

# Тема 10 «Интеграл и его приложения»

«Дифференциал функции.  
Первообразная и ее геометрический  
смысл. Неопределенный интеграл.»  
Урок 10.1

# Повторение :

---

- Сформулируйте определение производной функции в точке.
- Сформулируйте правила вычисления производных.
- Какая функция называется сложной.
- Сформулируйте правило нахождения производной сложной функции.

# Найдите производную:

---

1)  $5x^2$ ;

2)  $-9x^4 + \frac{1}{3}x^3 - 15$ ;

3)  $11 \sin x - \frac{6}{17}$ ;

4)  $5 \operatorname{tg} x - 9 \sin 4x$ ; 5)  $(x^2 - 7)^4$ .

# 1. Понятие дифференциала функции.

$$y' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = y' + \alpha(x), \text{ где } \alpha(\delta) - \text{ малая величина.}$$

$$\Rightarrow \Delta y = y' \cdot \Delta x + \alpha(\delta) \cdot \Delta x, \text{ где } y' \cdot \Delta x - \text{ главная часть приращения функции}$$
$$\alpha(\delta) \cdot \Delta x - \text{ малая величина.}$$

Определение: Дифференциалом функции  $y=f(x)$  в точке называется главная часть приращения функции.

---

$$\left. \begin{aligned} dy &= y' \cdot \Delta x \\ dx &= x' \cdot \Delta x = \Delta x \end{aligned} \right\} \Rightarrow dy = y' \cdot dx$$

$$y' = \frac{dy}{dx}$$

# Вычислите дифференциалы функций:

$$1) y = (x^3 - 2)^4$$

$$dy = y' \cdot dx$$

$$\begin{aligned} dy &= ((x^3 - 2)^4)' \cdot dx = 4(x^3 - 2)^3 \cdot (x^3 - 2)' \cdot dx = \\ &= 4(x^3 - 2)^3 \cdot 3x^2 \cdot dx = 12x^2 \cdot (x^3 - 2)^3 \cdot dx. \end{aligned}$$

$$2) y = \sqrt{x^2 - 1};$$

$$3) y = e^{-x};$$

$$4) y = (1 - x^2)^5.$$

## 2. Понятие первообразной и неопределенного интеграла

---

# Определение 1:

Функция  $F(x)$  называется **первообразной** для функции  $f(x)$  на промежутке  $I$ , если для любого  $x \in I$  выполняется равенство:

$$F'(x) = f(x)$$

Решите № 331

- 
- Если функция  $F(x)$  является первообразной для функции  $f(x)$ , где  $x \in (a; b)$ , то множество всех первообразных для функции  $f(x)$  задается формулой  $F(x) + C$ , где  $C$  - произвольная постоянная величина.

## Определение 2:

---

- Совокупность всех первообразных  $F(x)+C$  функции  $f(x)$ ,  $x \in (a, b)$  называется неопределенным интегралом от функции  $f(x)$ .
- Записывается  $\int f(x) dx = F(x) + C$

- 
- $\int$ -знак интеграла;
  - $f(x)$ -подинтегральная функция;
  - $f(x)dx$ -подинтегральное выражение;
  - $x$ -переменная интегрирования;
  - $C$ - постоянная интегрирования.

# Таблица интегралов

|                                                                                          |                                                                                                                                                   |                                                                                                                                                                          |
|------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| $1) \int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c$ $(\alpha \neq -1)$             | $\int dx = x + c;$ $\int \frac{dx}{x^2} = -\frac{1}{x} + c;$                                                                                      | $\int x dx = \frac{x^2}{2} + c;$ $\int \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x} + c$                                                                                              |
| $2) \int \frac{dx}{x} = \ln x  + c$                                                      | $3) \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + c, \quad a > 0, a \neq 1$                                                                                   | $4) \int e^x dx = e^x + c$                                                                                                                                               |
| $5) \int \sin x dx = -\cos x + c$                                                        | $6) \int \cos x dx = \sin x + c$                                                                                                                  | $7) \int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + c$                                                                                                                |
| $8) \int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + c$                                  | $9) \int \operatorname{tg} x dx = -\ln \cos x  + c$                                                                                               | $10) \int \operatorname{ctg} x dx = \ln \sin x  + c$                                                                                                                     |
| $11) \int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x + c$                                 | $12) \int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + c$                                                                  | $13) \int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + c$ $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + c$                                                            |
| $14) \int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left  \frac{x-a}{x+a} \right  + c$      |                                                                                                                                                   |                                                                                                                                                                          |
| <p>Линейное расширение дифференциала</p> $15) \int f(kx+b) dx = \frac{1}{k} F(kx+b) + c$ |                                                                                                                                                   |                                                                                                                                                                          |
| $\int \frac{dx}{kx+b} = \frac{1}{k} \cdot \ln kx+b  + c$ <p>Формула (2+15)</p>           | $13) \int \frac{dx}{\sqrt{a^2-n^2x^2}} = \frac{1}{n} \arcsin \frac{nx}{a} + c$ <p style="text-align: center;"><math>n \neq 0, a \neq 0</math></p> | $12a) \int \frac{dx}{a^2+n^2x^2} = \frac{1}{an} \operatorname{arctg} \frac{nx}{a} + c$ <p style="text-align: center;">формула(12+15) <math>n \neq 0, a \neq 0</math></p> |
| $\int \sin(kx+b) dx = -\frac{1}{k} \cos(kx+b) + c$                                       | $\int \cos(kx+b) dx = \frac{1}{k} \sin(kx+b) + c$                                                                                                 | $\int e^{kx+b} dx = \frac{1}{k} e^{kx+b} + c$                                                                                                                            |
| $\int f(kx) = \frac{1}{k} F(kx) + c$                                                     |                                                                                                                                                   |                                                                                                                                                                          |

# Пример с проверкой (формула 1) :

---

$$\int x^3 dx = \frac{x^4}{4} + C$$

$$\text{Проверка: } \left( \frac{x^4}{4} + C \right)' = \frac{1}{4} \cdot 4x^3 + 0 = x^3$$

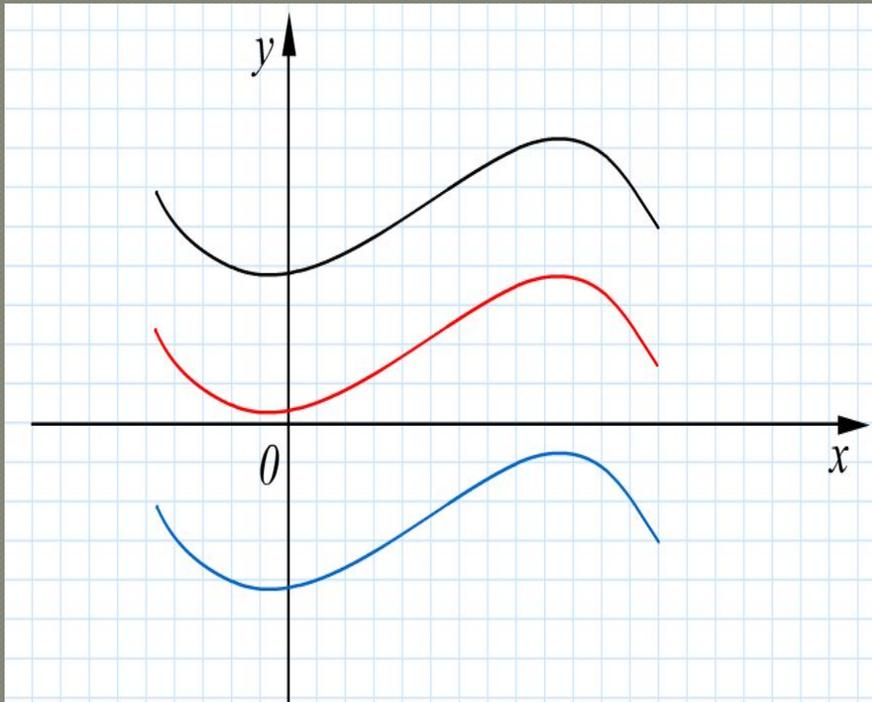
# Замечания:

---

- Нахождение функции по ее производной называется интегрированием (от *integratio*-восстановление);
- Интегрирование- действие обратное дифференцированию;
- Правильность интегрирования проверяется нахождением производной.

# 3. Геометрический смысл неопределенного интеграла

- Неопределенный интеграл представляет собой семейство интегральных кривых, каждая из которых получается из любой другой кривой параллельным переносом вдоль оси  $Ox$



## 4. Основные свойства неопределенного интеграла

---

1. Производная от неопределенного интеграла равна подынтегральной функции:  $(\int f(x) dx)' = f(x)$ ;
2. Дифференциал от неопределенного интеграла равен подынтегральному выражению:  $d\int f(x) dx = f(x) dx$ ;

3. Неопределенный интеграл от дифференциала некоторой функции равен этой функции плюс произвольная постоянная:

$$\underline{\int dF(x) = F(x) + C;}$$

4. Постоянный множитель можно выносить за знак интеграла:

$$\underline{\int af(x) dx = a \int f(x) dx;}$$

5. Интеграл от суммы непрерывных функций равен сумме интегралов слагаемых:

$$\underline{\int (f(x) + g(x)) dx = \int f(x) dx + \int g(x) dx.}$$

# Правила интегрирования

---

1.  $\int c \cdot f(x) dx = c \cdot \int f(x) dx$ , где  $c = const$

2.  $\int (f(x) \pm g(x)) dx = \int f(x) dx \pm \int g(x) dx$

3.  $\int f(ax + b) dx = \frac{1}{a} F(ax + b) + c$ ,  $a \neq 0$

## Пример №1

$$\int (3x^5 + 4\cos x - 2x + 1) dx \equiv$$

⊗ Интеграл суммы выражений равен сумме интегралов этих выражений

Постоянный множитель можно вынести за знак интеграла ⊗

$$\int 3x^5 dx + \int 4\cos x dx - \int 2x dx + \int 1 dx \equiv$$

$$3 \int x^5 dx + 4 \int \cos x dx - 2 \int x dx + 1 \int dx \equiv$$

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c$$

$$\int \cos x dx = \sin x + c$$

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c$$

$$\int dx = x + c$$

$$\frac{3x^{5+1}}{5+1} + 4\sin x - \frac{2x^2}{2} + x + C$$

$$\frac{1}{2}x^6 + 4\sin x - x^2 + x + C$$



# Пример 2

## пример

Найти неопределенный интеграл. Выполнить проверку.

$$\int x(1-2x)^3 dx$$

**Решение:**

$$\int x(1-2x)^3 dx = \int x(1-6x+12x^2-8x^3) dx = \int (x-6x^2+12x^3-8x^4) dx =$$

$$\frac{x^2}{2} - 6 \cdot \frac{x^3}{3} + 12 \cdot \frac{x^4}{4} - 8 \cdot \frac{x^5}{5} + C = \frac{x^2}{2} - 2x^3 + 3x^4 - \frac{8x^5}{5} + C, \text{ где } C = \text{const}$$

Пример 3. Вычислить интеграл  $\int (2x^4 + 3\sin x - 5e^x) dx$

$$\int (2x^4 + 3\sin x - 5e^x) dx = \int 2x^4 dx + \int 3\sin x dx - \int 5e^x dx =$$

$$= 2 \cdot \int x^4 dx + 3 \cdot \int \sin x dx - 5 \cdot \int e^x dx = 2 \cdot \frac{x^{4+1}}{4+1} + C_1 + 3 \cdot (-\cos x) + C_2 - 5 \cdot e^x + C_3 =$$

$$= \underline{\underline{\frac{2}{5}x^5 - 3\cos x - 5e^x + C}}, \quad C = C_1 + C_2 + C_3$$

# Примеры 4 и 5

**Пример 1.** Используя таблицу и свойства интегралов, найти интегралы.

$$\begin{aligned} 1. \quad \int \frac{dx}{x^5} &= \int x^{-5} dx = \frac{x^{-5+1}}{-5+1} + C = \\ &= -\frac{1}{4x^4} + C. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2. \quad \int (2x + 7^x) dx &= 2 \int x dx + \int 7^x dx = \\ &= 2 \frac{x^2}{2} + \frac{7^x}{\ln 7} + C = x^2 + \frac{7^x}{\ln 7} + C. \end{aligned}$$

# Пример 5 и 6

*Пример 29.1.* Найти интеграл  $\int (2x^4 - 3x^2 + x - 5) dx$ .

○ Решение:

$$\begin{aligned}\int (2x^4 - 3x^2 + x - 5) dx &= 2 \int x^4 dx - 3 \int x^2 dx + \int x dx - 5 \int dx = \\ &= 2 \frac{x^5}{5} + C_1 - 3 \frac{x^3}{3} + C_2 + \frac{x^2}{2} + C_3 - 5x + C_4 = \frac{2}{5}x^5 - x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 5x + C,\end{aligned}$$

где  $C = C_1 + C_2 + C_3 + C_4$ .

*Пример 29.2.* Найти интеграл  $\int \frac{x+1}{x} dx$ .

○ Решение: 
$$\int \frac{x+1}{x} dx = \int \left(1 + \frac{1}{x}\right) dx = x + \ln |x| + C.$$

# Пример 7

Пример 6. Найти неопределенный интеграл  $\int \sqrt[4]{x^5} dx$

*Решение.*

**Вид подынтегральной функции можно менять с помощью тождественных преобразований !!!**

$$\int \sqrt[4]{x^5} dx = \int x^{\frac{5}{4}} dx = \frac{x^{\frac{5}{4}+1}}{\frac{5}{4}+1} + C = \frac{x^{\frac{9}{4}}}{\frac{9}{4}} + C = \frac{4x^{\frac{9}{4}}}{9} + C = \frac{4}{9} \sqrt[4]{x^9} + C$$

$$\int x^r dx = \frac{x^{r+1}}{r+1} + C, \text{ если } r \neq -1$$

# Используется формула 12

Пример 8. Вычислить интеграл  $\int \frac{dx}{25+4x^2}$

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{25+4x^2} &= \int \frac{dx}{4 \cdot \left(\frac{25}{4} + x^2\right)} = \frac{1}{4} \cdot \int \frac{dx}{\left(\frac{5}{2}\right)^2 + x^2} = \\ &= \frac{1}{4} \cdot \frac{2}{5} \cdot \arctan \frac{2x}{5} + C = \frac{1}{10} \arctan \frac{2x}{5} + C\end{aligned}$$

---

$$1. \int \frac{x^4 - 2x^3 + 3x^2}{x^2} dx = \int (x^2 - 2x + 3) dx = \int x^2 dx - 2 \int x dx +$$

$$+ 3 \int dx = \frac{x^3}{3} - x^2 + 3x + C$$

$$2. \int \left(1 - \frac{1}{x^2}\right)^2 dx = \int \left(1 - \frac{2}{x^2} + \frac{1}{x^4}\right) dx = \int dx - 2 \int x^{-2} dx + \int x^{-4} dx =$$

$$x + 2x^{-1} - \frac{1}{3}x^{-3} + C = x + \frac{2}{x} - \frac{1}{3x^3} + C$$

$$3. \int ctg^2 x dx = \int \left(\frac{1}{\sin^2 x} - 1\right) dx = \int \frac{dx}{\sin^2 x} - \int dx = -ctgx - x + C$$

$$4. \int \frac{dx}{\sin^2 x \cos^2 x} = \int \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\sin^2 x \cos^2 x} = \int \frac{dx}{\sin^2 x} + \int \frac{dx}{\cos^2 x} =$$

$$-ctgx + tgx + C$$

$$5. \int \cos^2 \frac{x}{2} dx = \frac{1}{2} \int (1 + \cos x) dx = \frac{1}{2} \int dx + \frac{1}{2} \int \cos x dx =$$

$$= \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\sin x + C$$

, 10, 11, 12, 13

интегралы следующих функции  
(без 7 примера):

---

$$1) \int dx; \quad 2) \int (x+1)dx; \quad 3) \int (x^9 + 3)dx; \quad 4) \int (3x^3 - 5x^2)dx;$$

$$5) \int (\sqrt{x} + 1)dx; \quad 6) \int (2 \cos x - 4)dx; \quad 7) \int (\sin 2x + x)dx.$$

## 2 правила интегрирования выполнить примеры .

---

$$1) \int 5 dx;$$

$$2) \int 6x dx;$$

$$3) \int 4(x^2 - x + 3) dx;$$

$$4) \int 2(3x - 1)^2 dx;$$

$$5) \int \frac{x^3 + 3x^2 + 4x}{x} dx;$$

$$6) \int \frac{dx}{x^4};$$

$$7) \int \frac{dx}{x+1};$$

$$8) \int \frac{3dx}{x}.$$