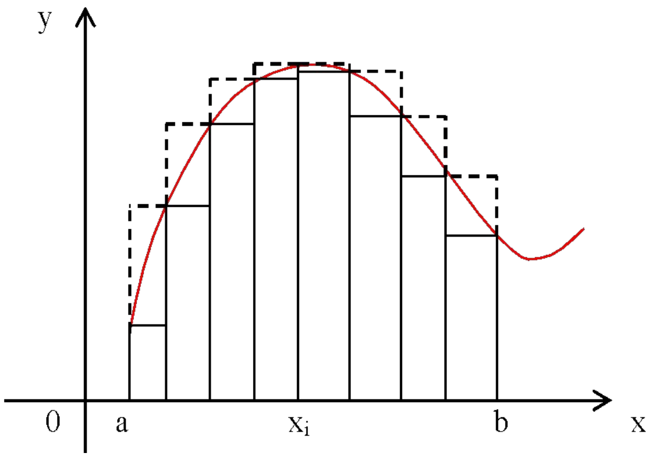
Определенный интеграл



Пусть на отрезке [a, b] задана ограниченная функция вида $y = f(x)$

$a \le x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1} < x_n \le b$;

$x_1 - x_0 = \Delta x_1,\ x_2 - x_1 = \Delta x_2, \ldots ,\ x_n - x_{n-1} = \Delta x_n,$

$d = \max\limits_i \Delta x_n, \quad x_{i-1} \le \varepsilon_i \le x_i, \quad i = \overline{1;n},$

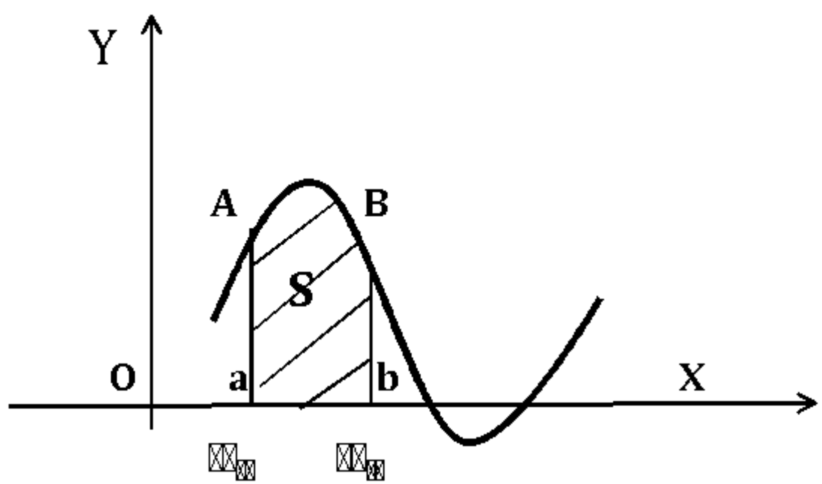
Обозначим

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} f(\varepsilon_i)\Delta x_i$$

- Если при $d \to 0$ существует конечный предел *интегральной суммы* S_n, который не зависит ни от вида разбиений области $[a; b]$ на части Δx_i, ни от способа выбора точек ε_i на каждом отрезке $[x_{i-1}; x_i]$, $i = \overline{1;n}$, то он называется ***определённым интегралом от функции f (x) по отрезку*** $[\boldsymbol{a}; \boldsymbol{b}]$ и обозначается

Определённый интеграл

[illegible] = [illegible] = [illegible] − [illegible] = [illegible]



S – *число, равное площади криволинейной трапеции* [illegible] *,*
«стоящей» на отрезке [illegible] *оси OX, и « накрытой » сверху дугой* [illegible]
кривой подынтегральной функции [illegible] = [illegible].

Свойства определенного интеграла

- $\int_a^b Af(x)dx = A\int_a^b f(x)dx;$ $\quad \int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$ $\quad \int_a^a f(x)dx = 0$
- Для произвольных чисел a, b, c справедливо равенство:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

- Если f(x) ≤ ϕ(x) на отрезке [a, b] a < b, то $\int_a^b f(x)dx \le \int_a^b \varphi(x)dx$
- $\int_a^b (f_1(x) \pm f_2(x))dx = \int_a^b f_1(x)dx \pm \int_a^b f_2(x)dx$

Формула Ньютона – Лейбница

Если функция F(x) – какая- либо первообразная от непрерывной функции f(x), т. е. $F'(x) = f(x)$, то

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

<u>Пример</u>

$$\int_{2/3}^{10/3} \frac{xdx}{(3x-1)\sqrt{3x-1}} = \left\{ \begin{matrix} 3x-1 = t^2, & dx = \dfrac{2}{3}tdt \\ x = \dfrac{1}{3}(t^2+1), & \end{matrix} \right\} =$$

$$= \int_1^3 \frac{\frac{1}{3}(t^2+1)\cdot\frac{2}{3}tdt}{t^2\cdot t} = \frac{2}{9}\int_1^3 \left(1+\frac{1}{t^2}\right)dt = \frac{2}{9}\left(t-\frac{1}{t}\right)\Bigg|_1^3 = \frac{16}{27}.$$

Формула интегрирования по частям

для определенного интеграла

$$\int_a^b u\,dv = uv\Big|_a^b - \int_a^b v\,du.$$

Пример

$$\int_1^e \ln^2 x\,dx = \left\{\begin{matrix} u = \ln^2 x, & du = 2\ln x\dfrac{dx}{x}, \\ dv = dx, & v = x, \end{matrix}\right\} = x\ln^2 x\Big|_1^e - 2\int_1^e \ln x\,dx =$$

$$= \left\{\begin{matrix} u = \ln x, & du = \dfrac{dx}{x}, \\ dv = dx, & v = x, \end{matrix}\right\} = e\ln^2 e - \ln^2 1 - 2(x\ln x - x)\Big|_1^e =$$

$$= e - 2e\ln e + 2e - 2 = e - 2.$$

Тема 4. Приложения определённого интеграла в геометрии.

1. Вычисление длины дуги плоской кривой.

- Пусть дуга $\breve{AB}$ кривой $y = f(x)$ на отрезке $[a; b]$, $a = x_A$, $b = x_B$, гладкая, т. е. производная $y' = f'(x)$ непрерывна при $x \ni [a; b]$. В этом случае длина дуги $\breve{AB}$ вычисляется по формуле

$$L = \left|\breve{AB}\right| = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\; dx.$$

- Если кривая $\breve{AB}$ задана параметрическими уравнениями $x = \varphi\,(t)$, $y = \Psi(t)$ и производные $\varphi'(t)$ и $\Psi'(t)$ непрерывны, то длина дуги $\breve{AB}$

$$L = \left|\breve{AB}\right| = \int_{t_A}^{t_B} \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2}\; dt.$$

- В случае, когда гладкая кривая $\breve{AB}$ задана в полярных координатах уравнением $\rho = \rho(\varphi)$, применяется формула

[illegible]

Вычисление длины дуги плоской кривой, заданно в декартовых координатах.

П р и м е р 1. Вычислить длину дуги полукубической параболы

Р е ш е н и е. По условию $y = \sqrt{x^3} \iff y = x^{3/2} \Rightarrow y' = \dfrac{3x^{1/2}}{2} \Rightarrow$

$$\boxed{l} = \int_a^b \sqrt{1 + \left(y'(x)\right)^2}\,dx = \int_0^{4/3} \sqrt{1 + \left(\frac{3}{2}x^{1/2}\right)^2}\,dx =$$

$$= \int_0^{4/3} \sqrt{1 + \frac{9}{4}x}\,dx = \left\{ \begin{array}{ll} t = 1 + \frac{9}{4}x, & dt = \frac{9}{4}dx \\ t\big|_{x=0} = 1, & t\big|_{x=4/3} = 4 \end{array} \right\} = \int_1^4 \sqrt{t}\cdot\frac{4}{9}\,dt =$$

$$= \frac{4}{9}\int_1^4 t^{1/2}\,dt = \frac{4}{9}\cdot\frac{2}{3}\left(t^{3/2}\right)\Big|_1^4 = \frac{8}{27}\left(\sqrt{t^3}\right)\Big|_1^4 = \frac{8}{27}\left(\sqrt{4^3} - \sqrt{1^3}\right) =$$

$$= \frac{8}{27}\left(2^3 - 1\right) = \frac{8}{27}\cdot(8 - 1) = \frac{8}{27}\cdot 7 = \frac{56}{27} = \boxed{2\frac{2}{27}}.$$

О т в е т: $l = 2\dfrac{2}{27}$ (*ед. дл.*)

Вычисление длины дуги плоской кривой, заданной параметрически .

П р и м е р 2. Вычислить длину дуги астроиды

$$x = 2\cos^3 t,\quad y = 2\sin^3 t \quad \text{от } 0 \text{ до } \frac{\pi}{2}.$$

Р е ш е н и е.

$$\sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2} = \sqrt{36\ cos^4 t\, sin^2 t + 36\, sin^4 t\ cos^2 t} =$$

$$= \sqrt{36\ cos^2 t\ sin^2 t\ (\,cos^2 t + sin^2 t)} = \|\, cos^2 t + sin^2 t = 1\| =$$

$$= \sqrt{36\ cos^2 t\ sin^2 t} = 6\cos t \qquad =>$$

$$\boxed{L} = \int_{t_A}^{t_B} \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2}\ dt. =$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} 6\cos t \sin t\ \ dt = \ \|2\cos t \sin t = \sin(2t)\,\| = 3\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\,(2\,t\,)\ \ dt =$$

$$= -\frac{3}{2}\ [cos\,(2\,t\,)]_0^{\pi/2} = -\frac{3}{2}(\cos\pi - \cos 0) = -\frac{3}{2}\ (-1-1) = -\frac{3}{2}\ (-2) = \boxed{3}$$

О т в е т: $\quad L = 3\ (\text{ед. дл.})$

Вычислить длину дуги кривой в полярных координатах

Пример 3. Вычислить длину дуги кривой $\rho = 4cos^3 \frac{\varphi}{3}$ от 0 до $\frac{3\pi}{2}$.

Решение. $\sqrt{[\rho(\varphi)]^2 + [\rho'(\varphi)]^2} = \sqrt{\left[4cos^3 \frac{\varphi}{3}\right]^2 + \left[-4\ cos^2 \frac{\varphi}{3}\ \ sin \frac{\varphi}{3}\right]^2} =$

$$= \sqrt{16cos^6 \frac{\varphi}{3} + 16\,cos^4 \frac{\varphi}{3} sin^2 \frac{\varphi}{3}} = \sqrt{16\ \ cos^4 \frac{\varphi}{3}\left(cos^2 \frac{\varphi}{3} + sin^2 \frac{\varphi}{3}\right)} =$$

$$= \sqrt{16\ \ cos^4 \frac{\varphi}{3}} = 8\ cos^2 \frac{\varphi}{3}.$$

$$\boxed{L} = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \sqrt{[\rho(\varphi)]^2 + [\rho'(\varphi)]^2}\, d\varphi = \int_0^{3\pi/2} 8\ cos^2 \frac{\varphi}{3}\, d\varphi =$$

$$= \left| 2\,cos^2 \frac{\alpha}{2} = 1 + cos\,\alpha \right| = 4 \int_0^{3\pi/2} \left(1 + cos \frac{2\varphi}{3}\right) d\varphi =$$

$$= 4\left(\varphi + \frac{3}{2} sin \frac{2\varphi}{3}\right)\Bigg|_0^{3\pi/2} = 4\left(\left(\frac{3\pi}{2} + \frac{3}{2} sin\,\pi\right) - \left(0 + \frac{3}{2} sin\,0\right)\right) =$$

$$= \left| sin\,\pi = 0,\quad sin\,0 = 0 \right| = \frac{4}{1} \cdot \frac{3\pi}{2} = \boxed{6\pi}$$

Ответ: $L = 6\pi$ (ед. дл.)

2. Вычисление площадей плоских фигур.

- Площадь криволинейной трапеции, ограниченной отрезком $[a; b]$ оси Ох, кривой $y = f(x)$, $f(x) \geq 0$ при $x \ni [a; b]$, и прямыми $x = a$ и $x = b$, вычисляется по формуле

$$S = \int_a^b f(x)\,dx.$$

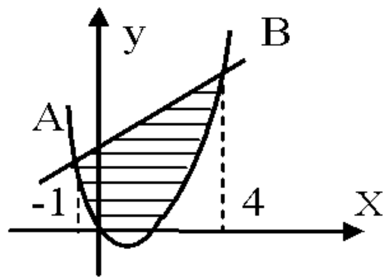
- Площадь фигуры, , ограниченной кривыми $y = f(x)$ и $y = \varphi(x)$, $f(x) \geq \varphi(x)$ при $x \ni [a; b]$, и прямыми $x = a$ и $x = b$, определяется по формуле

$$S = \int_a^b [f(x) - \varphi(x)]\,dx.$$

- Площадь криволинейного сектора, ограниченного кривой, заданной в полярных координатах уравнением $\rho = \rho(\varphi)$ и двумя полярными лучами $\varphi = b$ и $\varphi = \beta$, $\alpha < \beta$, определяется интегралом

$$S = \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta \rho^2(\varphi)\,d\varphi.$$

П р и м е р . Вычислить площадь фигуры, ограниченной параболой $3y = 2x^2 - 4x$ пряиой $2x - 3y + 8 = 0$



Р е ш е н и е.

Воспользуемся соответствующей формулой

Абсциссы точек А и В найдём из системы

$$\left.\begin{aligned} 2x^2 - 4x &= 3y \\ 2x + 8 &= 3y \end{aligned}\right\}$$

Вычитая из 1- го уравнения 2- ое получим $2x^2 - 6x - 8 = 0$ $\Leftrightarrow$ $x^2 - 3x - 4 = 0$ $\Rightarrow$ $x_A = -1,\ x_B = 4$ $\Rightarrow$

$$\boxed{S} = \int_a^b \left(f_2(x) - f_1(x)\right)dx = \int_{-1}^{4}\left(\frac{2x+8}{3} - \frac{2x^2-4x}{3}\right)dx =$$

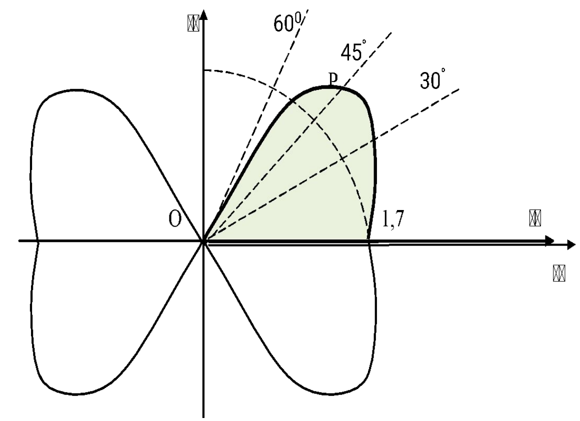
$$= -\frac{1}{3}\int_{-1}^{4}\left(2x^2 - 6x - 8\right)dx = -\frac{1}{3}\left(\frac{2x^3}{3} - 3x^2 - 8x\right)\Bigg|_{-1}^{4} = -\frac{1}{3}\left(\left(\frac{2\cdot 4^3}{3} - 3\cdot 4^2 - 8\cdot 4\right) -\right.$$

$$\left. - \left(\frac{2(-1)^3}{3} - 3(-1)^2 - 8(-1)\right)\right) = -\frac{1}{3}\left(\frac{128}{3} - 48 - 32 + \frac{2}{3} + 3 - 8\right) = \frac{125}{9} = \boxed{13\frac{8}{9}}$$

О т в е т: $S = 13\frac{8}{9}$ (ед. пл.)

П р и м е р . Вычислить площадь фигуры, ограниченной кривой, заданной в полярных координатах уравнением $\rho = \dfrac{\sqrt{4\cos^2\varphi - 1}}{\cos^2\varphi}$ (см. рис.)

Р е ш е н и е.



$$S = \int_{\alpha}^{\beta} \rho^2(\varphi)\, d\varphi = 4 \cdot \frac{1}{2} \int_0^{\pi/3} \left(\frac{\sqrt{4cos^2\varphi - 1}}{cos^2\varphi} \right)^2 d\varphi =$$

$$2 \int_0^{\pi/3} \frac{4cos^2\varphi - 1}{cos^4\varphi}\, d\varphi.$$ Так как

$$\int \frac{4\cos^2\varphi - (\sin^2\varphi + \cos^2\varphi)}{\cos^4\varphi}\, d\varphi = \int \frac{3\cos^2\varphi - \sin^2\varphi}{\cos^4\varphi}\, d\varphi =$$

$$= \int \left(\frac{3}{cos^2\varphi} - \frac{tg^2\varphi}{cos^2\varphi} \right) d\varphi = 3tg\,\varphi + \frac{tg^3\varphi}{3} + c,$$ где

$$\int \frac{tg^2\varphi}{cos^2\varphi}\, d\varphi = \left\| \begin{matrix} u = tg\,\varphi \\ du = \dfrac{d\varphi}{cos^2\varphi} \end{matrix} \right\| = \int u^2\, du = \frac{u^3}{3} + c = \frac{tg^3\varphi}{3} + c,$$ имеем

$$S = 2\left[3tg\,\varphi - \frac{tg^3\varphi}{3}\right]_0^{\pi/3} = 2\left[\left(3tg\,\frac{\pi}{3} - \frac{tg^3\frac{\pi}{3}}{3}\right) - \left(3\,tg\,0 - \frac{tg^3 0}{3}\right)\right] =$$

$$= 2\left[\left(3 \cdot \sqrt{3} - \frac{\left(\sqrt{3}\right)^3}{3}\right) - \left(3 \cdot 0 - \frac{0^3}{0}\right)\right] = 2\left(3\sqrt{3} - \frac{3\sqrt{3}}{3}\right) = \boxed{4\sqrt{3}}$$

О т в е т: $S = 4\sqrt{3} \approx 6.92$ (*ед. площади*)

4. Вычисление объёмов тел вращения.

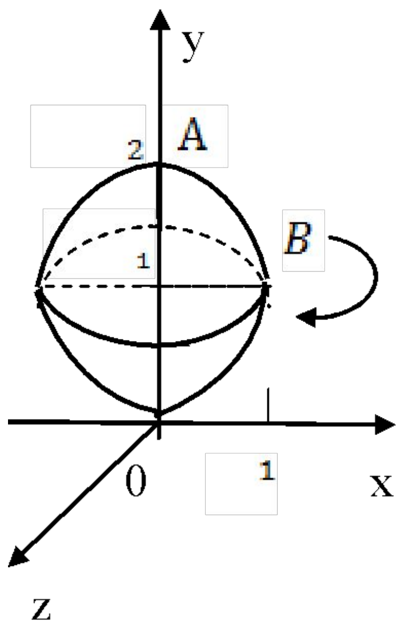
Объёмы тел, полученных вращением вокруг оси *Ox* криволинейных трапеций, вычисляются соответственно по формулам

[illegible],

[illegible]

З а м е ч а н и е. В силу равноправности переменных в декартовой системе координат в рассуждениях x и y можно поменять местами и вместо [illegible] рассматривать [illegible]. Структура соответствующих формул при этом не изменится.

П р и м е р . Плоская фигура, ограниченная дугами парабол $y = x^2$ и $y = 2 - x^2$, $x \geq 0$ и прямой $y = 0$, вращается вокруг оси ординат (см. рис.). Вычислить объём тела, которое при этом получается.



Р е ш е н и е.

Данная фигура ОВАО состоит из двух равновеликих трапеций, ограниченных дугами

ОВ: $x = \sqrt{y}$ и ВА: $x = \sqrt{2 - y}$ =>

$$\boxed{V} = 2\pi \int_c^d [f(y)]^2\, dy = 2\pi \int_0^1 \left[\sqrt{y}\right]^2 dy =$$

$$= 2\pi \int_0^1 y\, dy = \boxed{2\pi}$$

О т в е т: $V = 2\pi \approx 6.28$ (ед. объёма)