22.12.20.

Тема: Понятие определенного интеграла. Решение примеров на нахождение первообразных и интегралов.

Учащиеся должны освоить теоретическую часть и прислать ответы на вопросы и решение задач, содержащиеся в практической части.

Видео для усвоения материала:
https://infourok.ru/videouroki/1237

Теоретическая часть:
Прочитать.
Формулы и определения, выделенные жирным шрифтом – выучить

Площадь криволинейной трапеции и интеграл

площадь криволинейной трапеции (рис. 151) можно вычислить по формуле

$$S = F(b) - F(a), \qquad (2)$$

где $F(x)$ — любая первообразная функции $f(x)$.

Таким образом, вычисление площади криволинейной трапеции сводится к отысканию первообразной $F(x)$ функции $f(x)$, т. е. к интегрированию функции $f(x)$.

Разность $F(b) - F(a)$ называют *интегралом от функции* $f(x)$ на отрезке $[a; b]$ и обозначают так: $\int_a^b f(x)\,dx$ (читается: «Интеграл от a до b эф от икс дэ икс»), т. е.

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a). \qquad (3)$$

Формулу (3) называют *формулой Ньютона — Лейбница* в честь создателей дифференциального и интегрального исчисления.

Из формул (2) и (3) получаем

$$S = \int_a^b f(x)\,dx. \qquad (4)$$

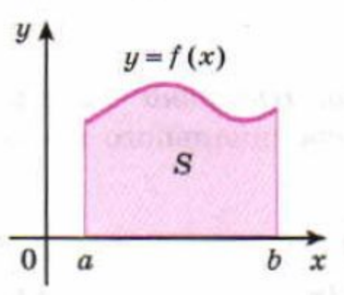

Рис. 151

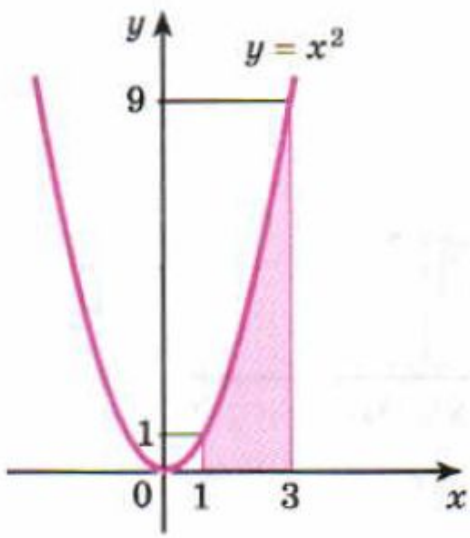

Рис. 154

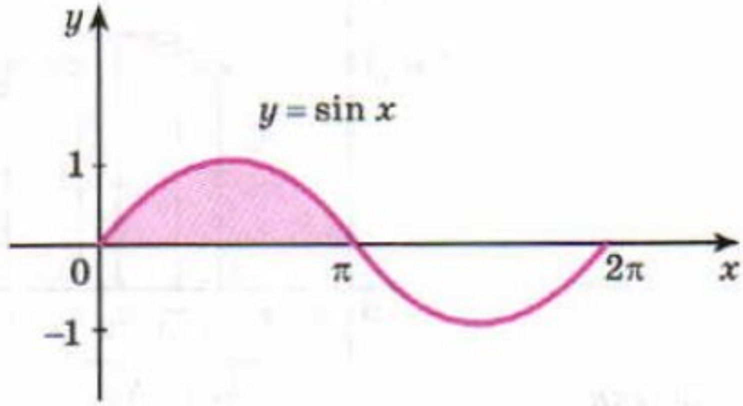

Рис. 155

Задача 1 Найти площадь криволинейной трапеции, изображённой на рисунке 154.

▶ По формуле (4) находим $S = \int\limits_1^3 x^2\,dx$. Вычислим этот интеграл с помощью формулы Ньютона — Лейбница (3). Одной из первообразных функции $f(x) = x^2$ является $F(x) = \frac{x^3}{3}$. Поэтому $S = \int\limits_1^3 x^2\,dx =$

$= F(3) - F(1) = \frac{3^3}{3} - \frac{1^3}{3} = 8\frac{2}{3}$ (кв. ед.). ◁

Формулы (3) и (4) справедливы и для случая, когда функция $f(x)$ положительна внутри отрезка $[a; b]$, а на одном из концов отрезка или на обоих концах равна нулю.

Задача 2 Найти площадь криволинейной трапеции, изображённой на рисунке 155.

▶ Функция $F(x) = -\cos x$ является первообразной для функции $f(x) = \sin x$. По формулам (3) и (4) получаем $S = \int\limits_0^{\pi} \sin x\,dx = F(\pi) - F(0) = (-\cos\pi) - (-\cos 0) =$

$= 1 + 1 = 2$ (кв. ед.). ◁

Практическая часть.

1000 Найти площадь криволинейной трапеции, ограниченной прямыми $x = a$, $x = b$, осью Ox и графиком функции $y = f(x)$:

1) $a = 2$, $b = 4$, $f(x) = x^3$;
2) $a = 3$, $b = 4$, $f(x) = x^2$;
3) $a = -2$, $b = 1$, $f(x) = x^2 + 1$;
4) $a = 0$, $b = 2$, $f(x) = x^3 + 1$;
5) $a = \frac{\pi}{3}$, $b = \frac{2\pi}{3}$, $f(x) = \sin x$;
6) $a = -\frac{\pi}{6}$, $b = 0$, $f(x) = \cos x$.

1001 Найти площадь фигуры, ограниченной осью Ox и параболой:

1) $y = 4 - x^2$; 2) $y = 1 - x^2$; 3) $y = -x^2 + 4x - 3$.