Тема 10 «Интеграл и его приложения»

«Дифференциал функции. Первообразная и ее геометрический смысл. Неопределенный интеграл.»
Урок 10.1

Повторение :

- Сформулируйте определение производной функции в точке.
- Сформулируйте правила вычисления производных.
- Какая функция называется сложной.
- Сформулируйте правило нахождения производной сложной функции.

Найдите производную:

1) $5x^2;$

2) $-9x^4+\frac{1}{3}x^3-15;$

3) $11\sin x-\frac{6}{17};$

4) $5tgx-9\sin 4x;$ 5) $(x^2-7)^4.$

1. Понятие дифференциала функции.

ïî îïðåäåëåíèþ ïðîèçâîäíîé $y' = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$

ïî îïðåäåëåíèþ ïðåäåëà: $\frac{\Delta y}{\Delta x} = y' + \alpha(x)$, ãäå $\alpha(\text{õ})$ - á.ì.â.

$\Rightarrow \Delta\text{ó} = y' \cdot \Delta\text{õ} + \alpha(\text{õ}) \cdot \Delta\text{õ}$, ãäå $y' \cdot \Delta\text{õ} -$ ãëàâíàÿ ÷àñòü ïðèðàùåíèÿ ôóíêöèè

$\alpha(\text{õ}) \cdot \Delta\text{õ} - \text{á.ì.â.}$

<u>Определение:</u> Дифференциалом функции y=f(x) в точке называется главная часть приращения функции.

$$\left.\begin{aligned} dy &= y'\cdot\Delta x \\ dx &= x'\cdot\Delta x = \Delta x \end{aligned}\right\} \Rightarrow dy = y'\cdot dx$$

$$y' = \frac{dy}{dx}$$

Вычислите дифференциалы функций:

$$1)\, y=(x^3-2)^4$$

$$dy=y'\cdot dx$$

$$dy=((x^3-2)^4)'\cdot dx=4(x^3-2)^3\cdot(x^3-2)'\cdot dx=$$

$$=4(x^3-2)^3\cdot 3x^2\cdot dx=12x^2\cdot(x^3-2)^3\cdot dx.$$

$$2)\, y=\sqrt{x^2-1};$$

$$3)\, y=e^{-x};$$

$$4)\, y=(1-x^2)^5.$$

2.Понятие первообразной и неопределенного интеграла

Определение 1:

Функция $F(x)$ называется первообразной для функции $f(x)$ на промежутке I, если для любого $x \in I$ выполняется равенство:

$$F'(x) = f(x)$$

Решите № 331

- Если функция $F(x)$ является первообразной для функции $f(x)$, где $x \in (a;в)$,то множество всех первообразных для функции $f(x)$ задается формулой $F(x)+C$,где C-произвольная постоянная величина.

Определение 2:

- Совокупность всех первообразных **F(x)+C** функции **f(x),x**є(а,в) называется неопределенным интегралом от функции **f(x)**.

- Записывается $\int f(x)dx=F(x)+C$

- ∫-знак интеграла;
- **f(x)**-подинтегральная функция;
- **f(x)dx**-подинтегральное выражение;
- x-переменная интегрирования;
- C- постоянная интегрирования.

Таблица интегралов

$1)\int x^{\alpha}\,\alpha x=\frac{[illegible]^{[illegible]+1}}{[illegible]+1}+c$ $(\alpha\neq-1)$	$\int dx=x+c;$ $\int\frac{dx}{x^2}=-\frac{1}{x}+c;$	$\int xdx=\frac{x^2}{2}+c;$ $\int\frac{[illegible]}{\sqrt{[illegible]}}=2\xi\,[illegible]+c$
$2)\ \int\frac{dx}{x}=\ln\lvert x\rvert+c$	$3)\ \int a^x dx=\frac{a^x}{\ln a}+c,\quad a>0,\ a\neq1$	$4)\ \int e^x dx=e^x+c$
$5)\ \int\sin xdx=-\cos x+c$	$6)\ \int\cos xdx=\sin x+c$	$7)\ \int\frac{dx}{\sin^2 x}=-ctgx+c$
$8)\ \int\frac{dx}{\cos^2 x}=tgx+c$	$9)\ \int tgxdx=-\ln\lvert\cos x\rvert+c$	$10)\ \int ctgxdx=\ln\lvert\sin x\rvert+c$
$11)\ \int\frac{dx}{1+x^2}=arctgx+c$	$12)\ \int\frac{dx}{a^2+x^2}=\frac{1}{a}arctg\frac{x}{a}+c$	$13)\ \int\frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}=\arcsin\frac{x}{a}+c$ $\int\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=\arcsin x+c$
$14)\ \int\frac{dx}{x^2-a^2}=\frac{1}{2a}\ln\left\lvert\frac{x-a}{x+a}\right\rvert+c$		

Линейное расширение дифференциала

$$15)\ \int f(kx+b)dx=\frac{1}{k}F(kx+b)+c$$

$$\int\frac{dx}{kx+b}=\frac{1}{k}\cdot\ln\lvert kx+b\rvert+c$$

Формула (2+15)

$$13\int\frac{dx}{\sqrt{a^2-n^2x^2}}=\frac{1}{n}\arcsin\frac{nx}{a}+c$$

$$n\neq0,\ a\neq0$$

12а)

$$\int\frac{dx}{a^2+n^2x^2}=\frac{1}{an}arctg\frac{nx}{a}+c$$

формула(12+15) $n\neq0,\ a\neq0$

$$\int\sin(kx+b)dx=-\frac{1}{k}\cos(kx+b)+c$$

$$\int\cos(kx+b)dx=\frac{1}{k}\sin(kx+b)+c$$

$$\int e^{kx+b}dx=\frac{1}{k}e^{kx+b}+c$$

$$\int f(kx)=\frac{1}{k}F(kx)+c$$

Пример с проверкой (формула 1) :

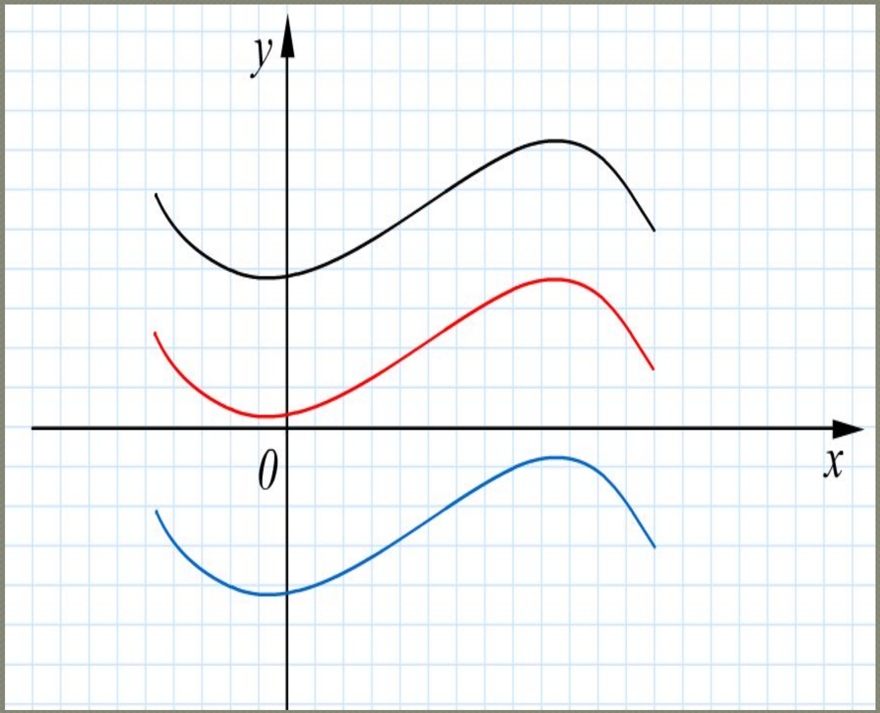
$$\int x^3 dx = \frac{x^4}{4} + C$$

$$\text{ï ðî âåðêà}: \left(\frac{x^4}{4} + C \right)' = \frac{1}{4} \cdot 4x^3 + 0 = x^3$$

Замечания:

- Нахождение функции по ее производной называется интегрированием(от integratio- восстановление);
- Интегрирование- действие обратное дифференцированию;
- Правильность интегрирования проверяется нахождением производной.

3.Геометрический смысл неопределенного интеграла



- Неопределенный интеграл представляет собой семейство интегральных кривых, каждая из которых получается из любой другой кривой параллельным переносом вдоль оси ОХ

4.Основные свойства неопределенного интеграла

1. Производная от неопределенного интеграла равна подинтегральной функции:**$(\int f(x)dx)'=f(x)$;**

2. Дифференциал от неопределенного интеграла равен подинтегральному выражению:**$d\int f(x)dx=f(x)dx$;**

3. Неопределенный интеграл от дифференциала некоторой функции равен этой функции плюс произвольная постоянная:

$\int dF(x)=F(x)+C;$

4. Постоянный множитель можно выносить за знак интеграла:

$\int af(x)dx=a\int f(x)dx;$

5. Интеграл от суммы непрерывных функций равен сумме интегралов слагаемых:

$\int (f(x)+g(x))dx=\int f(x)dx+g(x)dx.$

Правила интегрирования

1. $\int c \cdot f(x)dx = c \cdot \int f(x)dx$, где $c = const$
2. $\int (f(x) \pm g(x))dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$
3. $\int f(ax+b)dx = \frac{1}{a}F(ax+b)+c, \; a \neq 0$

Пример №1

$$\int(3x^5+4cosx-2x+1)dx =$$

Интеграл суммы выражений равен сумме интегралов этих выражений

Постоянный множитель можно вынести за знак интеграла

$$\int 3x^5dx+\int 4cosxdx-\int 2xdx+\int 1dx =$$

$$3\int x^5dx+4\int cosxdx-2\int xdx+1\int dx =$$

$$\int x^n dx=\frac{x^{n+1}}{n+1}+c$$

$$\int cosxdx=sinx+c$$

$$\int x^n dx=\frac{x^{n+1}}{n+1}+c$$

$$\int dx=x+c$$

$$\frac{3x^{5+1}}{5+1}+4sinx-\frac{2x^2}{2}+x+C \Rightarrow \frac{1}{2}x^6+4sinx-x^2+x+C$$

Пример2

пример

Найти неопределенный интеграл. Выполнить проверку.

$$\int x(1-2x)^3\,dx$$

Решение:

$$\int x(1-2x)^3\,dx = \int x(1-6x+12x^2-8x^3)\,dx = \int (x-6x^2+12x^3-8x^4)\,dx =$$

$$= \frac{x^2}{2} - 6\cdot\frac{x^3}{3} + 12\cdot\frac{x^4}{4} - 8\cdot\frac{x^5}{5} + C = \frac{x^2}{2} - 2x^3 + 3x^4 - \frac{8x^5}{5} + C,\ где\ C = const$$

Пример 3. Вычислить интеграл $\int\left(2x^4+3\sin x-5e^x\right)dx$

$$\int\left(2x^4+3\sin x-5e^x\right)dx=\int 2x^4dx+\int 3\sin x\,dx-\int 5e^x dx=$$

$$=2\cdot\int x^4dx+3\cdot\int\sin x\,dx-5\cdot\int e^x dx=2\cdot\frac{x^{4+1}}{4+1}+C_1+3\cdot\left(-\cos x\right)+C_2-5\cdot e^x+C_3=$$

$$=\frac{2}{5}x^5-3\cos x-5e^x+C,\qquad C=C_1+C_2+C_3$$

Примеры 4 и 5

Пример 1. Используя таблицу и свойства интегралов, найти интегралы.

$$1.\quad \int \frac{dx}{x^5} = \int x^{-5}dx = (\hat{o}\ \hat{\imath}\ \eth\grave{\imath}\ \acute{o}\ddot{e}\grave{a}\ (3)) = \frac{x^{-5+1}}{-5+1} + C =$$

$$= -\frac{1}{4x^4} + C.$$

$$2.\quad \int (2x + 7^x)dx = 2\int xdx + \int 7^x dx =$$

$$(\hat{o}\ \hat{\imath}\ \eth\grave{\imath}\ \acute{o}\ddot{e}\hat{u}\ (3), (7)) = 2\frac{x^2}{2} + \frac{7^x}{\ln 7} + C = x^2 + \frac{7^x}{\ln 7} + C.$$

Пример 5 и6

Пример 29.1. Найти интеграл $\int (2x^4 - 3x^2 + x - 5)\,dx$.

- Решение:

$$\int (2x^4 - 3x^2 + x - 5)\,dx = 2\int x^4\,dx - 3\int x^2\,dx + \int x\,dx - 5\int dx =$$

$$= 2\frac{x^5}{5} + C_1 - 3\frac{x^3}{3} + C_2 + \frac{x^2}{2} + C_3 - 5x + C_4 = \frac{2}{5}x^5 - x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 5x + C,$$

где $C = C_1 + C_2 + C_3 + C_4$.

Пример 29.2. Найти интеграл $\int \frac{x+1}{x}\,dx$.

- Решение: $\int \frac{x+1}{x}\,dx = \int \left(1 + \frac{1}{x}\right) dx = x + \ln|x| + C$.

Пример 7

Пример 6. Найти неопределенный интеграл $\int \sqrt[4]{x^5}\, dx$

Решение.

Вид подынтегральной функции можно менять с помощью тождественных преобразований !!!

$$\int \sqrt[4]{x^5}\, dx = \int x^{\frac{5}{4}} dx = \frac{x^{\frac{5}{4}+1}}{\frac{5}{4}+1} + C = \frac{x^{\frac{9}{4}}}{9/4} + C = \frac{4x^{\frac{9}{4}}}{9} + C = \frac{4}{9}\sqrt[4]{x^9} + C$$

$$\boxed{\int x^r dx = \frac{x^{r+1}}{r+1} + C, \text{ если } r \neq -1}$$

Используется формула 12

Пример 8. Вычислить интеграл $\int \frac{dx}{25+4x^2}$

$$\int \frac{dx}{25+4x^2} = \int \frac{dx}{4\cdot\left(\frac{25}{4}+x^2\right)} = \frac{1}{4}\cdot\int \frac{dx}{\left(\frac{5}{2}\right)^2+x^2} =$$

$$= \frac{1}{4}\cdot\frac{2}{5}\cdot\arctan\frac{2x}{5}+C = \frac{1}{10}\arctan\frac{2x}{5}+C$$

9,10,11,12,13

1. $$\int \frac{x^4 - 2x^3 + 3x^2}{x^2} dx = \int \left(x^2 - 2x + 3\right) dx = \int x^2 dx - 2\int x dx +$$

$$+3\int dx = \frac{x^3}{3} - x^2 + 3x + C$$

2. $$\int \left(1 - \frac{1}{x^2}\right)^2 = \int \left(1 - \frac{2}{x^2} + \frac{1}{x^4}\right) dx = \int dx - 2\int x^{-2} dx + \int x^{-4} dx =$$

$$x + 2x^{-1} - \frac{1}{3}x^{-3} + C = x + \frac{2}{x} - \frac{1}{3x^3} + C$$

3. $$\int ctg^2 x dx = \int \left(\frac{1}{\sin^2 x} - 1\right) dx = \int \frac{dx}{\sin^2 x} - \int dx = -ctgx - x + C$$

4. $$\int \frac{dx}{\sin^2 x \cos^2 x} = \int \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\sin^2 x \cos^2 x} = \int \frac{dx}{\sin^2 x} + \int \frac{dx}{\cos^2 x} =$$

$$-ctgx + tgx + C$$

5. $$\int \cos^2 \frac{x}{2} dx = \frac{1}{2}\int (1 + \cos x) dx = \frac{1}{2}\int dx + \frac{1}{2}\int \cos x dx =$$

$$= \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\sin x + C$$

интегралы следующих функци (без 7 примера):

$$1)\int dx;\ \ 2)\int (x+1)dx;\ \ 3)\int (x^9+3)dx;\ \ 4)\int (3x^3-5x^2)dx;$$

$$5)\int (\sqrt{x}+1)dx;\ \ 6)\int (2\cos x-4)dx; 7)\int (\sin 2x+x)dx.$$

2 правила интегрирования выполнить примеры .

$$1)\int 5dx;$$

$$2)\int 6xdx;$$

$$3)\int 4(x^2 - x + 3)dx;$$

$$4)\int 2(3x-1)^2dx;$$

$$5)\int \frac{x^3 + 3x^2 + 4x}{x}dx;$$

$$6)\int \frac{dx}{x^4};$$

$$7)\int \frac{dx}{x+1};$$

$$8)\int \frac{3dx}{x}.$$