

22.12.20.

Тема: Понятие определенного интеграла. Решение примеров на нахождение первообразных и интегралов.

*Учащиеся должны освоить теоретическую часть и прислать ответы на вопросы и решение задач, содержащиеся в практической части.*

Видео для усвоения материала:

<https://infourok.ru/videouroki/1237>

## Теоретическая часть:

Прочитать.

Формулы и определения, выделенные жирным шрифтом – выучить

### Площадь криволинейной трапеции и интеграл

Площадь криволинейной трапеции (рис. 151) можно вычислить по формуле

$$S = F(b) - F(a), \quad (2)$$

где  $F(x)$  — любая первообразная функции  $f(x)$ .

Таким образом, вычисление площади криволинейной трапеции сводится к отысканию первообразной  $F(x)$  функции  $f(x)$ , т. е. к интегрированию функции  $f(x)$ .

Разность  $F(b) - F(a)$  называют *интегралом от функции  $f(x)$  на отрезке  $[a; b]$*  и обозначают так:

$\int_a^b f(x) dx$  (читается: «Интеграл от  $a$  до  $b$  эф от икс дэ икс»), т. е.

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a). \quad (3)$$

Формулу (3) называют *формулой Ньютона — Лейбница* в честь создателей дифференциального и интегрального исчисления.

Из формул (2) и (3) получаем

$$S = \int_a^b f(x) dx. \quad (4)$$

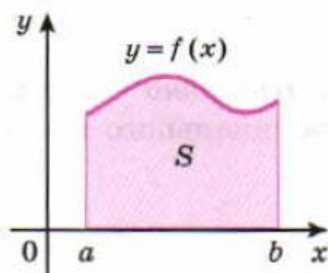


Рис. 151

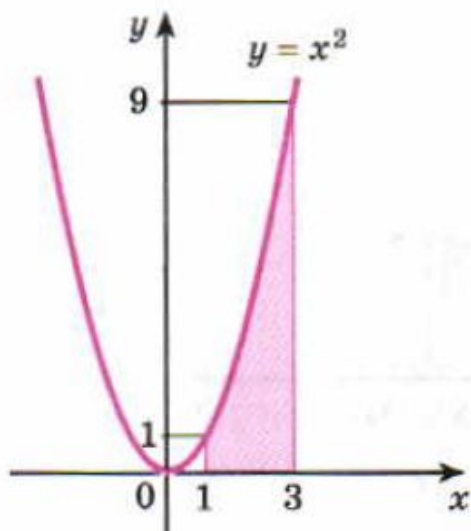


Рис. 154

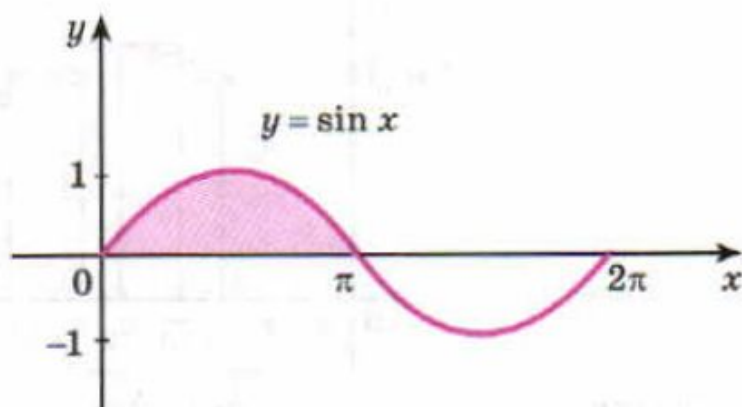


Рис. 155

### Задача 1

Найти площадь криволинейной трапеции, изображённой на рисунке 154.

- По формуле (4) находим  $S = \int_1^3 x^2 dx$ . Вычислим этот интеграл с помощью формулы Ньютона — Лейбница (3). Одной из первообразных функции

$$f(x) = x^2 \text{ является } F(x) = \frac{x^3}{3}. \text{ Поэтому } S = \int_1^3 x^2 dx = \\ = F(3) - F(1) = \frac{3^3}{3} - \frac{1^3}{3} = 8 \frac{2}{3} \text{ (кв. ед.)}. \triangleleft$$

Формулы (3) и (4) справедливы и для случая, когда функция  $f(x)$  положительна внутри отрезка  $[a; b]$ , а на одном из концов отрезка или на обоих концах равна нулю.

### Задача 2

Найти площадь криволинейной трапеции, изображённой на рисунке 155.

- Функция  $F(x) = -\cos x$  является первообразной для функции  $f(x) = \sin x$ . По формулам (3) и (4) получаем  $S = \int_0^\pi \sin x dx = F(\pi) - F(0) = (-\cos \pi) - (-\cos 0) = \\ = 1 + 1 = 2 \text{ (кв. ед.)}. \triangleleft$

## Практическая часть.

**1000** Найти площадь криволинейной трапеции, ограниченной прямыми  $x = a$ ,  $x = b$ , осью  $Ox$  и графиком функции  $y = f(x)$ :

1)  $a = 2$ ,  $b = 4$ ,  $f(x) = x^3$ ;

2)  $a = 3$ ,  $b = 4$ ,  $f(x) = x^2$ ;

3)  $a = -2$ ,  $b = 1$ ,  $f(x) = x^2 + 1$ ;

4)  $a = 0$ ,  $b = 2$ ,  $f(x) = x^3 + 1$ ;

5)  $a = \frac{\pi}{3}$ ,  $b = \frac{2\pi}{3}$ ,  $f(x) = \sin x$ ;

6)  $a = -\frac{\pi}{6}$ ,  $b = 0$ ,  $f(x) = \cos x$ .

**1001** Найти площадь фигуры, ограниченной осью  $Ox$  и параболой:

1)  $y = 4 - x^2$ ;      2)  $y = 1 - x^2$ ;      3)  $y = -x^2 + 4x - 3$ .