

22.12.20.

Тема: Понятие определенного интеграла. Решение примеров на нахождение первообразных и интегралов.

Учащиеся должны освоить теоретическую часть и прислать ответы на вопросы и решение задач, содержащиеся в практической части.

Видео для усвоения материала:

<https://infourok.ru/videouroki/1237>

Теоретическая часть:

Прочитать.

Формулы и определения, выделенные жирным шрифтом – выучить

Площадь криволинейной трапеции и интеграл

Площадь криволинейной трапеции (рис. 151) можно вычислить по формуле

$$S = F(b) - F(a), \quad (2)$$

где $F(x)$ — любая первообразная функции $f(x)$.

Таким образом, вычисление площади криволинейной трапеции сводится к отысканию первообразной $F(x)$ функции $f(x)$, т. е. к интегрированию функции $f(x)$.

Разность $F(b) - F(a)$ называют *интегралом от функции $f(x)$ на отрезке $[a; b]$* и обозначают так:

$\int_a^b f(x) dx$ (читается: «Интеграл от a до b эф от икс дэ икс»), т. е.

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a). \quad (3)$$

Формулу (3) называют *формулой Ньютона — Лейбница* в честь создателей дифференциального и интегрального исчисления.

Из формул (2) и (3) получаем

$$S = \int_a^b f(x) dx. \quad (4)$$

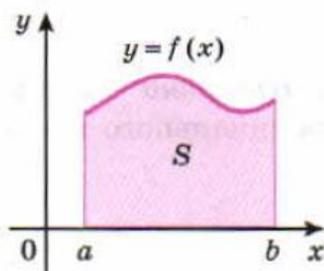


Рис. 151

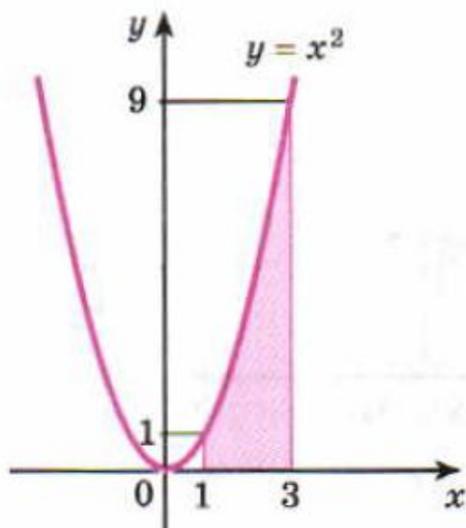


Рис. 154

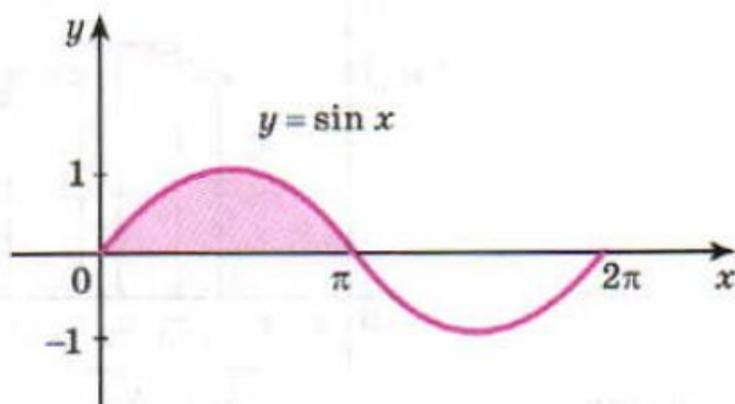


Рис. 155

Задача 1

Найти площадь криволинейной трапеции, изображённой на рисунке 154.

- По формуле (4) находим $S = \int_1^3 x^2 dx$. Вычислим этот интеграл с помощью формулы Ньютона — Лейбница (3). Одной из первообразных функции

$$f(x) = x^2 \text{ является } F(x) = \frac{x^3}{3}. \text{ Поэтому } S = \int_1^3 x^2 dx = \\ = F(3) - F(1) = \frac{3^3}{3} - \frac{1^3}{3} = 8 \frac{2}{3} \text{ (кв. ед.). } \triangleleft$$

Формулы (3) и (4) справедливы и для случая, когда функция $f(x)$ положительна внутри отрезка $[a; b]$, а на одном из концов отрезка или на обоих концах равна нулю.

Задача 2

Найти площадь криволинейной трапеции, изображённой на рисунке 155.

- Функция $F(x) = -\cos x$ является первообразной для функции $f(x) = \sin x$. По формулам (3) и (4) получаем $S = \int_0^\pi \sin x dx = F(\pi) - F(0) = (-\cos \pi) - (-\cos 0) = \\ = 1 + 1 = 2 \text{ (кв. ед.). } \triangleleft$

Практическая часть.

1000 Найти площадь криволинейной трапеции, ограниченной прямыми $x = a$, $x = b$, осью Ox и графиком функции $y = f(x)$:

1) $a = 2$, $b = 4$, $f(x) = x^3$;

2) $a = 3$, $b = 4$, $f(x) = x^2$;

3) $a = -2$, $b = 1$, $f(x) = x^2 + 1$;

4) $a = 0$, $b = 2$, $f(x) = x^3 + 1$;

5) $a = \frac{\pi}{3}$, $b = \frac{2\pi}{3}$, $f(x) = \sin x$;

6) $a = -\frac{\pi}{6}$, $b = 0$, $f(x) = \cos x$.

1001 Найти площадь фигуры, ограниченной осью Ox и параболой:

1) $y = 4 - x^2$; 2) $y = 1 - x^2$; 3) $y = -x^2 + 4x - 3$.