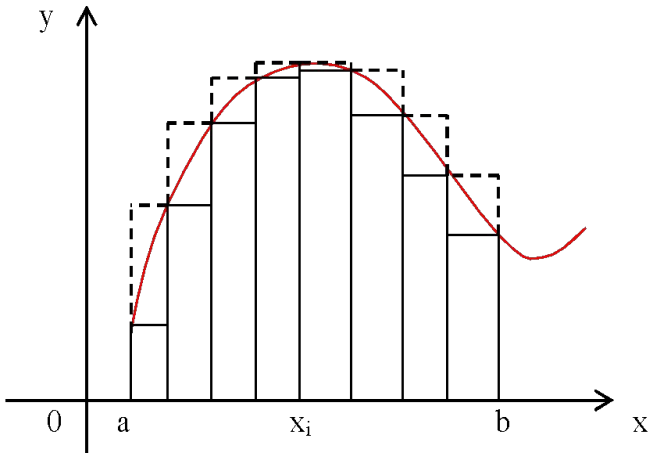
Определенный интеграл



Пусть на отрезке [a, b] задана ограниченная функция вида $y = f(x)$

$a \leq x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1} < x_n \leq b;$

$x_1 - x_0 = \Delta x_1,\ x_2 - x_1 = \Delta x_2, \ldots,\ x_n - x_{n-1} = \Delta x_n,$

$d = \max_i \Delta x_n, \quad x_{i-1} \leq \varepsilon_i \leq x_i, \quad i = \overline{1;n},$

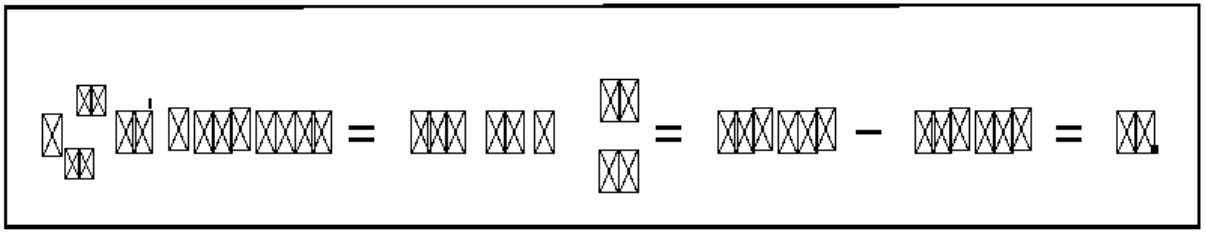
Обозначим

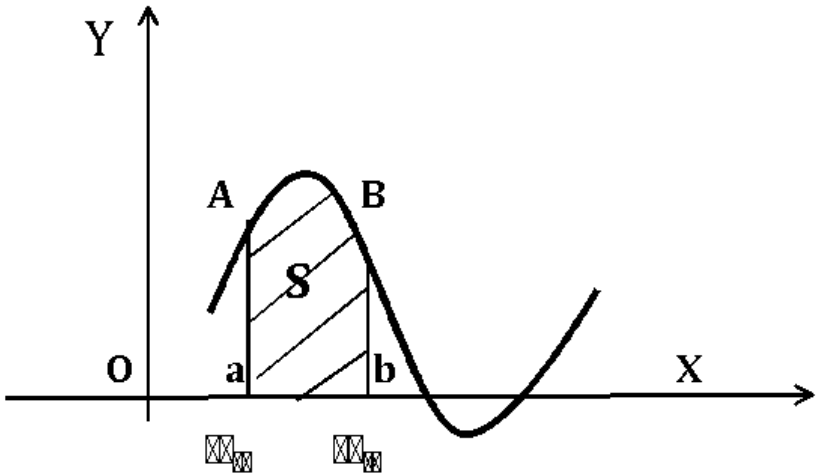
$$S_n = \sum_{i=1}^{n} f(\varepsilon_i)\Delta x_i$$

- Если при $d \to 0$ существует конечный предел *интегральной суммы* S_n, который не зависит ни от вида разбиений области $[a; b]$ на части Δx_i, ни от способа выбора точек ε_i на каждом отрезке $[x_{i-1}; x_i]$, $i = \overline{1;n}$, то он называется ***определённым интегралом от функции f (x) по отрезку*** $[a; b]$ и обозначается

[illegible]

О п р е д е л ё н н ы й и н т е г р а л





S *– число, равное площади криволинейной трапеции , «стоящей» на отрезке оси OX, и « накрытой » сверху дугой кривой подынтегральной функции* .

Свойства определенного интеграла

- $\int_a^b Af(x)dx = A\int_a^b f(x)dx;$ $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$ $\int_a^a f(x)dx = 0$
- Для произвольных чисел a, b, c справедливо равенство:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

- Если $f(x) \le \phi(x)$ на отрезке [a, b] $a < b$, то $\int_a^b f(x)dx \le \int_a^b \varphi(x)dx$
- $\int_a^b (f_1(x) \pm f_2(x))dx = \int_a^b f_1(x)dx \pm \int_a^b f_2(x)dx$

Формула Ньютона – Лейбница

Если функция F(x) – какая- либо первообразная от непрерывной функции f(x), т. е. $F'(x) = f(x)$, то

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

Пример

$$\int_{2/3}^{10/3} \frac{xdx}{(3x-1)\sqrt{3x-1}} = \left\{ \begin{array}{ll} 3x-1 = t^2, & dx = \frac{2}{3}tdt \\ x = \frac{1}{3}(t^2+1), & \end{array} \right\} =$$

$$= \int_1^3 \frac{\frac{1}{3}(t^2+1)\cdot\frac{2}{3}tdt}{t^2\cdot t} = \frac{2}{9}\int_1^3 \left(1+\frac{1}{t^2}\right)dt = \frac{2}{9}\left(t-\frac{1}{t}\right)\Bigg|_1^3 = \frac{16}{27}.$$

Формула интегрирования по частям

для определенного интеграла

$$\int_a^b u\,dv = uv\Big|_a^b - \int_a^b v\,du.$$

Пример

$$\int_1^e \ln^2 x\,dx = \left\{\begin{array}{ll} u = \ln^2 x, & du = 2\ln x\,\dfrac{dx}{x}, \\ dv = dx, & v = x, \end{array}\right\} = x\ln^2 x\Big|_1^e - 2\int_1^e \ln x\,dx =$$

$$= \left\{\begin{array}{ll} u = \ln x, & du = \dfrac{dx}{x}, \\ dv = dx, & v = x, \end{array}\right\} = e\ln^2 e - \ln^2 1 - 2(x\ln x - x)\Big|_1^e =$$

$$= e - 2e\ln e + 2e - 2 = e - 2.$$

Тема 4. Приложения определённого интеграла в геометрии.

1. Вычисление длины дуги плоской кривой.

- Пусть дуга $\breve{AB}$ кривой $y = f(x)$ на отрезке $[a; b]$, $a = x_A$, $b = x_B$, гладкая, т. е. производная $y' = f'(x)$ непрерывна при $x \ni [a; b]$. В этом случае длина дуги $\breve{AB}$ вычисляется по формуле

$$L = \left|\breve{AB}\right| = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\ dx.$$

- Если кривая $\breve{AB}$ задана параметрическими уравнениями $x = \varphi(t)$, $y = \Psi(t)$ и производные $\varphi'(t)$ и $\Psi'(t)$ непрерывны, то длина дуги $\breve{AB}$

$$L = \left|\breve{AB}\right| = \int_{t_A}^{t_B} \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2}\ dt.$$

- В случае, когда гладкая кривая $\breve{AB}$ задана в полярных координатах уравнением $\rho = \rho(\varphi)$, применяется формула

$$L = \left|\breve{AB}\right| = \int_{\varphi_A}^{\varphi_B} \sqrt{[\rho'(\varphi)]^2 + [\rho(\varphi)]^2}\ d\varphi.$$

Вычисление длины дуги плоской кривой, заданно в декартовых координатах.

П р и м е р 1. Вычислить длину дуги полукубической параболы

Р е ш е н и е. По условию $y = \sqrt{x^3} \Rightarrow y = x^{3/2} \Rightarrow y' = \frac{3x^{1/2}}{2} \Rightarrow$

$$l = \int_0^{4/3} \sqrt{1 + (y')^2}\,dx = \int_0^{4/3} \sqrt{1 + \left(\frac{3}{2}x^{1/2}\right)^2}\,dx =$$

$$= \int_0^{4/3} \sqrt{1 + \frac{9}{4}x}\,dx = \left| \begin{array}{l} u = 1 + \frac{9}{4}x, \\ u|_{x=0} = 1, \end{array} \right. \left| \begin{array}{l} du = \frac{9}{4}dx \\ u|_{x=4/3} = 4 \end{array} \right. = \int_1^4 \sqrt{u}\,\frac{4}{9}\,du =$$

$$= \frac{4}{9}\int_1^4 u^{1/2}\,du = \frac{4}{9}\cdot\frac{2}{3}\,u^{3/2}\Big|_1^4 = \frac{8}{27}\cdot\sqrt{u^3}\Big|_1^4 = \frac{8}{27}\cdot\left(\sqrt{4^3} - \sqrt{1^3}\right) =$$

$$= \frac{8}{27}\cdot(2^3 - 1) = \frac{8}{27}\cdot(8 - 1) = \frac{8}{27}\cdot 7 = \frac{56}{27} = \boxed{2\frac{2}{27}}.$$

О т в е т: $l = 2\frac{2}{27}$ $(ед.дл.)$

Вычисление длины дуги плоской кривой, заданной параметрически .

П р и м е р 2. Вычислить длину дуги астроиды

$x = 2\cos^3 t$, $y = 2\sin^3 t$ от 0 до $\frac{\pi}{2}$.

Р е ш е н и е.

$$\sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2} = \sqrt{36\ \cos^4 t \sin^2 t + 36 \sin^4 t\ \cos^2 t} =$$

$$= \sqrt{36\ \cos^2 t\ \sin^2 t\ (\cos^2 t + \sin^2 t)} = \| \cos^2 t + \sin^2 t = 1 \| =$$

$$= \sqrt{36\ \cos^2 t\ \sin^2 t} = 6 \cos t \qquad =>$$

$$\boxed{L} = \int_{t_A}^{t_B} \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2}\ dt. =$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} 6 \cos t \sin t\ dt = \| 2 \cos t \sin t = \sin(2t) \| = 3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(2t)\ dt =$$

$$= -\frac{3}{2}\ [\cos(2t)]_0^{\pi/2} = -\frac{3}{2}(\cos\pi - \cos 0) = -\frac{3}{2}\ (-1-1) = -\frac{3}{2}\ (-2) = \boxed{3}$$

О т в е т: $L = 3$ (ед. дл.)

Вычислить длину дуги кривой в полярных координатах

Пример 3. Вычислить длину дуги кривой $\rho = 4cos^3\frac{\varphi}{3}$ от 0 до $\frac{3\pi}{2}$.

Решение. $\sqrt{[\rho(\varphi)]^2 + [\rho'(\varphi)]^2} = \sqrt{\left[4cos^3\frac{\varphi}{3}\right]^2 + \left[-4\ cos^2\frac{\varphi}{3}\ sin\frac{\varphi}{3}\right]^2} =$

$= \sqrt{16cos^6\frac{\varphi}{3} + 16\ cos^4\frac{\varphi}{3}sin^2\frac{\varphi}{3}} = \sqrt{16\ \ cos^4\frac{\varphi}{3}\left(\ cos^2\frac{\varphi}{3} + sin^2\frac{\varphi}{3}\right)} =$

$= \sqrt{16\ \ cos^4\frac{\varphi}{3}} = 8\ cos^2\frac{\varphi}{3}.$

$$\boxed{\quad} = \int_{0}^{3\pi/2} \sqrt{\quad^2 + \quad^2}\ \quad = \int_{0}^{3\pi/2} 8\ \quad^2\frac{\varphi}{3}\ \quad =$$

$$= \int_{0}^{3\pi/2} 2\ \quad^2\frac{\varphi}{2} = 1 + \quad\quad = 4\int_{0}^{3\pi/2} \left(1 + \quad\frac{2\varphi}{3}\right)\ \quad =$$

$$= 4\ \quad + \frac{3}{2}\ \quad\frac{2\varphi}{3}\Big|_{0}^{3\pi/2} = 4\ \quad\frac{3\pi}{2} + \frac{3}{2}\ \quad\quad - \ \quad 0 + \frac{3}{2}\ \quad 0\ \quad =$$

$$= л\quad\quad = 0, \quad\quad 0 = 0\ л = \frac{4}{1}\ \quad\frac{3\pi}{2} = \boxed{6\pi}$$

Ответ: $L = 6\pi$ (ед. дл.)

2. Вычисление площадей плоских фигур.

- Площадь криволинейной трапеции, ограниченной отрезком $[a; b]$ оси Ox, кривой $y = f(x)$, $f(x) \geq 0$ при $x \ni [a; b]$, и прямыми $x = a$ и $x = b$, вычисляется по формуле

$$S = \int_a^b f(x)\,dx.$$

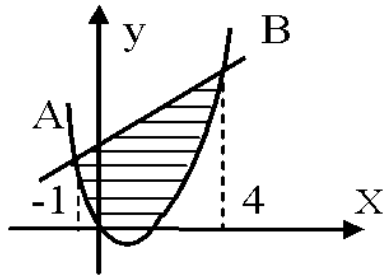
- Площадь фигуры, , ограниченной кривыми $y = f(x)$ и $y = \varphi(x)$, $f(x) \geq \varphi(x)$ при $x \ni [a; b]$, и прямыми $x = a$ и $x = b$, определяется по формуле

$$S = \int_a^b (f(x) - \varphi(x))\,dx.$$

- Площадь криволинейного сектора, ограниченного кривой, заданной в полярных координатах уравнением $\rho = \rho(\varphi)$ и двумя полярными лучами $\varphi = b$ и $\varphi = \beta$, $\alpha < \beta$, определяется интегралом

$$S = \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta \rho^2(\varphi)\,d\varphi.$$

П р и м е р . Вычислить площадь фигуры, ограниченной параболой $3y = 2x^2 - 4x$ пряиой $2x - 3y + 8 = 0$



Р е ш е н и е.

Воспользуемся соответствующей формулой

Абсциссы точек A и B найдём из системы

$$\left.\begin{array}{l} 2x^2 - 4x = 3x \\ 2x + 8 = 3x \end{array}\right\}$$

Вычитая из 1- го уравнения 2- ое получим $2x^2 - 6x - 8 = 0$ $<=>$ $x^2 - 3x - 4 = 0$ $=>$ $x_{1,2} = -1,\ x_{1,2} = 4$ $=>$

$$\boxed{S} = \int_{x_1}^{x_2} (y_{верх} - y_{низ})\,dx = \int_{-1}^{4} \left(\frac{2x+8}{3} - \frac{2x^2-4x}{3}\right) dx =$$

$$= -\frac{1}{3}\int_{-1}^{4} (2x^2 - 6x - 8)\,dx = -\frac{1}{3}\left(\frac{2x^3}{3} - 3x^2 - 8x\right)\Big|_{-1}^{4} = -\frac{1}{3}\left(\frac{2\cdot 4^3}{3} - 3\cdot 4^2 - 8\cdot 4\right) -$$

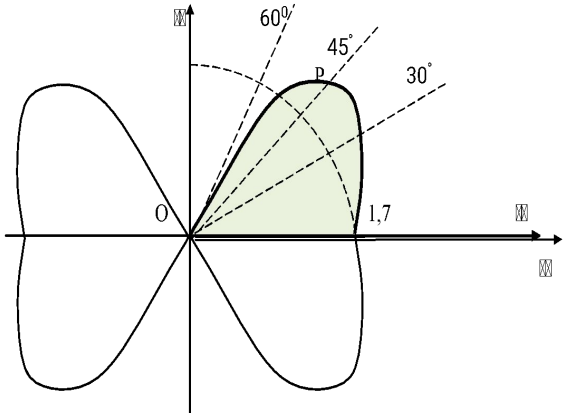
$$- \left(\frac{2\cdot(-1)^3}{3} - 3\cdot(-1)^2 - 8\cdot(-1)\right) = -\frac{1}{3}\left(\frac{128}{3} - 48 - 32 + \frac{2}{3} + 3 - 8\right) = \frac{125}{9} = \boxed{13\frac{8}{9}}$$

О т в е т: $S = 13\frac{8}{9}$ (ед. *пл.*)

П р и м е р . Вычислить площадь фигуры, ограниченной кривой, заданной в полярных координатах уравнением $\rho = \frac{\sqrt{4\cos^2\varphi - 1}}{\cos^2\varphi}$ (см. рис.)

Р е ш е н и е.

$$S = \int_{\alpha}^{\beta} \rho^2(\varphi)\, d\varphi = 4 \cdot \frac{1}{2} \int_{0}^{\pi/3} \left(\frac{\sqrt{4\cos^2\varphi - 1}}{\cos^2\varphi} \right)^2 d\varphi =$$



$2\int_0^{\pi/3} \frac{4\cos^2\varphi - 1}{\cos^4\varphi}\, d\varphi.$ Так как

$$\frac{4\cos^2\varphi - \cos^2\varphi + \cos^2\varphi}{\cos^4\varphi}\, d\varphi = \frac{3\cos^2\varphi - \cos^2\varphi}{\cos^4\varphi}\, d\varphi =$$

$$= \int \left(\frac{3}{\cos^2\varphi} - \frac{tg^2\varphi}{\cos^2\varphi} \right) d\varphi = 3tg\,\varphi + \frac{tg^3\varphi}{3} + c, \text{ где}$$

$$\int \frac{tg^2\varphi}{\cos^2\varphi}\, d\varphi = \left\| \begin{matrix} u = tg\,\varphi \\ du = \frac{d\varphi}{\cos^2\varphi} \end{matrix} \right\| = \int u^2\, du = \frac{u^3}{3} + c = \frac{tg^3\varphi}{3} + c, \quad \text{имеем}$$

$$S = 2\left[3tg\,\varphi - \frac{tg^3\varphi}{3} \right]_0^{\pi/3} = 2\left[\left(3tg\,\frac{\pi}{3} - \frac{tg^3\frac{\pi}{3}}{3} \right) - \left(3\,tg\,0 - \frac{tg^3 0}{3} \right) \right] =$$

$$= 2\left[\left(3 \cdot \sqrt{3} - \frac{(\sqrt{3})^3}{3} \right) - \left(3 \cdot 0 - \frac{0^3}{0} \right) \right] = 2\left(3\sqrt{3} - \frac{3\sqrt{3}}{3} \right) = \boxed{4\sqrt{3}}$$

О т в е т: $S = 4\sqrt{3} \approx 6.92$ (*ед. площади*)

4. Вычисление объёмов тел вращения.

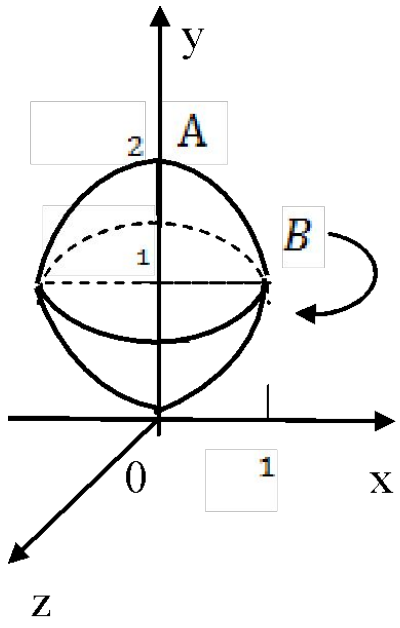
Объёмы тел, полученных вращением вокруг оси *Ox* криволинейных трапеций, вычисляются соответственно по формулам

$$\square = \square\square\square\square\square\square\square\square\square\square^2\square\square\square,$$

$$\square = \square\square\square\square\square\square\square\square\square\square\square^2 - \square\square\square\square\square\square\square\square^2\square\square\square\square.$$

З а м е ч а н и е. В силу равноправности переменных в декартовой системе координат в рассуждениях x и y можно поменять местами и вместо $\square\square\square\square\square$; $\square\square\square$ рассматривать $\square\square\square\square\square$; $\square\square\square$. Структура соответствующих формул при этом не изменится.

П р и м е р . Плоская фигура, ограниченная дугами парабол $y = x^2$ и $y = 2 - x^2$, $x \geq 0$ и прямой $y = 0$, вращается вокруг оси ординат (см. рис.). Вычислить объём тела, которое при этом получается.



Р е ш е н и е.

Данная фигура OBAO состоит из двух равновеликих трапеций, ограниченных дугами

OB: $x = \sqrt{y}$ и BA: $x = \sqrt{2 - y}$ =>

$$\boxed{V} = 2\pi \int_c^d [f(y)]^2 \, dy = 2\pi \int_0^1 \left[\sqrt{y}\right]^2 dy =$$

$$= 2\pi \int_0^1 y \, dy = \boxed{2\pi}$$

О т в е т: $V = 2\pi \approx 6.28$ (ед. объёма)