

# Анализ деформированного состояния.

## Физические уравнения упругости

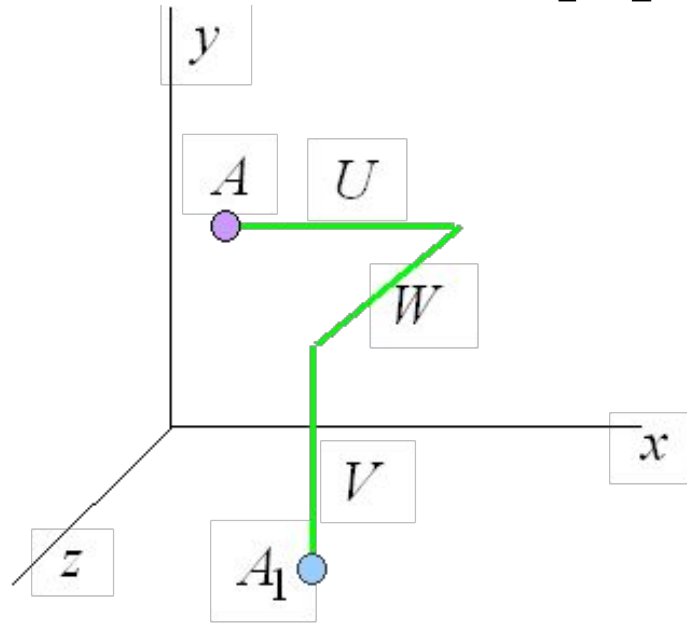
Тензору напряжений соответствует тензор деформаций, который образован тремя линейными и шестью угловыми деформации.

Тензор деформации также приводится к диагональному виду

$$\Lambda = \begin{vmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2}\gamma_{yx} & \frac{1}{2}\gamma_{zx} \\ \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \varepsilon_y & \frac{1}{2}\gamma_{zy} \\ \frac{1}{2}\gamma_{xz} & \frac{1}{2}\gamma_{yz} & \varepsilon_z \end{vmatrix} \rightarrow \begin{vmatrix} \varepsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_3 \end{vmatrix}$$

Здесь  $\varepsilon_1$ ,  $\varepsilon_2$  и  $\varepsilon_3$  - главные деформации. Они направлены по трем главным осям, сдвиги между которыми равны нулю.

# Дифференциальные зависимости между компонентами перемещений и компонентами относительных деформаций



$$\varepsilon_x = \frac{\partial U}{\partial x} ;$$

$$\varepsilon_y = \frac{\partial V}{\partial y} ;$$

$$\varepsilon_z = \frac{\partial W}{\partial z} ;$$

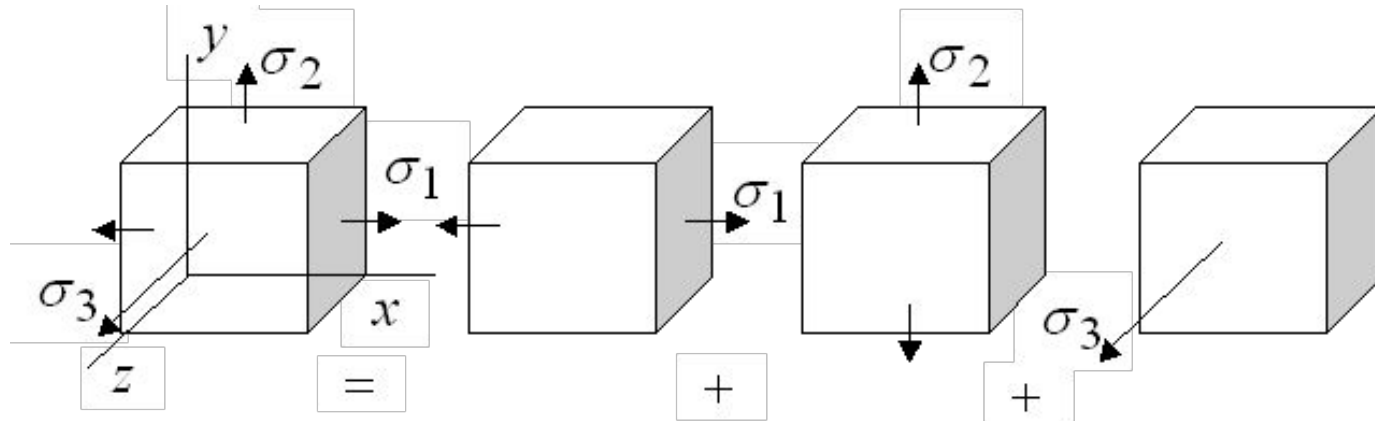
$$\gamma_{xy} = \frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial y} ;$$

$$\gamma_{yz} = \frac{\partial W}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial z} ;$$

$$\gamma_{zx} = \frac{\partial U}{\partial z} + \frac{\partial W}{\partial x} .$$

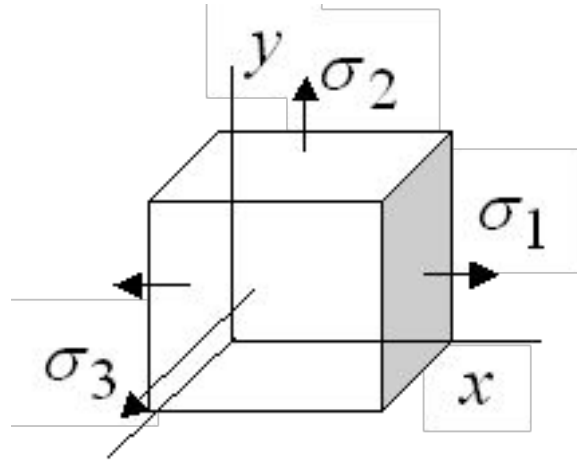
# Закон Гука для трехосного НДС

Напряженное состояние задано главными напряжениями. Применим принцип независимости действия сил .



$$\begin{aligned}
 \varepsilon_1 &= \frac{\sigma_1}{E} - \mu \frac{\sigma_2}{E} - \mu \frac{\sigma_3}{E} \\
 \varepsilon_2 &= -\mu \frac{\sigma_1}{E} + \frac{\sigma_2}{E} - \mu \frac{\sigma_3}{E} \\
 \varepsilon_3 &= -\mu \frac{\sigma_1}{E} - \mu \frac{\sigma_2}{E} + \frac{\sigma_3}{E}
 \end{aligned}$$

# Закон Гука для трехосного НС (продолжение)

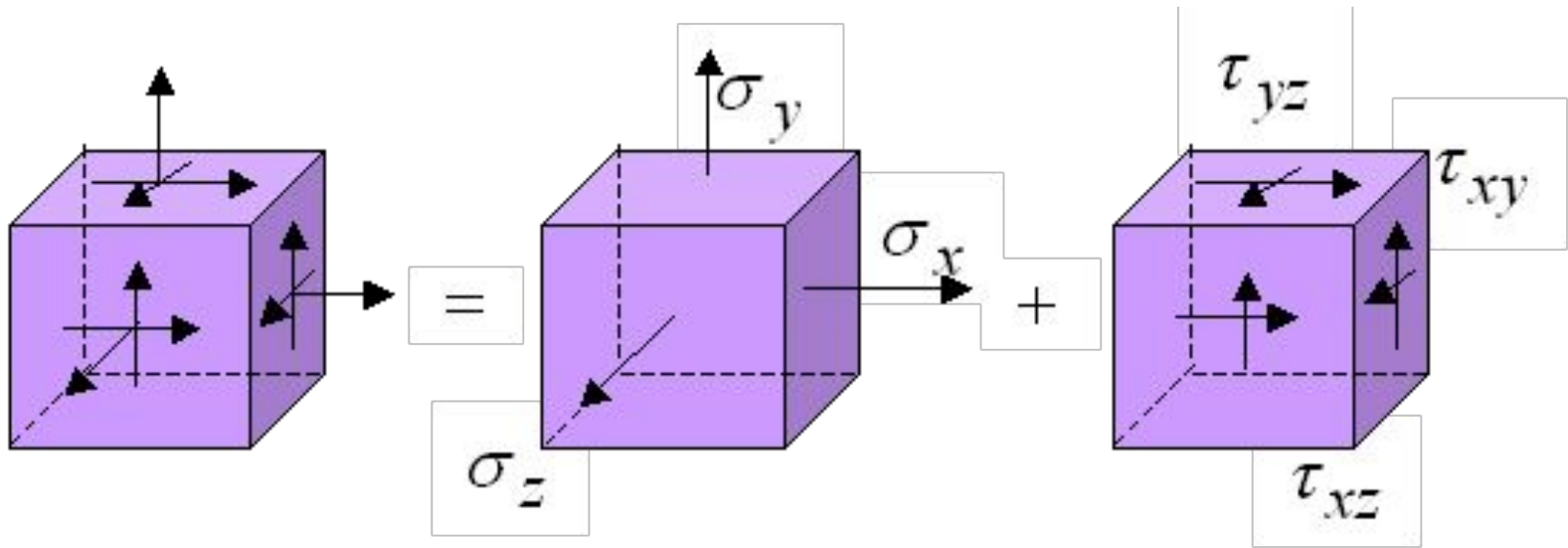


$$\varepsilon_1 = \frac{1}{E} (\sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3))$$

$$\varepsilon_2 = \frac{1}{E} (\sigma_2 - \mu(\sigma_3 + \sigma_1))$$

$$\varepsilon_3 = \frac{1}{E} (\sigma_3 - \mu(\sigma_1 + \sigma_2))$$

# Обобщенный закон Гука

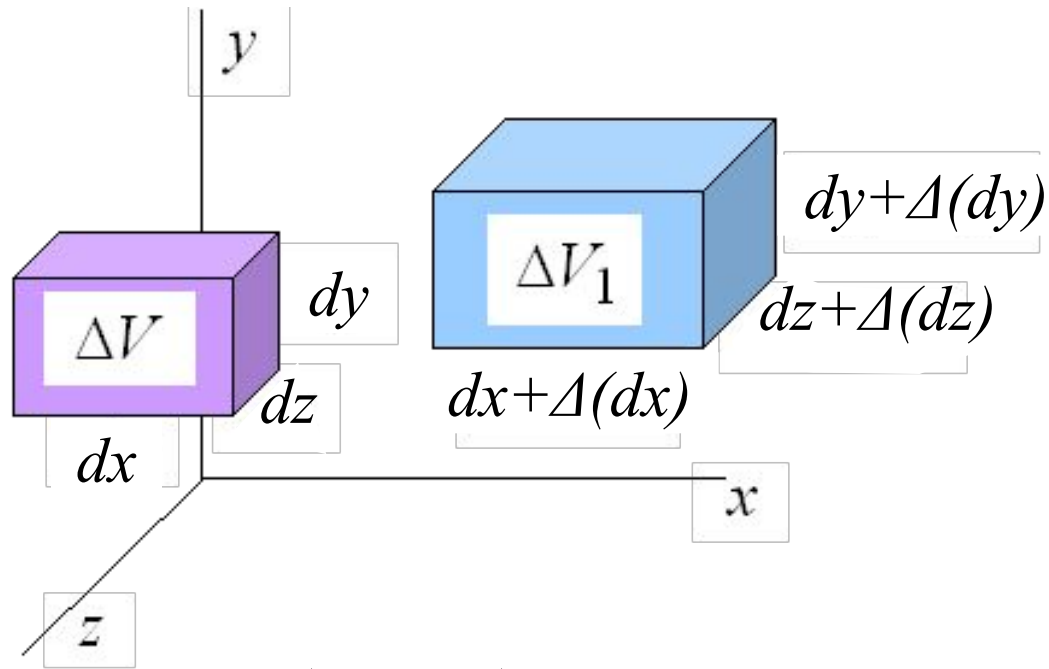


$$\varepsilon_x = \frac{1}{E} (\sigma_x - \mu(\sigma_y + \sigma_z)) ; \quad \gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G} ;$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E} (\sigma_y - \mu(\sigma_z + \sigma_x)) ; \quad \gamma_{xz} = \frac{\tau_{xz}}{G} ;$$

$$\varepsilon_z = \frac{1}{E} (\sigma_z - \mu(\sigma_x + \sigma_y)) ; \quad \gamma_{yz} = \frac{\tau_{yz}}{G} .$$

# Относительное изменение объема

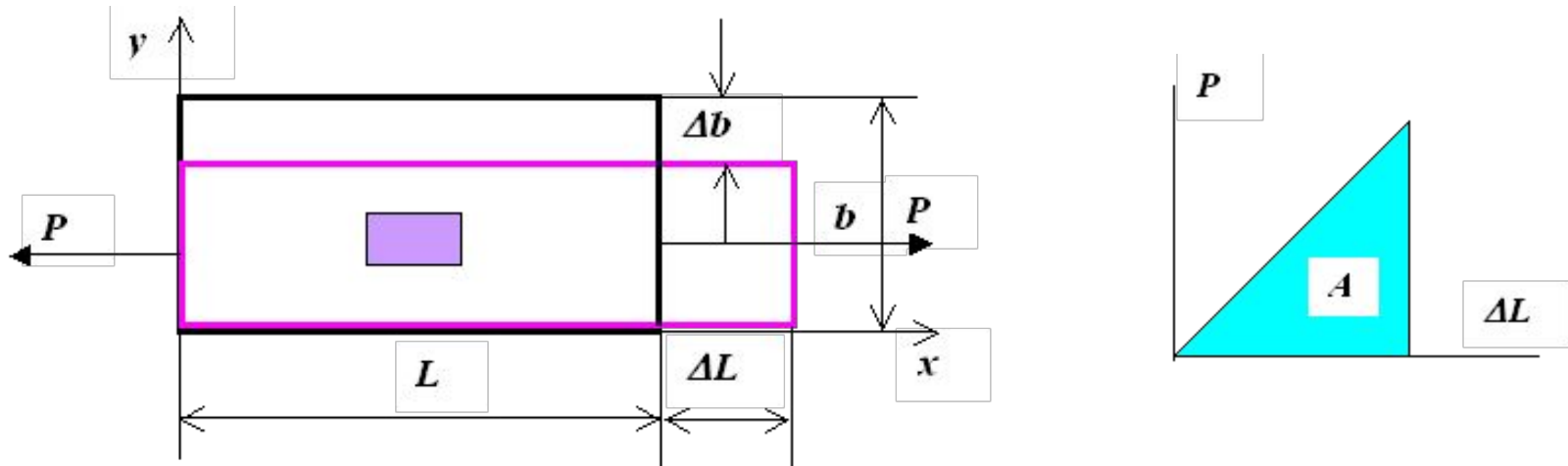


$$\varepsilon_V = \frac{\Delta V_1 - \Delta V}{\Delta V}$$

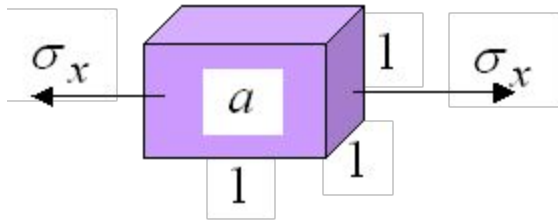
$$\varepsilon_V = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z$$

$$\varepsilon_V = \frac{1 - 2\mu}{E} (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) = \frac{1 - 2\mu}{E} (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)$$

# Удельная потенциальная энергия при одноосном растяжении

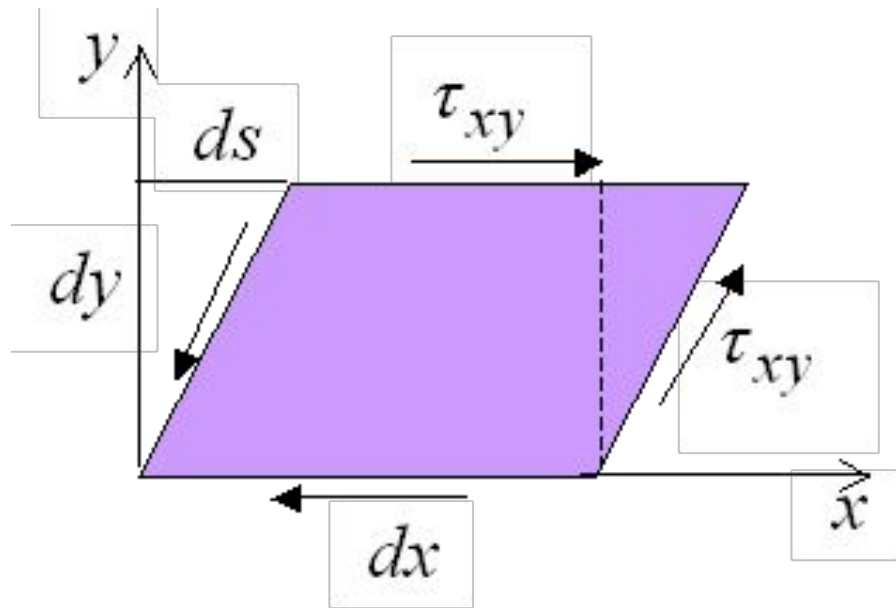


$$A = \int_0^{\Delta L} P(\Delta L) d(\Delta L) = \int_0^{\Delta L} \frac{\Delta L}{L} EF d(\Delta L) = \frac{EF}{L} \frac{\Delta L^2}{2} = \frac{P\Delta L}{2}$$



$$a = \frac{A}{LF} = \frac{P\Delta L}{2LF} = \frac{1}{2} \frac{P}{F} \frac{\Delta L}{L} = \frac{1}{2} \sigma_x \varepsilon_x = \frac{\sigma_x^2}{2E} = \frac{E\varepsilon_x^2}{2}$$

# Удельная потенциальная энергия при ЧИСТОМ СДВИГЕ

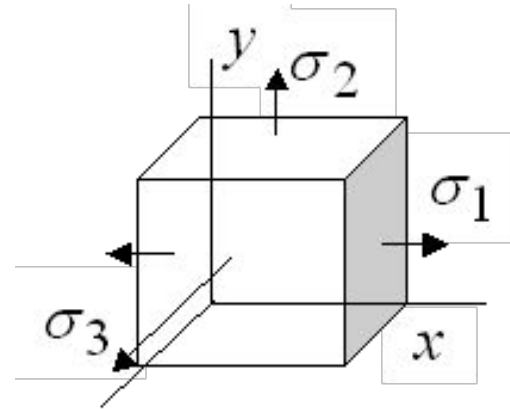
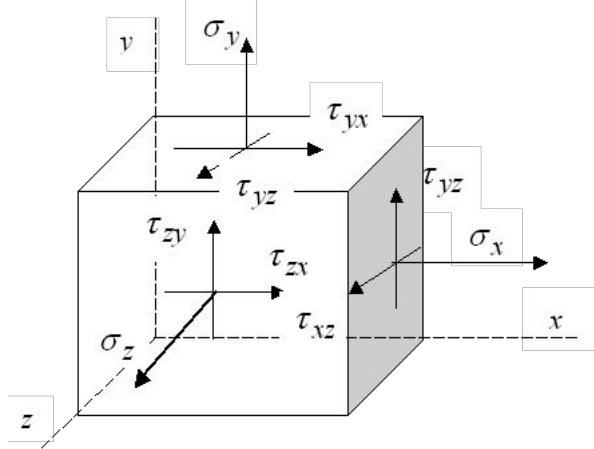


$$A_{xy} = \frac{\tau_{xy} dF ds}{2}$$

$$a_{xy} = \frac{\tau_{xy} dF ds}{2 dF dy} = \frac{\tau_{xy} ds}{2 dy} = \frac{\tau_{xy} \gamma_{xy}}{2} = \frac{\tau_{xy}^2}{2G} = \frac{G \gamma_{xy}^2}{2}$$



# Удельная потенциальная энергия при трехосном напряженном состоянии



Каждая составляющая тензора напряжений производит работу только на своем перемещении (деформации). Поэтому, в общем случае

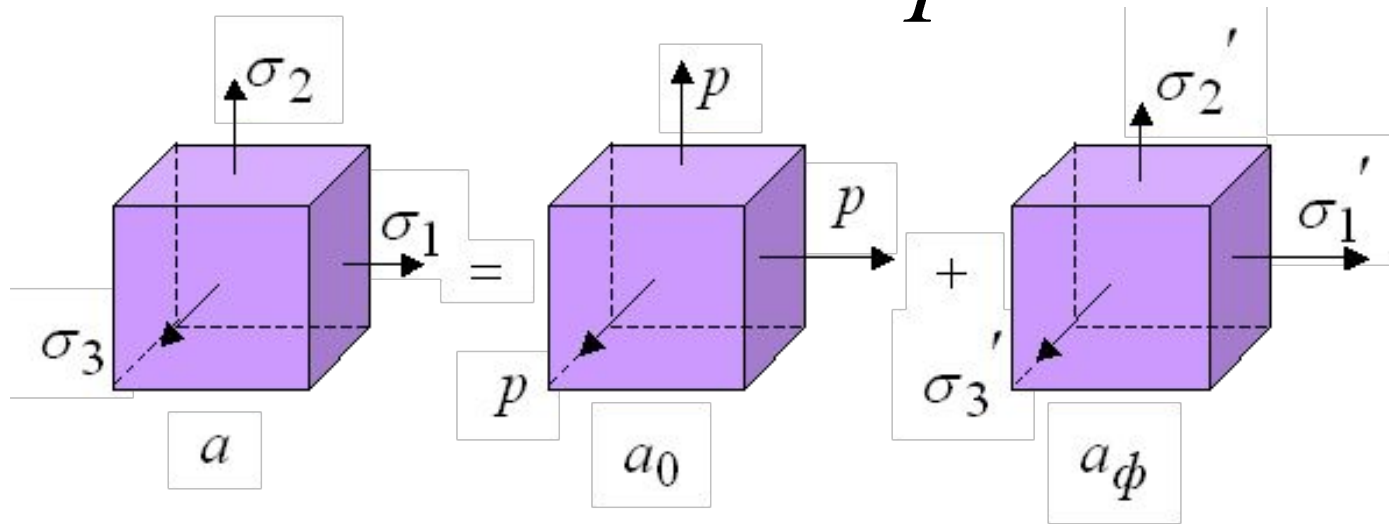
$$a_{xyz} = \frac{1}{2} \left( \sigma_x \varepsilon_x + \sigma_y \varepsilon_y + \sigma_z \varepsilon_z + \tau_{xy} \gamma_{xy} + \tau_{xz} \gamma_{xz} + \tau_{yz} \gamma_{yz} \right)$$

Если все напряжения - главные, то удельная потенциальная энергия равна

$$a_{123} = \frac{1}{2E} \left( \sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - 2\mu(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_1\sigma_3 + \sigma_2\sigma_3) \right).$$

# Удельная потенциальная энергия изменения объема и удельная потенциальная энергия изменения формы

$$a = a_0 + a_\phi$$



$$\sigma_1 = \sigma'_1 + p; \quad \sigma_2 = \sigma'_2 + p; \quad \sigma_3 = \sigma'_3 + p$$

# Удельная потенциальная энергия изменения объема

Чтобы изменение объема в дополнительном НС

$$\varepsilon_V' = \frac{1-2\mu}{E} (\sigma_1' + \sigma_2' + \sigma_3') = 0$$

необходимо, чтобы  $(\sigma_1' + \sigma_2' + \sigma_3') = 0$

$$(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) = (\sigma_1' + \sigma_2' + \sigma_3') + 3p$$

$$p = \frac{1}{3}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) = \sigma_{cp} \quad \varepsilon = \frac{1}{E}(p - \mu(p + p)) = \frac{p}{E}(1 - 2\mu)$$

$$a_0 = \frac{3}{2} p \varepsilon = \frac{3(1-2\mu)}{2} \frac{p^2}{E}$$

**Удельная потенциальная энергия изменения  
формы**

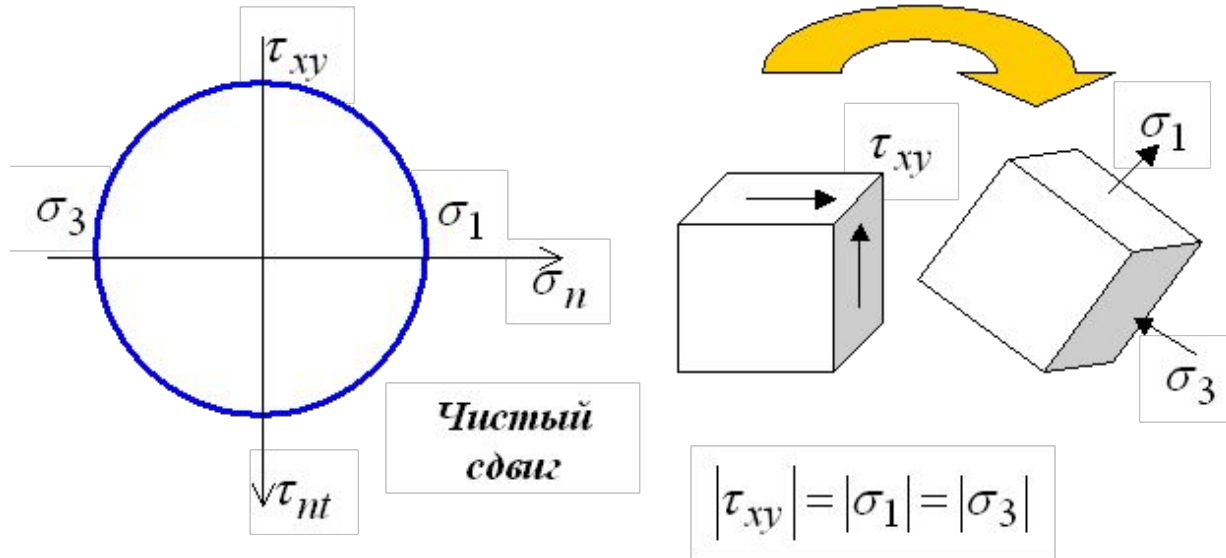
$$a_0 = \frac{1-2\mu}{6E} (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)^2$$

$$a_\phi = a - a_0$$

$$a = \frac{1}{2E} \left( \sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - 2\mu(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_1\sigma_3 + \sigma_2\sigma_3) \right)$$

$$a_\phi = \frac{1+\mu}{6E} \left( (\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 \right)$$

# Связь между константами упругости $E$ , $G$ и $\mu$



$$a_{xy} = \frac{\tau_{xy}^2}{2G}$$

$$\sigma_1 = -\sigma_3$$

$$a_{13} = \frac{1}{2E} (\sigma_1^2 + \sigma_3^2 - 2\mu(\sigma_1\sigma_3)) = \frac{\sigma_1^2}{E} (1 + \mu)$$

$$a_{xy} = a_{13}$$

$$G = \frac{E}{2(1 + \mu)}$$





















