Анализ деформированного состояния. Физические уравнения упругости

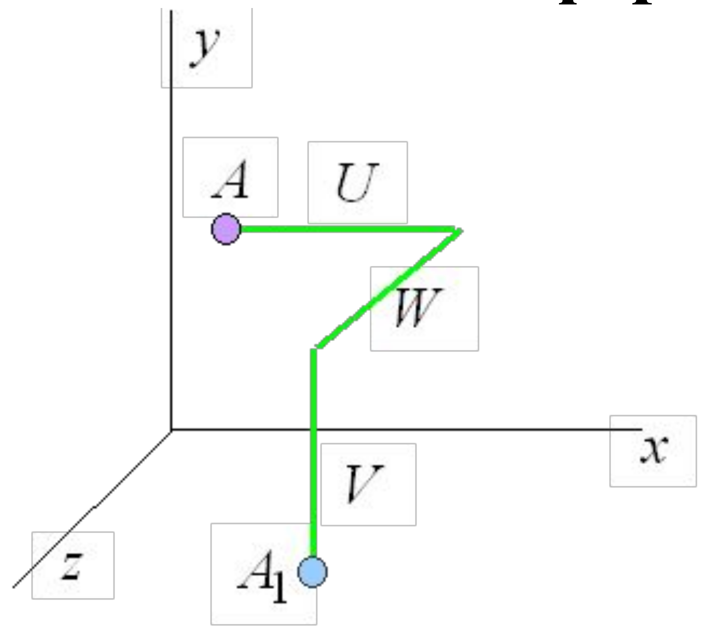
Тензору напряжений соответствует тензор деформаций, который образован тремя линейными и шестью угловыми деформации.

Тензор деформации также приводится к диагональному виду

$$\Lambda = \begin{vmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2}\gamma_{yx} & \frac{1}{2}\gamma_{zx} \\ \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \varepsilon_y & \frac{1}{2}\gamma_{zy} \\ \frac{1}{2}\gamma_{xz} & \frac{1}{2}\gamma_{yz} & \varepsilon_z \end{vmatrix} \to \begin{vmatrix} \varepsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_3 \end{vmatrix}$$

Здесь ε_1, ε_2 и ε_3 - главные деформации. Они направлены по трем главным осям, сдвиги между которыми равны нулю.

Дифференциальные зависимости между компонентами перемещений и компонентами относительных деформаций

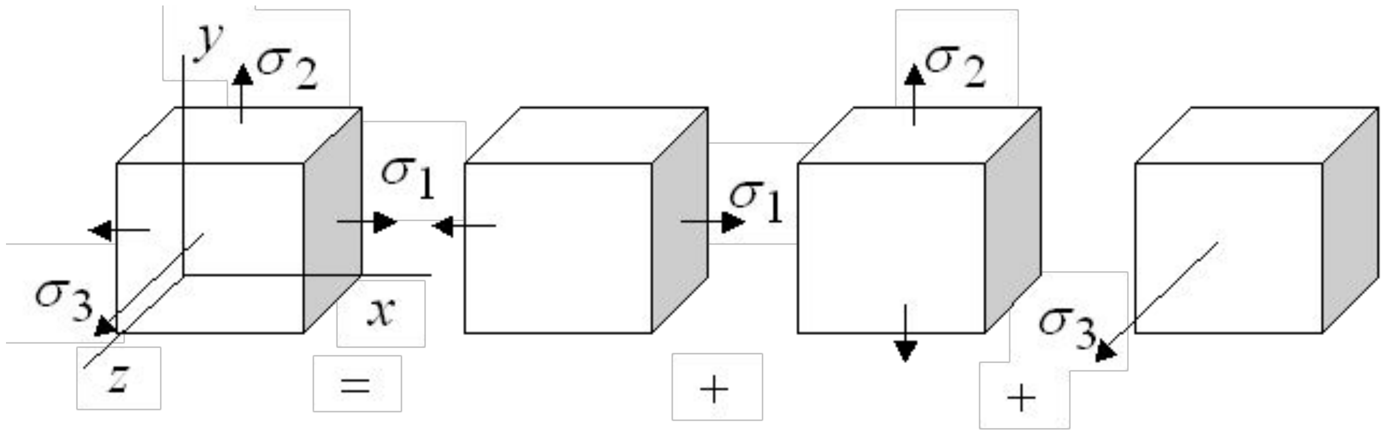


$$\varepsilon_x = \frac{\partial U}{\partial x}; \qquad \varepsilon_y = \frac{\partial V}{\partial y}; \qquad \varepsilon_z = \frac{\partial W}{\partial z};$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial y}; \qquad \gamma_{yz} = \frac{\partial W}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial z}; \qquad \gamma_{zx} = \frac{\partial U}{\partial z} + \frac{\partial W}{\partial x}.$$

Закон Гука для трехосного НС

Напряженное состояние задано главными напряжениями. Применим принцип независимости действия сил .

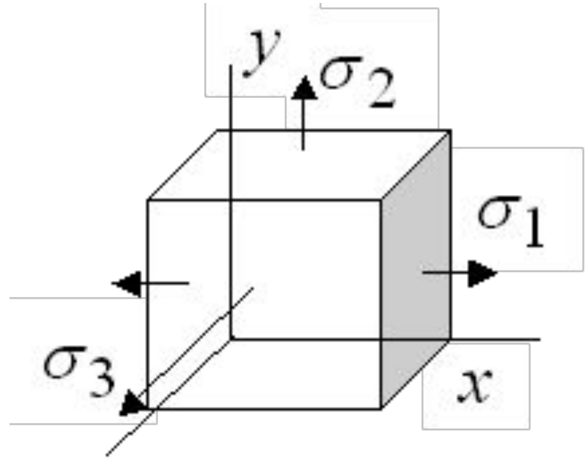


$$\varepsilon_1 = \frac{\sigma_1}{E} - \mu\frac{\sigma_2}{E} - \mu\frac{\sigma_3}{E}$$

$$\varepsilon_2 = -\mu\frac{\sigma_1}{E} + \frac{\sigma_2}{E} - \mu\frac{\sigma_3}{E}$$

$$\varepsilon_3 = -\mu\frac{\sigma_1}{E} - \mu\frac{\sigma_2}{E} + \frac{\sigma_3}{E}$$

Закон Гука для трехосного НС (продолжение)

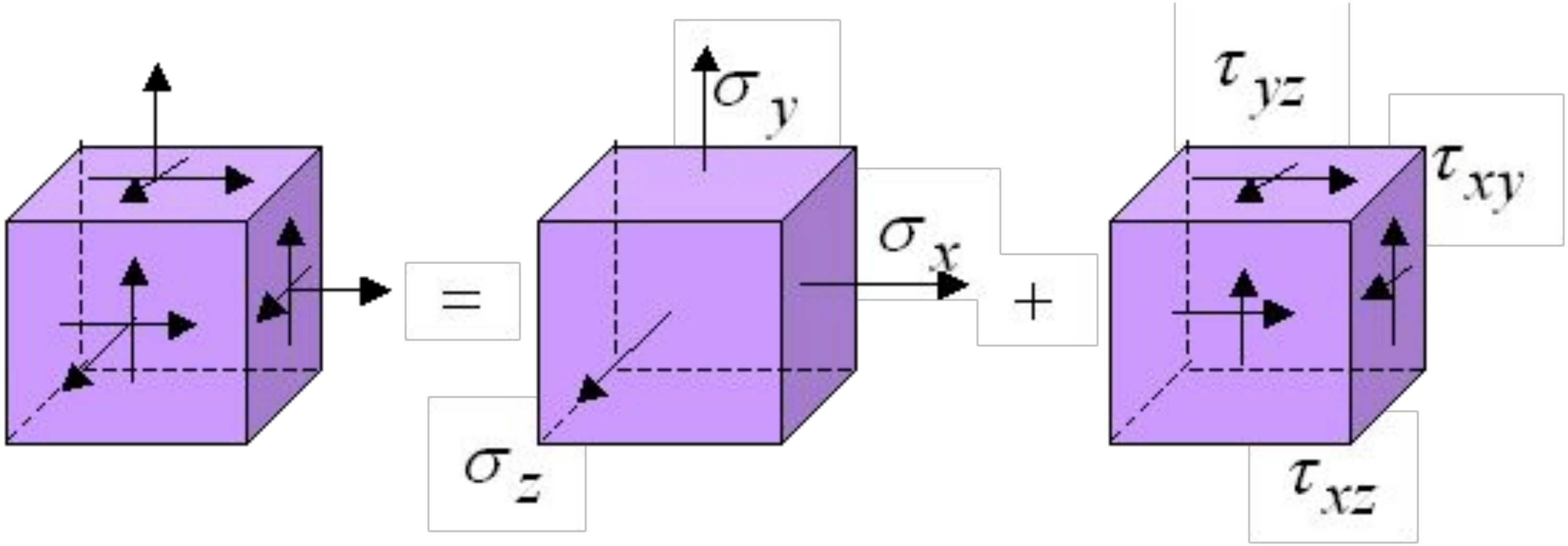


$$\varepsilon_1 = \frac{1}{E}\left(\sigma_1 - \mu\left(\sigma_2 + \sigma_3\right)\right)$$

$$\varepsilon_2 = \frac{1}{E}\left(\sigma_2 - \mu\left(\sigma_3 + \sigma_1\right)\right)$$

$$\varepsilon_3 = \frac{1}{E}\left(\sigma_3 - \mu\left(\sigma_1 + \sigma_2\right)\right)$$

Обобщенный закон Гука

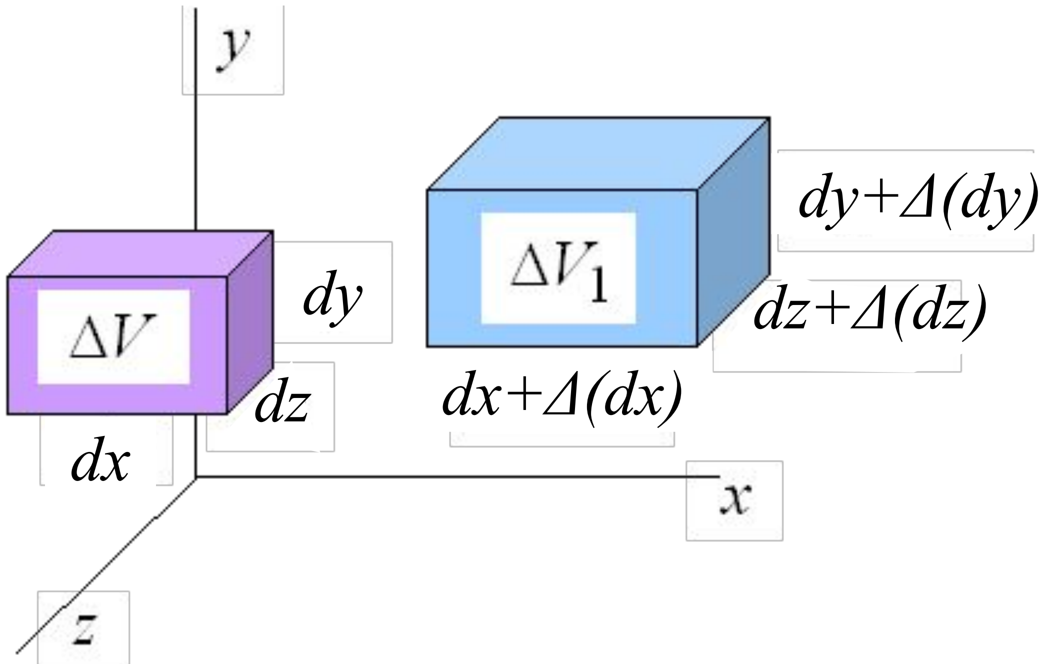


$$\varepsilon_x = \frac{1}{E}\left(\sigma_x - \mu\left(\sigma_y + \sigma_z\right)\right); \qquad \gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G};$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E}\left(\sigma_y - \mu\left(\sigma_z + \sigma_x\right)\right); \qquad \gamma_{xz} = \frac{\tau_{xz}}{G};$$

$$\varepsilon_z = \frac{1}{E}\left(\sigma_z - \mu\left(\sigma_x + \sigma_y\right)\right); \qquad \gamma_{yz} = \frac{\tau_{yz}}{G}.$$

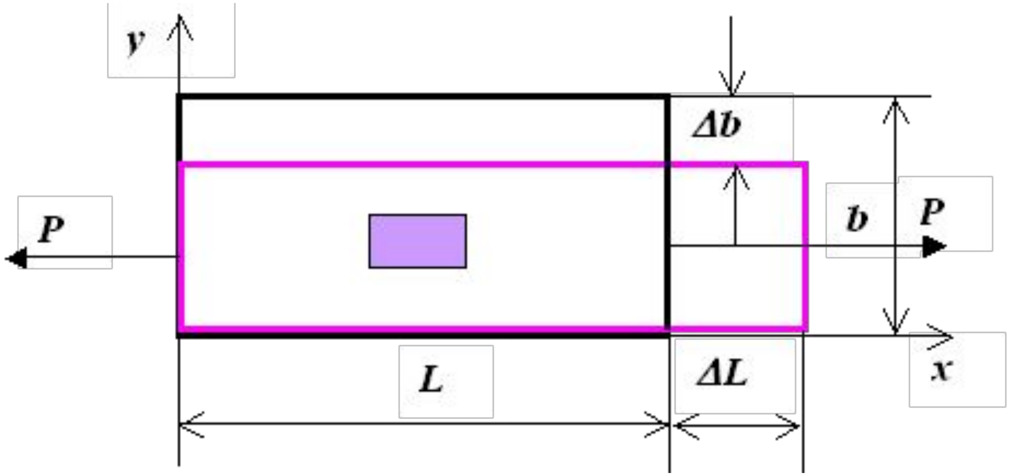
Относительное изменение объема

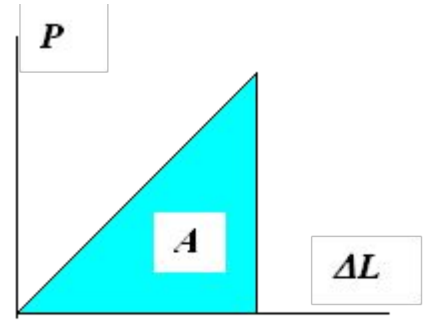


$$\varepsilon_V = \frac{\Delta V_1 - \Delta V}{\Delta V} \qquad \varepsilon_V = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z$$

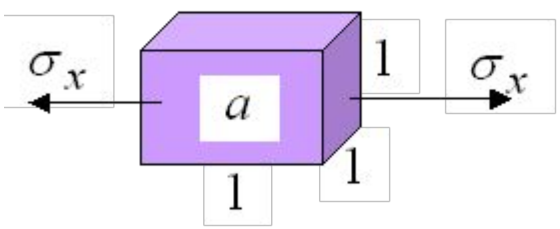
$$\varepsilon_V = \frac{1-2\mu}{E}\left(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z\right) = \frac{1-2\mu}{E}\left(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3\right)$$

Удельная потенциальная энергия при одноосном растяжении



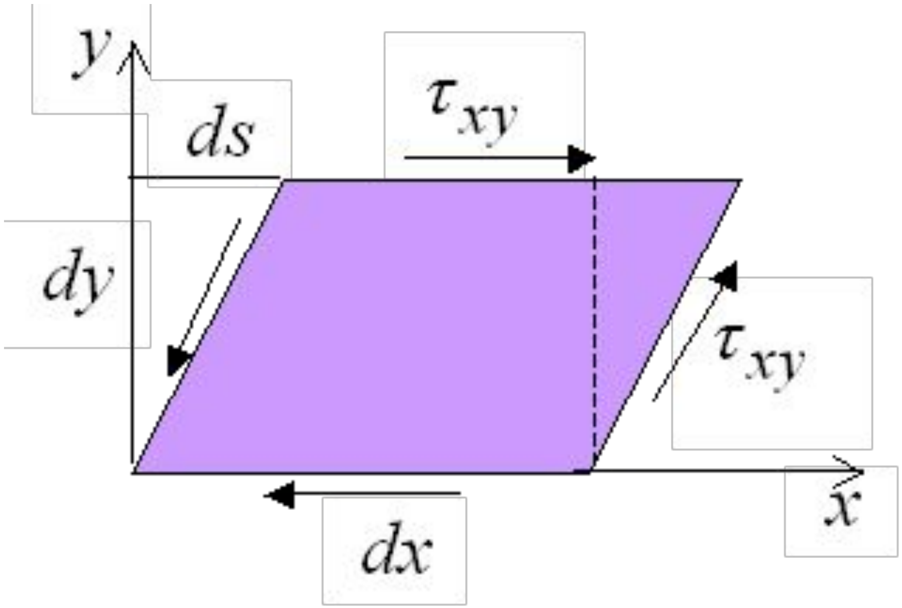


$$A=\int_{0}^{\Delta L}P(\Delta L)d(\Delta L)=\int_{0}^{\Delta L}\frac{EF}{L}\Delta L d(\Delta L)=\frac{EF}{L}\frac{\Delta L^{2}}{2}=\frac{P\Delta L}{2}$$



$$a=\frac{A}{LF}=\frac{P\Delta L}{2LF}=\frac{1}{2}\frac{P}{F}\frac{\Delta L}{L}=\frac{1}{2}\sigma_x\varepsilon_x=\frac{\sigma_x^2}{2E}=\frac{E\varepsilon_x^2}{2}$$

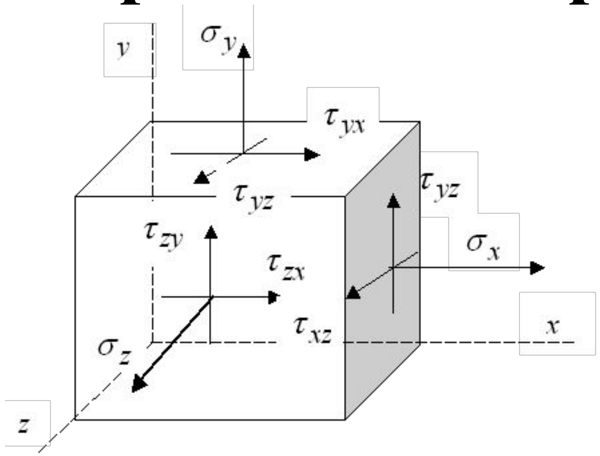
Удельная потенциальная энергия при чистом сдвиге

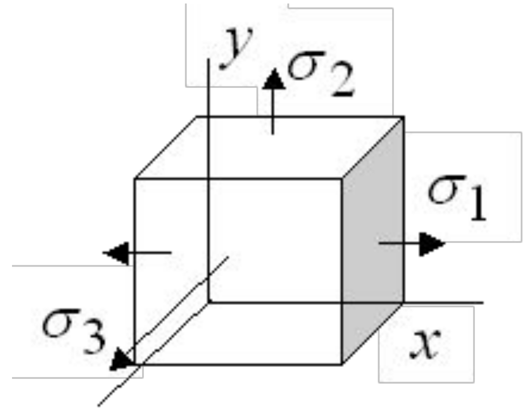


$$A_{xy} = \frac{\tau_{xy} dF ds}{2}$$

$$a_{xy} = \frac{\tau_{xy} dF ds}{2 dF dy} = \frac{\tau_{xy}}{2} \frac{ds}{dy} = \frac{\tau_{xy} \gamma_{xy}}{2} = \frac{\tau_{xy}^2}{2G} = \frac{G \gamma_{xy}^2}{2}$$

Удельная потенциальная энергия при трехосном напряженном состоянии





Каждая составляющая тензора напряжений производит работу только на своем перемещении (деформации). Поэтому, в общем случае

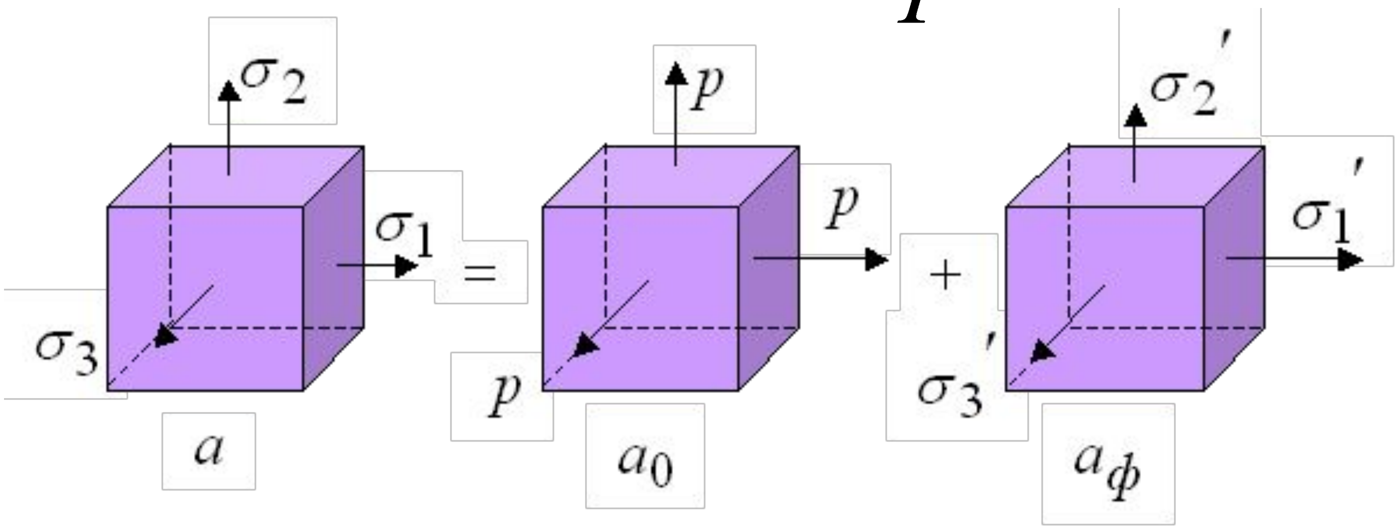
$$a_{xyz} = \frac{1}{2}\left(\sigma_x\varepsilon_x + \sigma_y\varepsilon_y + \sigma_z\varepsilon_z + \tau_{xy}\gamma_{xy} + \tau_{xz}\gamma_{xz} + \tau_{yz}\gamma_{yz}\right)$$

Если все напряжения - главные, то удельная потенциальная энергия равна

$$a_{123} = \frac{1}{2E}\left(\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - 2\mu\left(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_1\sigma_3 + \sigma_2\sigma_3\right)\right).$$

Удельная потенциальная энергия изменения объема и удельная потенциальная энергия изменения формы

$$a = a_0 + a_ф$$



$$\sigma_1 = \sigma_1' + p\,; \qquad \sigma_2 = \sigma_2' + p\,; \qquad \sigma_3 = \sigma_3' + p$$

Удельная потенциальная энергия изменения объема

Чтобы изменение объема в дополнительном НС

$$\varepsilon_V{}' = \frac{1-2\mu}{E}\left(\sigma_1{}' + \sigma_2{}' + \sigma_3{}'\right) = 0$$

необходимо, чтобы

$$\left(\sigma_1{}' + \sigma_2{}' + \sigma_3{}'\right) = 0$$

$$\left(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3\right) = \left(\sigma_1{}' + \sigma_2{}' + \sigma_3{}'\right) + 3p$$

$$p = \frac{1}{3}\left(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3\right) = \sigma_{cp} \qquad \varepsilon = \frac{1}{E}\left(p - \mu\left(p + p\right)\right) = \frac{p}{E}\left(1 - 2\mu\right)$$

$$a_0 = \frac{3}{2}p\varepsilon = \frac{3\left(1-2\mu\right)}{2}\frac{p^2}{E}$$

Удельная потенциальная энергия изменения формы

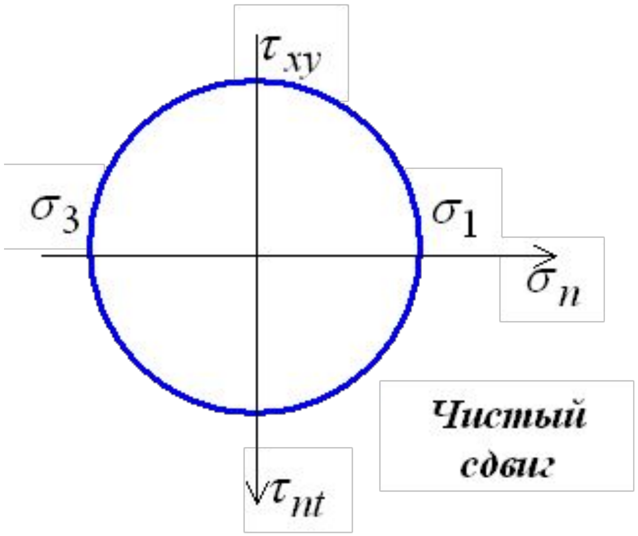
$$a_0 = \frac{1-2\mu}{6E}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)^2$$

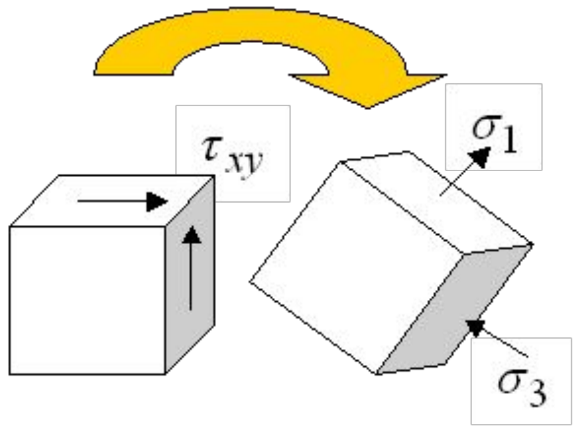
$$a_ф = a - a_0$$

$$a = \frac{1}{2E}\left(\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - 2\mu(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_1\sigma_3 + \sigma_2\sigma_3)\right)$$

$$a_ф = \frac{1+\mu}{6E}\left((\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2\right)$$

Связь между константами упругости *E*, *G* и *μ*





$$|\tau_{xy}| = |\sigma_1| = |\sigma_3|$$

$$a_{xy} = \frac{\tau_{xy}^2}{2G} \qquad \sigma_1 = -\sigma_3$$

$$a_{13} = \frac{1}{2E}\left(\sigma_1^2 + \sigma_3^2 - 2\mu(\sigma_1\sigma_3)\right) = \frac{\sigma_1^2}{E}(1+\mu)$$

$$a_{xy} = a_{13} \qquad G = \frac{E}{2(1+\mu)}$$