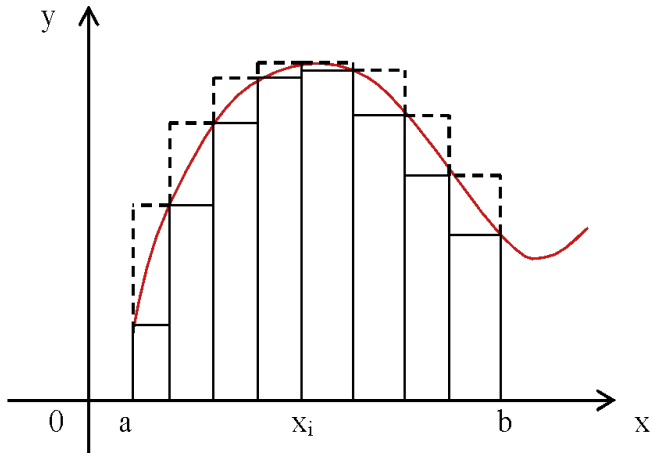


Определенный интеграл



Пусть на отрезке $[a, b]$ задана ограниченная функция вида $y = f(x)$

$$a \leq x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < x_n \leq b;$$

$$x_1 - x_0 = \Delta x_1, \quad x_2 - x_1 = \Delta x_2, \dots, \quad x_n - x_{n-1} = \Delta x_n,$$

$$d = \max_i \Delta x_n, \quad x_{i-1} \leq \varepsilon_i \leq x_i, \quad i = \overline{1; n},$$

Обозначим

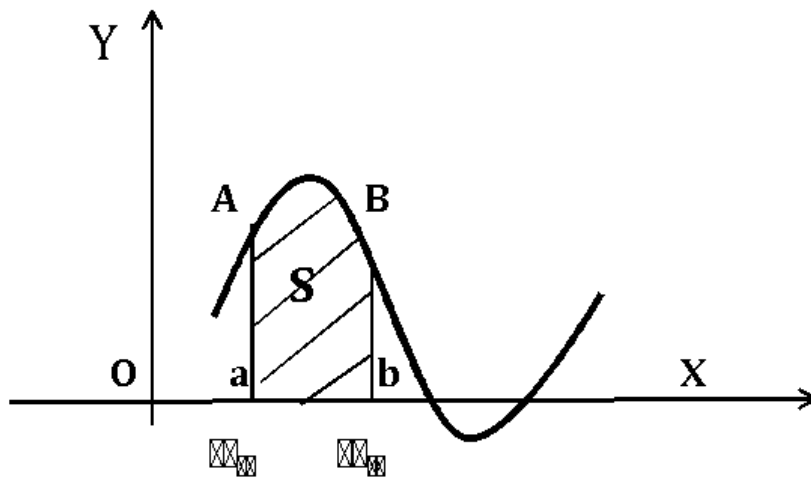
$$S_n = \sum_{i=1}^n f(\varepsilon_i) \Delta x_i$$

- Если при $d \rightarrow 0$ существует конечный предел *интегральной суммы* S_n , который не зависит ни от вида разбиений области $[a; b]$ на части Δx_i , ни от способа выбора точек ε_i на каждом отрезке $[x_{i-1}; x_i]$, $i = \overline{1; n}$, то он называется **определённым интегралом от функции $f(x)$ по отрезку $[a; b]$** и обозначается

$$\begin{array}{c} \text{XXXXXX} \text{X} \text{XX} \text{X} \\ \text{XX} \text{X} \end{array} = \begin{array}{c} \text{X} \text{XXXXXX} \text{XXXX} \\ \text{X} \end{array}$$

Определённый интеграл

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a) = \Delta F$$



S – число, равное площади криволинейной трапеции Δ , «стоящей» на отрезке ab оси OX , и «накрытой» сверху дугой AB кривой подынтегральной функции $y = f(x)$.

Свойства определенного интеграла

- $\int_a^b Af(x) dx = A \int_a^b f(x) dx;$ $\int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx$ $\int_a^a f(x) dx = 0$

- Для произвольных чисел a, b, c справедливо равенство:

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$$

- Если $f(x) \leq \phi(x)$ на отрезке $[a, b]$ $a < b$, то $\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b \phi(x) dx$

- $\int_a^b (f_1(x) \pm f_2(x)) dx = \int_a^b f_1(x) dx \pm \int_a^b f_2(x) dx$

Формула Ньютона – Лейбница

Если функция $F(x)$ – какая-либо первообразная от непрерывной функции $f(x)$, т. е. $F'(x) = f(x)$, то

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

Пример

$$\int_{\frac{2}{3}}^{\frac{10}{3}} \frac{xdx}{(3x-1)\sqrt{3x-1}} = \left\{ \begin{array}{l} 3x-1 = t^2, \quad dx = \frac{2}{3}tdt \\ x = \frac{1}{3}(t^2+1), \end{array} \right\} =$$
$$= \int_1^3 \frac{\frac{1}{3}(t^2+1) \cdot \frac{2}{3}tdt}{t^2 \cdot t} = \frac{2}{9} \int_1^3 \left(1 + \frac{1}{t^2}\right) dt = \frac{2}{9} \left(t - \frac{1}{t} \right) \Big|_1^3 = \frac{16}{27}.$$

**Формула интегрирования по частям
для определенного интеграла**

$$\int_a^b u dv = uv \Big|_a^b - \int_a^b v du.$$

Пример

$$\int_1^e \ln^2 x dx = \left\{ \begin{array}{l} u = \ln^2 x, \quad du = 2 \ln x \frac{dx}{x}, \\ dv = dx, \quad v = x, \end{array} \right\} = x \ln^2 x \Big|_1^e - 2 \int_1^e \ln x dx =$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} u = \ln x, \quad du = \frac{dx}{x}, \\ dv = dx, \quad v = x, \end{array} \right\} = e \ln^2 e - \ln^2 1 - 2(x \ln x - x) \Big|_1^e =$$

$$= e - 2e \ln e + 2e - 2 = e - 2.$$

Тема 4. Приложения определённого интеграла в геометрии.

1. Вычисление длины дуги плоской кривой.

- Пусть дуга \widetilde{AB} кривой $y = f(x)$ на отрезке $[a; b]$, $a = x_A$, $b = x_B$, гладкая, т. е. производная $y' = f'(x)$ непрерывна при $x \in [a; b]$. В этом случае длина дуги \widetilde{AB} вычисляется по формуле

$$L = |\widetilde{AB}| = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx.$$

- Если кривая \widetilde{AB} задана параметрическими уравнениями $x = \varphi(t)$, $y = \Psi(t)$ и производные $\varphi'(t)$ и $\Psi'(t)$ непрерывны, то длина дуги \widetilde{AB}

$$L = |\widetilde{AB}| = \int_{t_A}^{t_B} \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2} dt.$$

- В случае, когда гладкая кривая \widetilde{AB} задана в полярных координатах уравнением $\rho = \rho(\varphi)$, применяется формула

$$\int \rho^2 d\varphi = \int \rho^2 \sqrt{1 + \left(\frac{d\rho}{d\varphi}\right)^2} d\varphi.$$

Вычисление длины дуги плоской кривой, заданно в декартовых координатах.

Пример 1. Вычислить длину дуги полукубической параболы

Решение. По условию $x = \xi \sqrt[3]{\eta}$ $\Leftrightarrow x = \xi^3 \eta^2 \Rightarrow \xi' = \frac{3\xi^2 \eta^2}{2} \Rightarrow$

$$\begin{aligned}
 \sqrt{dx^2 + dy^2} &= \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx = \sqrt{1 + \left(\frac{3}{2} \frac{\xi^2 \eta^2}{\xi^3 \eta^2}\right)^2} dx = \\
 &= \sqrt{1 + \frac{9}{4} \frac{\xi^2 \eta^2}{\xi^6 \eta^4}} dx = \sqrt{1 + \frac{9}{4} \frac{1}{\xi^4 \eta^2}} dx = \sqrt{1 + \frac{9}{4} \frac{1}{\xi^4 \eta^2}} \xi^3 \eta^2 d\xi = \\
 &= \frac{4}{9} \xi^4 \eta^2 d\xi = \frac{4}{9} \xi^4 \frac{2}{3} \xi^3 \eta^2 d\xi = \frac{8}{27} \xi^7 \eta^2 d\xi = \frac{8}{27} \xi^7 \sqrt[3]{4^3 - \xi^3} d\xi = \\
 &= \frac{8}{27} \left[2^3 - 1 \right] = \frac{8}{27} [8 - 1] = \frac{8}{27} \cdot 7 = \frac{56}{27} = \boxed{2 \frac{2}{27}}.
 \end{aligned}$$

Ответ: $l = 2 \frac{2}{27}$ (ед. дл.)

Вычисление длины дуги плоской кривой, заданной параметрически .

Пример 2. Вычислить длину дуги астроида

$$x = 2 \cos^3 t, \quad y = 2 \sin^3 t \quad \text{от } 0 \text{ до } \frac{\pi}{2}.$$

Решение.

$$\begin{aligned} \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2} &= \sqrt{36 \cos^4 t \sin^2 t + 36 \sin^4 t \cos^2 t} = \\ &= \sqrt{36 \cos^2 t \sin^2 t (\cos^2 t + \sin^2 t)} = \|\cos^2 t + \sin^2 t = 1\| = \\ &= \sqrt{36 \cos^2 t \sin^2 t} = 6 \cos t \sin t \quad \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} L &= \int_{t_A}^{t_B} \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2} dt = \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} 6 \cos t \sin t dt = \|2 \cos t \sin t = \sin(2t)\| = 3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(2t) dt = \\ &= -\frac{3}{2} [\cos(2t)]_0^{\pi/2} = -\frac{3}{2} (\cos \pi - \cos 0) = -\frac{3}{2} (-1 - 1) = -\frac{3}{2} (-2) = \boxed{3} \end{aligned}$$

Ответ: $L = 3$ (ед. дл.)

Вычислить длину дуги кривой в полярных координатах

Пример 3. Вычислить длину дуги кривой $\rho = 4\cos^3 \frac{\varphi}{3}$ от 0 до $\frac{3\pi}{2}$.

Решение.
$$\sqrt{[\rho(\varphi)]^2 + [\rho'(\varphi)]^2} = \sqrt{\left[4\cos^3 \frac{\varphi}{3}\right]^2 + \left[-4\cos^2 \frac{\varphi}{3} \sin \frac{\varphi}{3}\right]^2} =$$

$$= \sqrt{16\cos^6 \frac{\varphi}{3} + 16\cos^4 \frac{\varphi}{3} \sin^2 \frac{\varphi}{3}} = \sqrt{16\cos^4 \frac{\varphi}{3} \left(\cos^2 \frac{\varphi}{3} + \sin^2 \frac{\varphi}{3}\right)} =$$

$$= \sqrt{16\cos^4 \frac{\varphi}{3}} = 4\cos^2 \frac{\varphi}{3}.$$

$$L = \int_0^{\frac{3\pi}{2}} 4\cos^2 \frac{\varphi}{3} d\varphi = 4 \int_0^{\frac{3\pi}{2}} \cos^2 \frac{\varphi}{3} d\varphi =$$

$$= 4 \int_0^{\frac{3\pi}{2}} \frac{1 + \cos \frac{2\varphi}{3}}{2} d\varphi = 2 \int_0^{\frac{3\pi}{2}} (1 + \cos \frac{2\varphi}{3}) d\varphi =$$

$$= 2 \left[\varphi + \frac{3}{2} \sin \frac{2\varphi}{3} \right]_0^{\frac{3\pi}{2}} = 2 \left(\frac{3\pi}{2} + \frac{3}{2} \sin \pi \right) - 2 \left(0 + \frac{3}{2} \sin 0 \right) =$$

$$= 2 \left(\frac{3\pi}{2} + 0 \right) - 2 \left(0 + 0 \right) = 3\pi.$$

Ответ: $L = 6\pi$ (ед. дл.)

2. Вычисление площадей плоских фигур.

- Площадь криволинейной трапеции, ограниченной отрезком $[a; b]$ оси Ox , кривой $y = f(x)$, $f(x) \geq 0$ при $x \in [a; b]$, и прямыми $x = a$ и $x = b$, вычисляется по формуле

$$S = \int_a^b f(x) dx$$

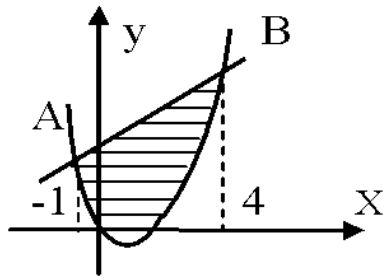
- Площадь фигуры, ограниченной кривыми $y = f(x)$ и $y = \varphi(x)$, $f(x) \geq \varphi(x)$ при $x \in [a; b]$, и прямыми $x = a$ и $x = b$, определяется по формуле

$$S = \int_a^b (f(x) - \varphi(x)) dx$$

- Площадь криволинейного сектора, ограниченного кривой, заданной в полярных координатах уравнением $\rho = \rho(\varphi)$ и двумя полярными лучами $\varphi = \alpha$ и $\varphi = \beta$, $\alpha < \beta$, определяется интегралом

$$S = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} \rho^2(\varphi) d\varphi$$

Пример. Вычислить площадь фигуры, ограниченной параболой $3y = 2x^2 - 4x$ прямой $2x - 3y + 8 = 0$



Решение.

Воспользуемся соответствующей формулой

Абсциссы точек А и В найдём из системы

$$\left. \begin{aligned} 2x^2 - 4x &= 3x \\ 2x + 8 &= 3x \end{aligned} \right\}$$

Вычитая из 1-го уравнения 2-ое получим $2x^2 - 6x - 8 = 0 \quad \Leftrightarrow$
 $x^2 - 3x - 4 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 = -1, \quad x_2 = 4 \quad \Rightarrow$

$$\begin{aligned} S &= \int_{-1}^4 (2x + 8 - (2x^2 - 4x)) dx = \int_{-1}^4 (2x + 8 - 2x^2 + 4x) dx = \\ &= -\frac{1}{3}x^3 + 6x^2 - 8x \Big|_{-1}^4 = -\frac{1}{3}x^3 + 6x^2 - 8x \Big|_{-1}^4 = -\frac{1}{3}x^3 + 6x^2 - 8x \Big|_{-1}^4 = \\ &= -\frac{2^3 - 1^3}{3} - 3(-1)^2 - 8(-1) = -\frac{128}{3} - 48 - 32 + \frac{2}{3} + 3 - 8 = \frac{125}{9} = \boxed{13\frac{8}{9}} \end{aligned}$$

Ответ: $S = 13\frac{8}{9}$ (ед.пл.)

Пример. Вычислить площадь фигуры, ограниченной кривой, заданной в полярных координатах уравнением

$$\rho = \frac{\sqrt{4\cos^2\varphi - 1}}{\cos^2\varphi} \quad (\text{см. рис.})$$

Решение.

$$S = \int_{\alpha}^{\beta} \rho^2(\varphi) d\varphi = 4 \cdot \frac{1}{2} \int_0^{\pi/3} \left(\frac{\sqrt{4\cos^2\varphi - 1}}{\cos^2\varphi} \right)^2 d\varphi =$$

$$2 \int_0^{\pi/3} \frac{4\cos^2\varphi - 1}{\cos^4\varphi} d\varphi. \quad \text{Так как}$$

$$\frac{4\cos^2\varphi - 1}{\cos^4\varphi} = \frac{3\cos^2\varphi - 1}{\cos^4\varphi} =$$

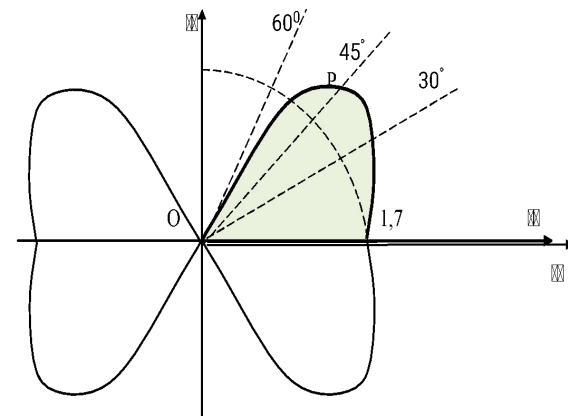
$$= \int \left(\frac{3}{\cos^2\varphi} - \frac{\operatorname{tg}^2\varphi}{\cos^2\varphi} \right) d\varphi = 3\operatorname{tg}\varphi + \frac{\operatorname{tg}^3\varphi}{3} + c, \quad \text{где}$$

$$\int \frac{\operatorname{tg}^2\varphi}{\cos^2\varphi} d\varphi = \left\| \begin{array}{l} u = \operatorname{tg}\varphi \\ du = \frac{d\varphi}{\cos^2\varphi} \end{array} \right\| = \int u^2 du = \frac{u^3}{3} + c = \frac{\operatorname{tg}^3\varphi}{3} + c, \quad \text{имеем}$$

$$S = 2 \left[3\operatorname{tg}\varphi - \frac{\operatorname{tg}^3\varphi}{3} \right]_0^{\pi/3} = 2 \left[\left(3\operatorname{tg}\frac{\pi}{3} - \frac{\operatorname{tg}^3\frac{\pi}{3}}{3} \right) - \left(3\operatorname{tg}0 - \frac{\operatorname{tg}^3 0}{3} \right) \right] =$$

$$= 2 \left[\left(3 \cdot \sqrt{3} - \frac{(\sqrt{3})^3}{3} \right) - \left(3 \cdot 0 - \frac{0^3}{3} \right) \right] = 2 \left(3\sqrt{3} - \frac{3\sqrt{3}}{3} \right) = \boxed{4\sqrt{3}}$$

О т в е т: $S = 4\sqrt{3} \approx 6.92$ (ед. площади)



4. Вычисление объёмов тел вращения.

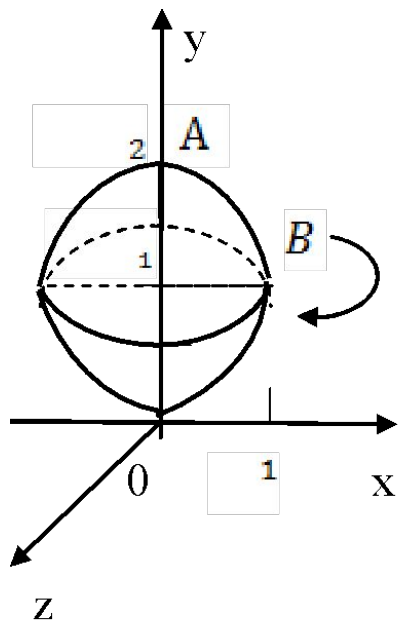
Объёмы тел, полученных вращением вокруг оси Ox криволинейных трапеций, вычисляются соответственно по формулам

$$V = \int_a^b \pi y^2 dx,$$

$$V = \pi \int_a^b (y_1^2 - y_2^2) dx$$

Замечание. В силу равноправности переменных в декартовой системе координат в рассуждениях x и y можно поменять местами и вместо $\int_a^b \pi y^2 dx$ рассматривать $\int_a^b \pi x^2 dy$. Структура соответствующих формул при этом не изменится.

Пример. Плоская фигура, ограниченная дугами парабол $y = x^2$ и $y = 2 - x^2$, $x \geq 0$ и прямой $y = 0$, вращается вокруг оси ординат (см. рис.). Вычислить объём тела, которое при этом получается.



Решение.

Данная фигура ОВАО состоит из двух равновеликих трапеций, ограниченных дугами

$$\text{ОВ: } x = \sqrt{y} \quad \text{и} \quad \text{ВА: } x = \sqrt{2 - y} \quad \Rightarrow$$

$$V = 2\pi \int_c^d [f(y)]^2 dy = 2\pi \int_0^1 [\sqrt{y}]^2 dy =$$

$$= 2\pi \int_0^1 y dy = 2\pi$$

Ответ: $V = 2\pi \approx 6.28$ (ед. объёма)