«Решение уравнений третьей степени»

в

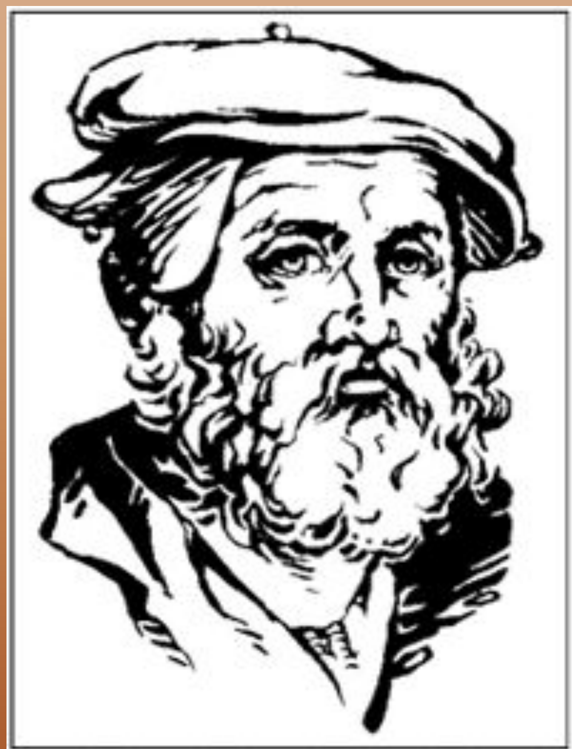
ЦЕЛЬ РАБОТЫ:

- Освоить решение кубических уравнений различными способами

задачи:

- найти исторические сведения об открытии формул для решения кубических уравнений
- узнать новые способы решения

Исторические
веден



Николо Тарталья
(1499-1557)

Джироламо Кардано
(1501-1576)

Понятие кубического уравнения

Кубическое уравнение - алгебраическое уравнение третьей степени,

$$ax^3+bx^2+cx-d=0$$

где a, b,c ,d - коэффициенты, а x - переменная.
Число x, обращающее уравнение в тождество, называется **корнем** или решением уравнения

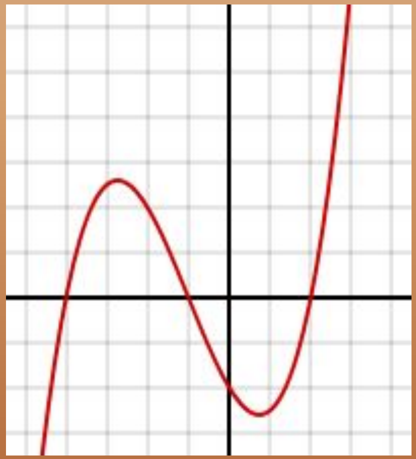


График кубического уравнения

Любое кубическое уравнение можно привести к более простому виду -каноническому :

$$y^3+py+q=0$$

Способы решения Кубических уравнений:

- с помощью вынесения общего множителя;
- с помощью деления на многочлен;
- с помощью формулы Кардано;
- с помощью теоремы Виета;
- с помощью схемы Горнера;
- решение возвратных уравнений;
- графический способ.
- с помощью компьютерных программ

Решение кубических уравнений с помощью вынесение общего множителя за скобки

Алгоритм решения:

- 1. Перегруппировать члены данного уравнения
- 2. Вынести общий множитель за скобки
- 3. Получить произведение равное нулю
- 4. Решить полученные уравнения.

П р и м е р : $2x^3-7x^2+2x+3=0$

Р е ш е н и е :

Преобразуем

$2x^3-7x^2+2x+3=2x^3-2x^2-5x^2+5x-3x+3=0$

Попарно группируем и выносим общий множитель за скобку

$2x^2*(x-1)-5x*(x-1)-3*(x-1)=0$

Выносим общий множитель (x-1), получаем произведение множителей

$(x-1)*(2x^2-5x-3)=0$

$x-1=0$ $\quad$ $2x^2-5x-3=0$

$x_1=1$ $\quad$ $x_{2,3}=\frac{5\pm\sqrt{(-5)^2-4*2*(-3)}}{2*2}$

$x_2=3$ $x_3=-0,5$

О т в е т : $x_1=1$; $x_2=3$; $x_3=-0,5$

Решение кубических уравнений с помощью
деления многочлен на многочлен

Алгоритм решения:

- 1. Подобрать один корень из делителей
  свободного члена
- 2. Поделить многочлен на многочлен
- 3.Найти корни в получившемся
  квадратном уравнении

Пример: $x^3+3x^2-6x-8=0$

Решение: Рассмотрим делители свободного члена 8:(1;-1;2;-2;4;-4;8;-8).

Найдем делитель при котором уравнение превращается в верное числовое равенство.

$X=1: 1^3+3*1^2-6*1-8 \neq 0$

$X=-1: (-1)^3+3*(-1)^2-6*(-1)-8=0$

Так как кубическое уравнение можно представить в виде произведения множителей $ax^3+bx^2+cx+d=a(x-X_1)*(x-X_2)*(x-X_3)$, то разделим многочлен

x^3+3x^2-6x-8 на многочлен $(x+1)$

$$
\begin{array}{r|l}
-\,x^3+3x^2-6x-8 & x+1 \\
\cline{2-2}
x^3+x^2 \phantom{{}-6x-8} & x^2+2x-8 \\
\cline{1-1}
-\,2x^2-6x \phantom{{}-8} & \\
2x^2+2x \phantom{{}-8} & \\
\cline{1-1}
-\,-8x-8 & \\
-8x-8 & \\
\cline{1-1}
0 &
\end{array}
$$

получаем (x^2+2x-8)

$x^3+3x^2-6x-8=(x+1)(x^2+2x-8)$

$x^2+2x-8=0$

$D=2^2-4*1*(-8)=36$

$x_{1,2}=\frac{4\pm\sqrt{36}}{2*1}$

$X_2=2$

$X_3=-4$

О т в е т : $x_1=-1$; $x_2=2$; $x_3=-4$

Решение кубических уравнений с помощью формулы Кардано

Алгоритм решения:

- 1. Свести уравнение к каноническому виду (добавить кононич. вид)
- 2. Расчет корней по специальной формуле (добавить формулу)

$x^3 + ax^2 + bx + x = 0$,

где a, b, c - постоянные коэффициенты, а x - переменная.

Произведем замену $x = t - \frac{a}{3}$

Получим канонический вид:

$t^3+pt+q=0$, где

$p = (-\frac{a^2}{3} + b)$

$q = \frac{2a^3}{27} - \frac{ab}{3} + c = 0$

$t = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{Q}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{Q}}$, где $Q = (\frac{q}{2})^2 + (\frac{p}{3})^3$

Q<0 - 3 корня

Q=0 - 2 корня

Q>0 - 1 корень

Делаем обратную замену

$x = t - \frac{a}{3}$

$x = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{Q}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{Q}} - \frac{a}{3}$

Пример: $x^3+4x^2+6x+3=0$

Решение: Выполним замену $x = t - \frac{4}{3}$, получим уравнение $t^3 + \frac{2}{3}t - \frac{7}{27} = 0$

найдем значение выражения $\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} = \frac{81}{27^2 * 4}$, тогда

$t = \sqrt[3]{\frac{7}{54} + \sqrt{\frac{81}{27^2 * 4}}} + \sqrt[3]{\frac{7}{54} - \sqrt{\frac{81}{27^2 * 4}}} = \sqrt[3]{\frac{8}{27}} - \sqrt[3]{\frac{1}{27}} = \frac{2}{3} - \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$, тогда $x = \frac{1}{3} - \frac{4}{3} = -1$.

Других действительных корней нет

Ответ: $x_1=-1$

Решение кубических уравнений с помощью теоремы Виета

Алгоритм решения:

- 1. Подобрать корни, удовлетворяющие системе

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$$

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3=-b/a \\ x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1=c/a \\ x_1x_2x_3=-d/a \end{cases}$$

,где x_1, x_2, x_3 – корни уравнения

Не очень хорошо стоят индексы 1,2,3

Пример: $x^3-9x^2+26x-24=0$

Решение: Подбираем корни:

$$\begin{cases} x1 + x2 + x3 = 9 \\ x1 * x2 + x2 * x3 + x1 * x3 = 26 \\ x1 * x2 * x3 = 24 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2 + 3 + 4 = 9 \\ 2 * 3 + 3 * 4 + 4 * 2 = 26 \\ 2 * 3 * 4 = 24 \end{cases}$$

Ответ: $x_1=2$; $x_2=3$; $x_3=4$

Решение кубических уравнений с помощью схемы Горнера

Алгоритм решения:

- 1. По схеме Горнера найти корень уравнения
- 2. Решить получившееся квадратное уравнение

Если $f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_{n-1}x+a^n$, $a_0\neq0$, $g(x)=x-c$, то при делении ***f(x)*** на ***g(x)*** частное ***q(x)*** имеет вид $q(x)=b_0x^{n-1}+b_1x^{n-2}+\ldots+b_{n-2}x+b^{n-1}$, где $b_0=a_0$, $b_k=c.b_{k-1}+a_k$,$k=1\ 2\ ,\ldots\ n-1$. Остаток ***r*** находится по формуле $r=c\ .\ b_{n-1}+a_n$

	a_0	a_1	a_2	...	a_n-1	a_n
x = c	$b_0=a_0$	$b_1=c*b_0+a_1$	$b_2=c*b_1+a_2$	...	$b_{n-1}=c*b_{n-2}+a_{n-1}$	$r=f(c)=c*b_{n-1}+a_n$

В первой строке этой таблицы записывают коэффициенты многочлена ***f(x)***. Если какая-то степень переменной отсутствует, то в соответствующей клетке таблицы пишется 0. Всегда **старший** коэффициент частного равен старшему коэффициенту делимого $b0=a0$. Если ***x = c*** является корнем многочлена, то в последней клетке получается 0, т.е. остаток от деления будет равен нулю.

Пример: Решить уравнение $x^3-x^2-8x+12=0$

Решение: Находим делители свободного члена 12: ±1; ±2; ±3; ±4; ±6; ±12. используя схему Горнера, найдем целые корни уравнения:

	$a_0=1$	$a_1=-1$	$a_2=-8$	$a_3=12$	
x = 1	1	0	-8	4	не корень
x = -1	1	-2	-6	18	не корень
x = 2	***1***	***1***	***- 6***	***0***	***корень***

$x^2+x-6=0$

$x_1=2$; $x_2=3$

Ответ: $x_1=2$; $x_2=3$

Решение возвратных кубических уравнений

Алгебраическое уравнение вида: $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 = 0$ называется возвратным, если его коэффициенты, стоящие на симметричных относительно середины позициях, равны, то есть если $a_{n-k} = a_k$, при k = 0, 1, …, n.

Алгоритм решения:

- 1. Корнем уравнения является x=-1
- 2. Поделить многочлен на многочлен
- 3. Найти корни в получившемся квадратном уравнении

Пример: $x^3-2x^2-2x+1=0$

Решение: $x_1=-1$, по правилу нечётных степеней для возвратного уравнения.

$x^3-2x^2-2x+1=(x+1)(x^2-3x+1)$

$x_2=\frac{3+\sqrt{5}}{2}$

$x_3=\frac{3-\sqrt{5}}{2}$

Ответ: $x_1=-1$; $x_2=\frac{3+\sqrt{5}}{2}$; $x_3=\frac{3-\sqrt{5}}{2}$

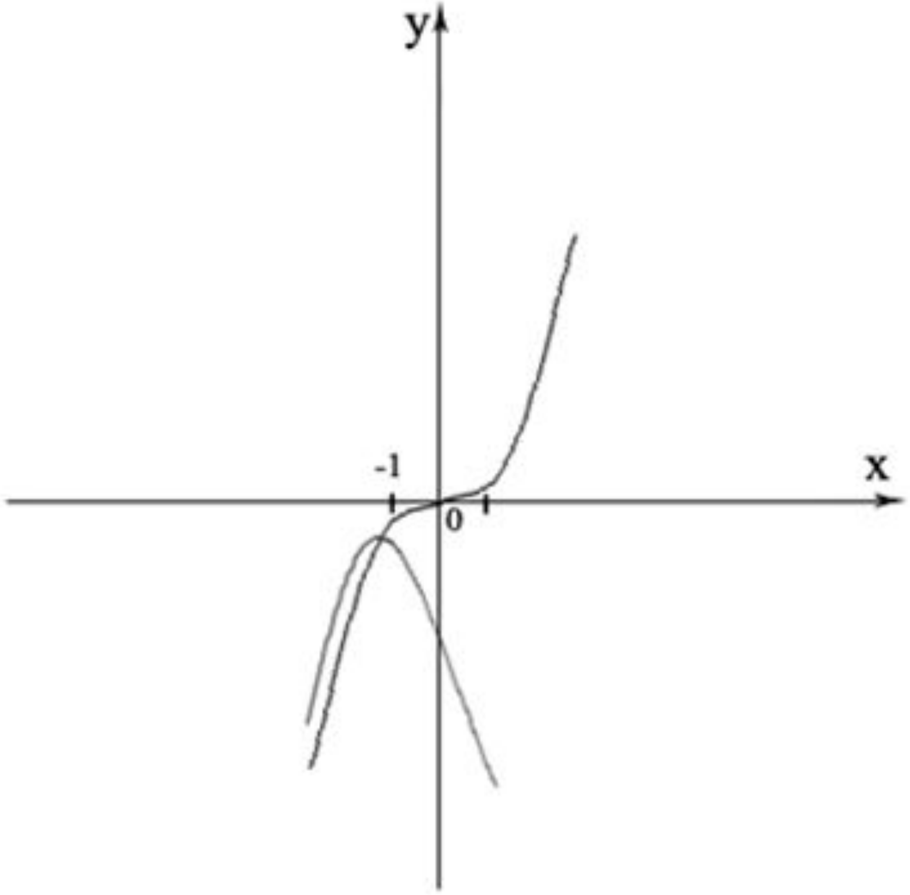
Графический способоб решения кубических уравнений

Алгоритм решения:

- 1. Разбить кубическое уравнение на два уравнения
- 2. Построить графики функций стоящих в левой и правой частях уравнения
- 3. Абсциссы точек пересечения графиков – корни заданного уравнения

П р и м е р : $x^3+4x^2+6x+3=0$

Р е ш е н и е : Преобразуем уравнение $x^3= -4x^2-6x-3$. Построим графики функций $y=x^3$ и $y=-4x^2-6x-3$



О т в е т : $x_1=-1$

Старинные задачи, связанные с кубическими уравнениями

Задача Шлёмильха

Шлемильх Оскар (1832-1901)известный немецкий математик, имя которого связано с выражением остаточного члена ряда Тейлора; автор весьма полезного двухтомного курса по математике.

Задача. Решите кубическое уравнение

$$x^3 + ax^2 + bx + c = 0,$$

если его корни составляют:

а) арифметическую прогрессию;

б) геометрическую прогрессию.

Решение. Известно, что между корнями и коэффициентами кубического уравнения существует следующая зависимость (формулы Виета):

$$\begin{cases} a = -(x_1 + x_2 + x_3), & (1) \\ b = x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3, & (2) \\ c = -x_1x_2x_3. & (3) \end{cases}$$

а) Если корни уравнения составляют арифметическую прогрессию, то имеем дополнительное условие:

$$x_1 - x_2 = x_3 - x_4 . \qquad (4)$$

Тогда из (1) и (4) следует: $x_2 = -\dfrac{a}{3}$;

из (1) и (3): $x_1 + x_3 = -\dfrac{2}{3}a$; $\qquad x_1x_3 = \dfrac{3c}{a}$,

откуда $x_1 = -\dfrac{a}{3} + \dfrac{1}{3}\sqrt{\dfrac{a^3 - 27c}{a}}$, $\qquad x_3 = -\dfrac{a}{3} - \dfrac{1}{3}\sqrt{\dfrac{a^3 - 27c}{a}}$.

Если подставить найденные корни в (2), то получится условие, которому должны удовлетворять коэффициенты для того, чтобы кубическое уравнение имело корни, представляющие арифметическую прогрессию: $\dfrac{2a^3 - 27c}{9a} = b$

.

Обратно, если имеется указанная связь между коэффициентами кубического уравнения, то его корни будут членами арифметической прогрессии.