & 5 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 5 \end{vmatrix} - 2 \cdot \begin{vmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} + 6 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} =$$

$$= (3 \cdot 5 - (-2) \cdot (-1)) - 2 \cdot (4 \cdot 5 - 2 \cdot (-1)) + 6 \cdot (4 \cdot (-2) - 2 \cdot 3) =$$

$$= (15 - 2) - 2 \cdot (20 + 2) + 6 \cdot (-8 - 6) = 13 - 44 - 84 = -115.$$

Разложения определителя по элементам любой строки (столбца) матрицы

- Для вычисления определителя третьего порядка можно воспользоваться правилом *разложения определителя по элементам л ю б о й строки (столбца) матрицы А.*
- При этом элементы выбранной строки (столбца) берут со знаками, указанными в следующей схеме:

$$\begin{vmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{vmatrix}$$

то есть знак «+» ставят у тех элементов a_{ij}, для которых сумма индексов $i+j$ есть число четное, «–» – сумма индексов $i+j$ есть число нечетное.

Разложение определителя третьего порядка по элементам второй строки

Например, выбрав для разложения *вторую строку* определителя, получим формулу *разложения определителя третьего порядка по элементам второй строки*:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = -a_{21} \cdot \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{22} \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{23} \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}.$$

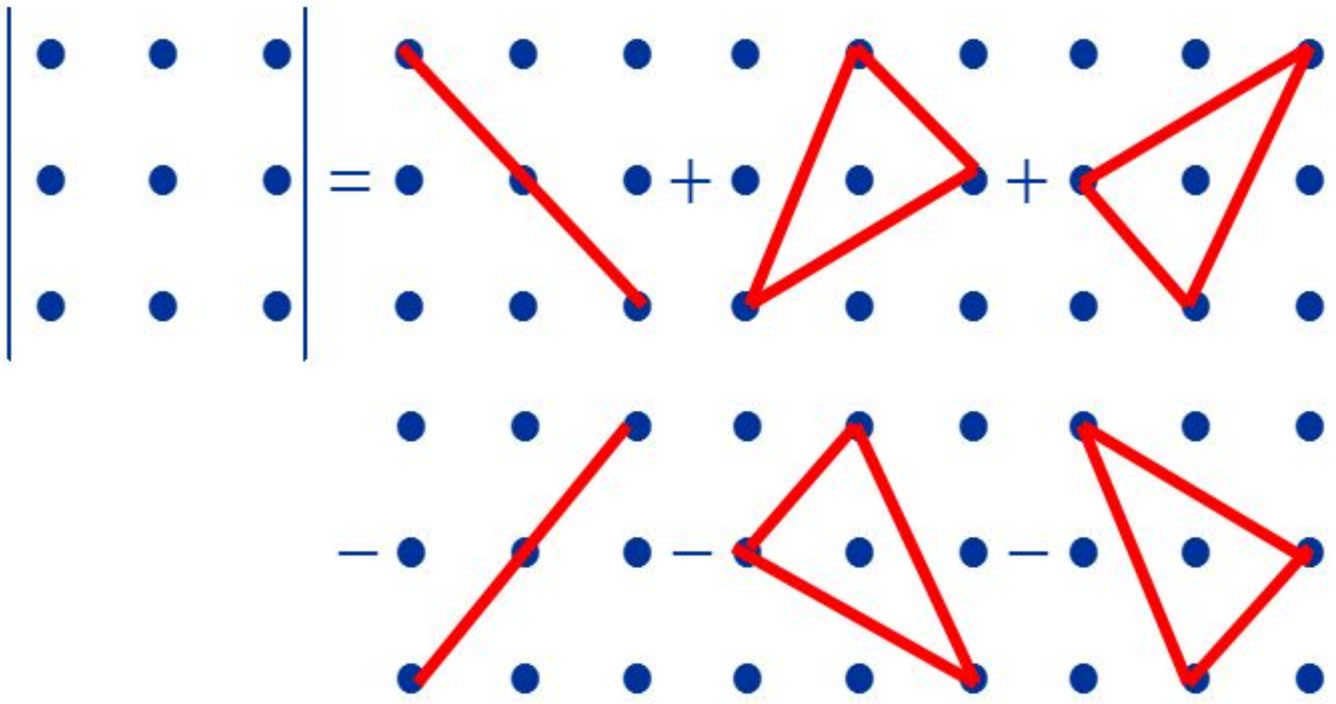
Пример.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 5 & -1 \\ 1 & 7 & 0 \end{vmatrix} = -0 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 7 & 0 \end{vmatrix} + 5 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} - (-1) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 7 \end{vmatrix} =$$

$$0 + 5 \cdot (-1) + (7 - 2) = -5 + 5 = 0$$

Правило треугольников вычисления определителя третьего порядка

Для вычисления определителя третьего порядка можно воспользоваться *правилом треугольников*:



где выделенные элементы нужно перемножить.

Пример правила треугольников вычисления определителя третьего порядка

Вычислить определитель:

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 7 & 4 \\ 5 & 3 & -3 \end{vmatrix}$$

Решение.

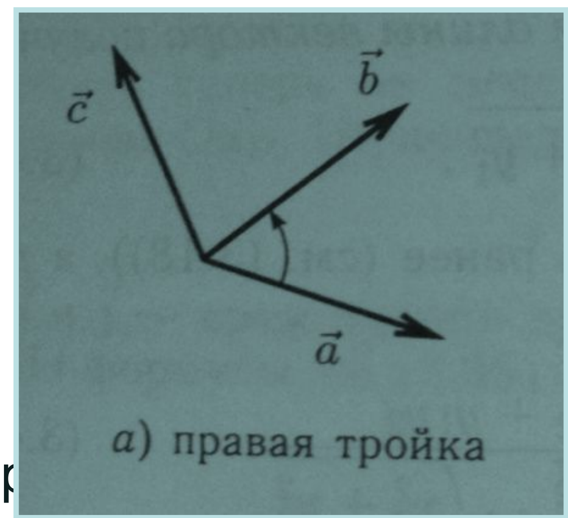
$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 7 & 4 \\ 5 & 3 & -3 \end{vmatrix} = 1\cdot 7\cdot(-3) + (-2)\cdot 4\cdot 5 + 0\cdot 3\cdot 3 - 5\cdot 7\cdot 3 -$$

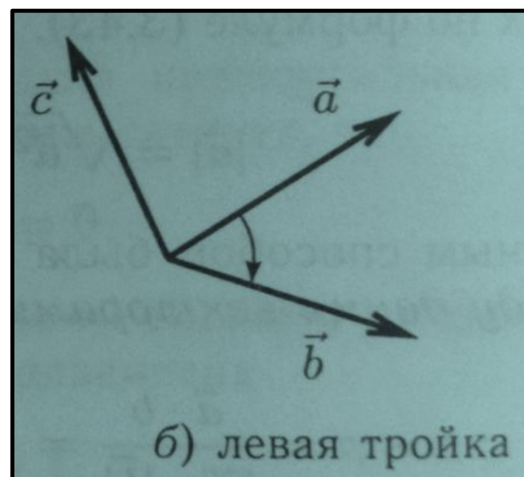
$$-3\cdot 4\cdot 1 - 0\cdot(-2)\cdot(-3) = -21 - 40 - 105 - 12 = -178$$

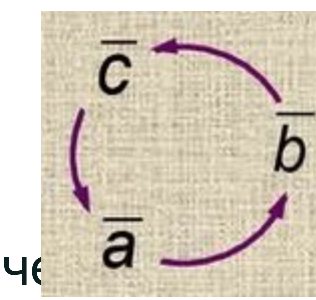
Ориентация тройки векторов

Три некомпланарных вектора $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ образуют правую тройку, если с конца третьего вектора $\vec{c}$ кратчайший поворот от первого вектора $\vec{a}$ ко второму вектору $\vec{b}$ виден против часовой.

Три некомпланарных вектора $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ образуют левую тройку, если с конца третьего вектора $\vec{c}$ кратчайший поворот от первого вектора $\vec{a}$ ко второму вектору $\vec{b}$ виден по часовой стрелке.







Ор … оров … кличе

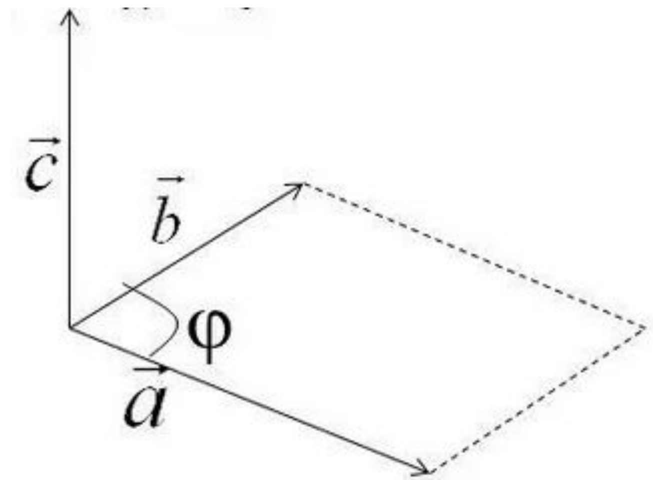
перестановке этих векторов.

Векторное произведение двух векторов

Векторным произведением вектора $\vec{a}$ на вектор $\vec{b}$ называется вектор $\vec{c}$, удовлетворяющий условиям:

- длина вектора $\vec{c}$ равна $|\vec{c}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \sin\varphi,$
  где $\varphi -$ угол между векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$.
- вектор $\vec{c}$ ортогонален векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$.
- векторы $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ образуют правую тройку.

Векторное произведение вектора $\vec{a}$ на вектор $\vec{b}$ обозначается $\vec{a} \times \vec{b}$ или $\left[\vec{a}, \vec{b}\right]$.

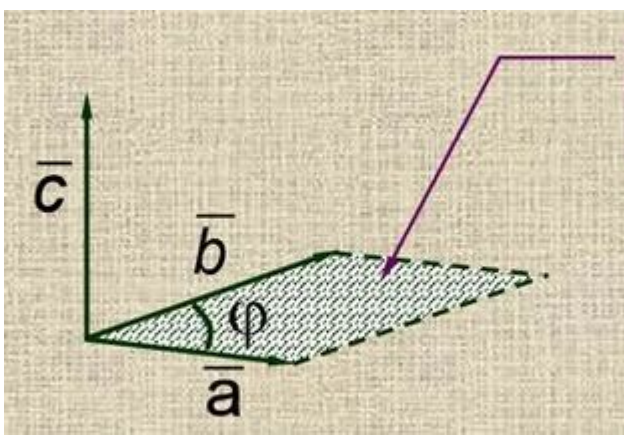


Основные свойства векторного произведения

- Векторное произведение $\vec{a} \times \vec{b}$ равно нулю тогда и только тогда, когда векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарные.

$$\boxed{\bar{a} \times \bar{b} = 0} \Leftrightarrow \boxed{\bar{a} \parallel \bar{b}}$$

- Длина вектора $\vec{a} \times \vec{b}$ численно равна площади параллелограмма, сторонами которого служат векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$.



$$\boxed{S = |\bar{c}| = |\bar{a}| \cdot |\bar{b}| \cdot \sin\varphi}$$

.

Законы векторного произведения

1) $\bar{a} \times \bar{b} = -\bar{b} \times \bar{a}$

2) $\bar{a} \times (\bar{b} + \bar{c}) = \bar{a} \times \bar{b} + \bar{a} \times \bar{c}$

3) $\lambda(\bar{a} \times \bar{b}) = (\lambda\bar{a}) \times \bar{b} = \bar{a} \times (\lambda\bar{b})$

4) $\bar{a} \times \bar{a} = 0$ - векторный квадрат равен нулю для любого вектора

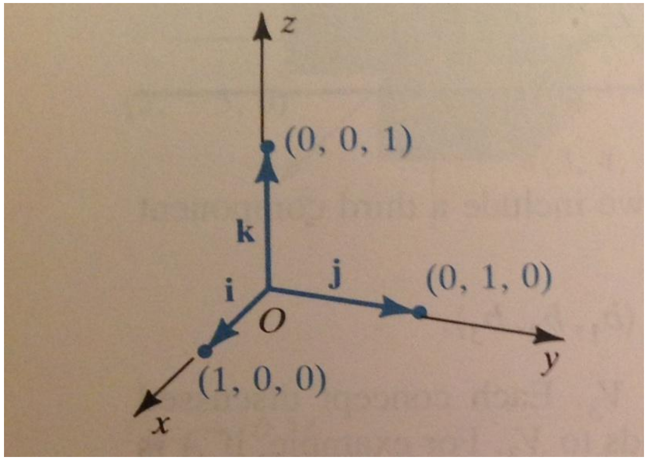
Выражение векторного произведение через прямоугольные координаты

Пусть *Oxyz* - прямоугольная система координат,

$\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ – орты координатных осей этой системы.

$$\vec{a} = (a_x; a_y; a_z) \qquad \vec{b} = (b_x; b_y; b_z)$$

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix};$$



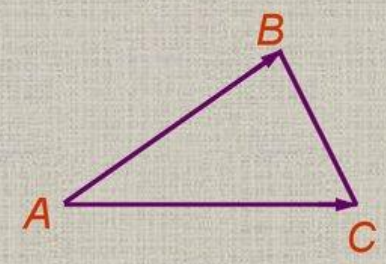
$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix} \vec{k}$$

Пример применения в геометрии векторного произведения

Векторное произведение векторов

Найти площадь треугольника с вершинами:

$A(2;3;1) \quad B(5;6;3) \quad C(7;1;10)$



Найдем координаты векторов:

$$\overline{AB} = \{5-2;\, 6-3;\, 3-1\} = \{3;\, 3;\, 2\}$$

$$\overline{AC} = \{7-2;\, 1-3;\, 10-1\} = \{5;\, -2;\, 9\}$$

$$S = \frac{1}{2}\left|\bar{a} \times \bar{b}\right|$$

$$\bar{a} \times \bar{b} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 3 & 3 & 2 \\ 5 & -2 & 9 \end{vmatrix} = 31\bar{i} - 17\bar{j} - 21\bar{k}$$

$$S = \frac{1}{2}\sqrt{31^2 + (-17)^2 + (-21)^2} = \boxed{\frac{1}{2}\sqrt{1691} \approx 20.6}$$

Смешанное произведение трех векторов

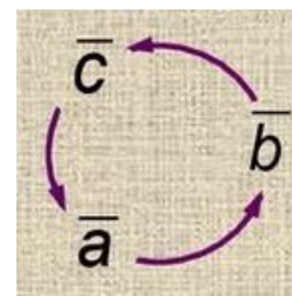
- Смешанным произведением трех векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ называется число, обозначаемое $\vec{a}\cdot\vec{b}\cdot\vec{c}$ равное скалярному произведению векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}\times\vec{c}$.

$$\vec{a}\cdot\vec{b}\cdot\vec{c}=\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})$$

Свойства смешанного произведения

1. $\vec{a}\cdot\vec{b}\cdot\vec{c}=\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})=(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}$

2. Смешанное произведение не меняется при циклической перестановке векторов:



$$\vec{a}\cdot\vec{b}\cdot\vec{c}=\vec{b}\cdot\vec{c}\cdot\vec{a}=\vec{c}\cdot\vec{a}\cdot\vec{b}$$

3. $(\alpha\vec{a})\cdot(\beta\vec{b})\cdot(\gamma\vec{c})=(\alpha\beta\gamma)\cdot(\vec{a}\cdot\vec{b}\cdot\vec{c}),\qquad \alpha,\beta,\gamma-const$

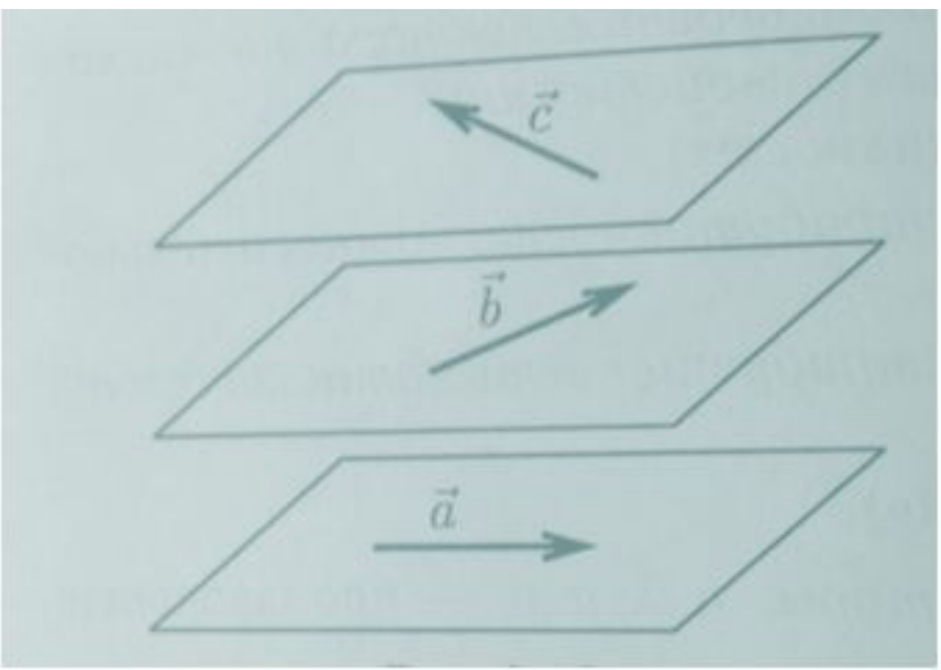
4. $(\vec{a}_1+\vec{a}_2)\cdot\vec{b}\cdot\vec{c}=\vec{a}_1\cdot\vec{b}\cdot\vec{c}+\vec{a}_2\cdot\vec{b}\cdot\vec{c}$

Возможные обозначения: $\vec{a}\cdot\vec{b}\cdot\vec{c}=(\vec{a},\vec{b},\vec{c})$

Компланарные векторы

Три вектора $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ называются ***компланарными*** **,** если они лежат на одной плоскости или на параллельных плоскостях.

В противном случае векторы $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ называются ***некомпланарными*** **.**



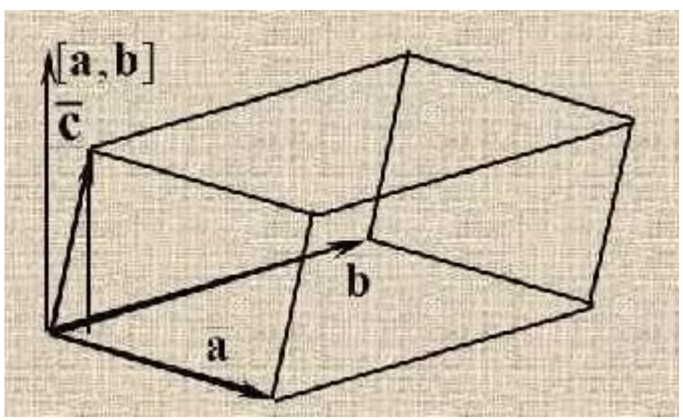
Если хотя бы один из векторов $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ нулевой, то эти векторы компланарны.

Свойства смешанного произведения

5. Смешанное произведение векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ равно нулю тогда и только тогда, когда эти векторы компланарны.

$$\bar{a}\bar{b}\bar{c} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \bar{a};\bar{b};\bar{c} - \textit{компланарны}$$

6. Абсолютная величина смешанного произведения трех векторов численно равна объему параллелепипеда, построенного на этих векторах



$$V = |(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c})|.$$

Объем треугольной пирамиды

$$V = \frac{1}{6} \cdot |(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c})|.$$

.

Выражение смешанного произведения через координаты векторов

$$\bar{b}\times\bar{c}=\begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}, \quad \text{или} \quad \bar{b}\times\bar{c}=\left\{\begin{vmatrix} b_y & b_z \\ c_y & c_z \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} b_z & b_x \\ c_z & c_x \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} b_x & b_y \\ c_x & c_y \end{vmatrix}\right\}.$$

$$\bar{a}\cdot\left(\bar{b}\times\bar{c}\right)=a_x\begin{vmatrix} b_y & b_z \\ c_y & c_z \end{vmatrix}+a_y\begin{vmatrix} b_z & b_x \\ c_z & c_x \end{vmatrix}+a_z\begin{vmatrix} b_x & b_y \\ c_x & c_y \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}.$$

$$\boxed{\bar{a}\cdot\left(\bar{b}\times\bar{c}\right)=\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}.}$$

Пример применения смешанного произведение трех векторов

Пример. Найти объем пирамиды с вершинами

$$A(3,0,0),\ B=(1,3,0),\ C=(-2,-1,0),\ D=(1,1,6).$$

Решение. Данная пирамида построена на векторах

$$\vec{a}=\overrightarrow{AB}=(-2,\ 3,0),\ \vec{b}=\overrightarrow{AC}=(-5,-1,0),\ \vec{c}=\overrightarrow{AD}=(-2,1,6).$$

Вычислим смешанное произведение этих векторов по формуле

$$\vec{a}\cdot\vec{b}\cdot\vec{c}=\begin{vmatrix}-2 & 3 & 0\\ -5 & -1 & 0\\ -2 & 1 & 6\end{vmatrix}=6\cdot\begin{vmatrix}-2 & 3\\ -5 & -1\end{vmatrix}=6\cdot(2+15)=102.$$

$$V=\frac{1}{6}\vec{a}\cdot\vec{b}\cdot\vec{c}=\frac{102}{6}=17.$$

Ответ : 17