

# Математика на шахматной доске



Большакова Наталья  
Шкотова Анна  
2-21

# Введение

Ша́хматы — настольная логическая игра со специальными фигурами на 64-клеточной доске для двух соперников, сочетающая в себе элементы искусства (в части шахматной композиции), науки и спорта. Название берёт начало из персидского языка: шах мат, что значит буквально: «шах умер»

Игра подчиняется определённым правилам; в официальных турнирах применяются правила ФИДЕ, которые регламентируют не только передвижение фигур, но и права судьи, правила поведения игроков и т.п.

Существует множество вариантов шахмат с нестандартными правилами, фигурами, размерами доски. Соответствующий раздел шахматной композиции — сказочные шахматы. В математике изучаются различные аспекты шахматной игры (например, классические «Задача о ходе коня» и «Задача о восьми ферзях»), в том числе с помощью компьютерного моделирования.

# История

Считается, что история шахмат насчитывает не менее полутора тысяч лет. Известно множество версий, объясняющих развитие шахмат и их распространение во всём мире — «индийская», «византийская» и др. Согласно наиболее распространённой из них, первая известная игра-прародитель, чатуранга, появилась в Индии не позже VI века нашей эры. Попав в соседние с Индией страны, чатуранга претерпела ряд изменений. Потомком её на Арабском Востоке стал шатрандж, а в Юго-Восточной Азии — сянци (Китай), макрук (Таиланд) и сёги (Япония). Шатрандж в IX—X веках от арабов попал в Европу и Африку. Европейские игроки продолжили модификацию игры, в результате к XV веку были те правила, которые сегодня известны как «классические». Окончательно правила были стандартизованы в XIX веке, когда стали систематически проводиться международные турниры. С 1886 года разыгрывается звание чемпиона мира по шахматам. С 1924 года существует Международная шахматная федерация — ФИДЕ, под эгидой которой, начиная с середины XX века, проводится большинство международных соревнований.

# Математика шахматной доски

## Легенда о происхождении шахмат

Согласно легенде индийский принц решил наградить изобретателя шахмат и предложил ему самому выбрать награду. Изобретатель шахмат попросил в награду за своё изобретение столько пшеничных зёрен, сколько их получится, если на первую клетку шахматной доски положить одно зерно, на вторую – в 2 раза больше, т.е. 2 зерна, на третью – ещё в 2 раза больше, т.е. 4 зерна, и так далее до 64-й клетки. Каково же было удивление принца, когда он узнал, что такую, казалось бы, скромную просьбу невозможно выполнить.



Начальное положение фигур в шахматах

Изобретатель потребовал  $1+2+2^2+\dots+2^{63}=2^{64}-1$  зерен. Это число записывается двадцатью цифрами, является фантастически большим и заведомо превосходит количество пшеницы, собранной человечеством до настоящего времени. Подсчет показывает, что амбар для хранения необходимого зерна с площадью основания  $80 \text{ м}^2$  должен простираться от Земли до Солнца.

# Математика шахматной доски

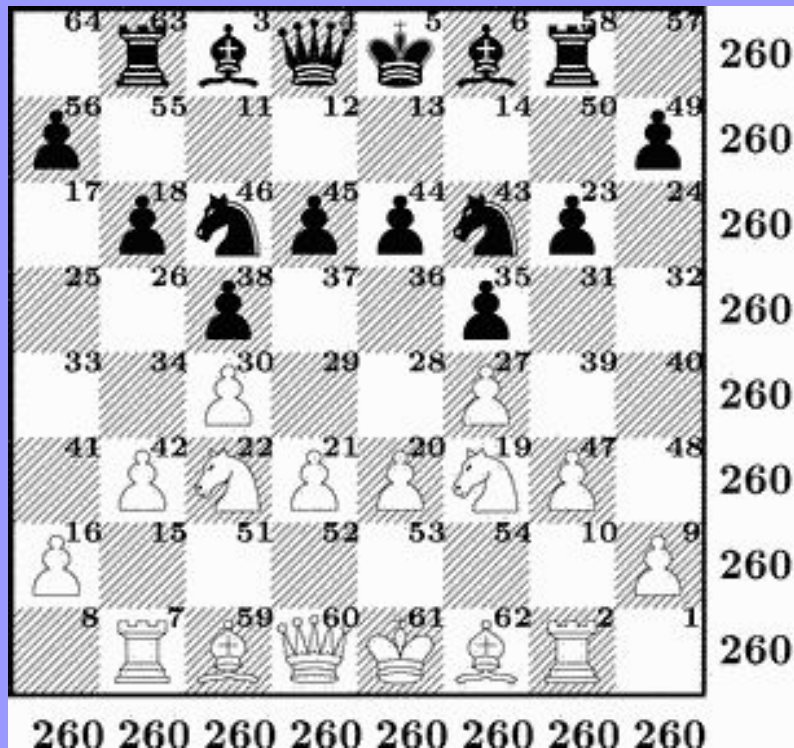
## Магический квадрат

64	63	62	61	60	59	58	57	260
56	55	11	12	13	14	15	16	260
17	18	19	20	21	22	23	24	260
7	26	27	28	29	30	31	32	260
33	34	35	29	28	27	39	40	260
41	42	43	44	45	46	47	48	260
49	15	51	52	53	54	10	9	260
8	9	10	11	12	13	14	1	260
280	260	260	260	260	260	260	260	260

- Магический квадрат порядка  $n$  представляет собой квадратную таблицу  $n \times n$ , заполненную целыми числами от 1 до  $n^2$  и обладающую следующим свойством: сумма чисел каждой строки, каждого столбца, а также двух главных диагоналей одна и та же. Для магических квадратов порядка 8 она равна 260.

# Альмуджаннах

Рассмотрим одну из старинных дебютных табий (начальных расположений фигур) под названием альмуджаннах. Она получается из современной расстановки при помощи следующих симметричных ходов белых и черных: 1. d3 d6 2. e3 e6 3. b3 b6 4. g3 g6 5. c3 c6 6. f3 f6 7. c4 c5 8. f4 f5 9. Кс3 Кс6 10. Кf3 Кf6 11. Лb1 Лb8 12. Лg1 Лg8



Подсчитав сумму чисел, стоящих на восьми полях — d2, d3, e2, e3, d6, d7, e6, e7, участвующих в первые двух ходах, мы неожиданно получим магическое число 260. Тот же результат даст и каждая последующая пара приведенных ходов. Подобные примеры и позволяют высказать гипотезу о связи магических квадратов с шахматами.

# Геометрия шахматной доски

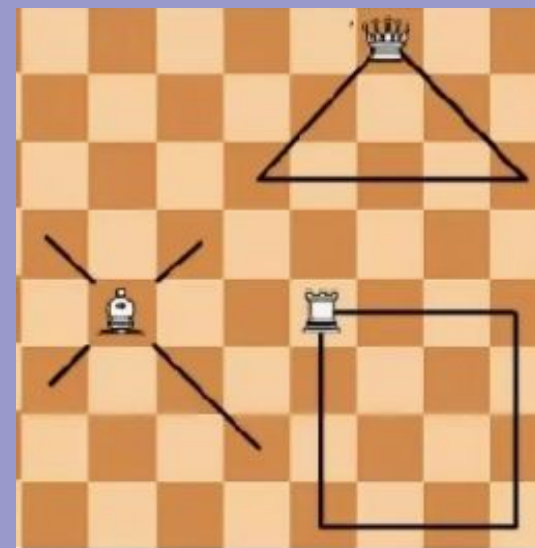
Можно сказать, что ничего удивительного и интересного здесь нет. Можно подумать, что при виде шахматной доски мы сразу вспоминаем геометрию (из – за геометрической формы доски). Это, безусловно, так, но геометрическая форма ещё не всё.

Дело в том, что при игре в шахматы, как и в любой другой науке, есть свои определённые правила. И существует такое правило, как правило, квадрата.

Квадратом называется прямоугольник, у которого все стороны равны. При этой композиции (Рис.13) неопытные шахматисты рассуждают так: пешка идет сюда, король туда, пешка сюда, король туда и т.д. и при этом они часто путаются и, в конце концов, просчитываются..

# Геометрия шахматной доски

Наиболее интересное свойство шахматной доски заключается в весьма необычном измерении расстояний на ней. Например, в обычной, евклидовой геометрии расстояние от поля a1 до h8 больше, чем до a8 (имеются в виду центры полей), однако король оба пути может преодолеть ровно за семь ходов! Расстояние между полями шахматной доски можно определять как число ходов, за которое данная фигура попадает с одного из этих полей в другое. Расстояние, введенное таким образом, зависит от конкретной фигуры. При этом для всех фигур, кроме пешки и рокирующего короля, расстояние от поля a до поля b равно расстоянию от b до a, а расстояние от a до c не больше, чем сумма расстояний от a до b и от b до c (так называемое неравенство треугольника).



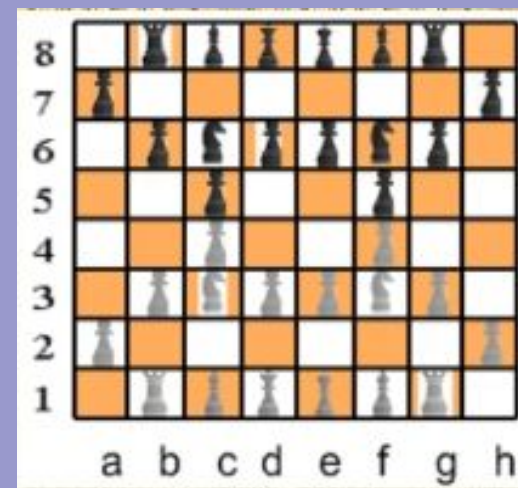
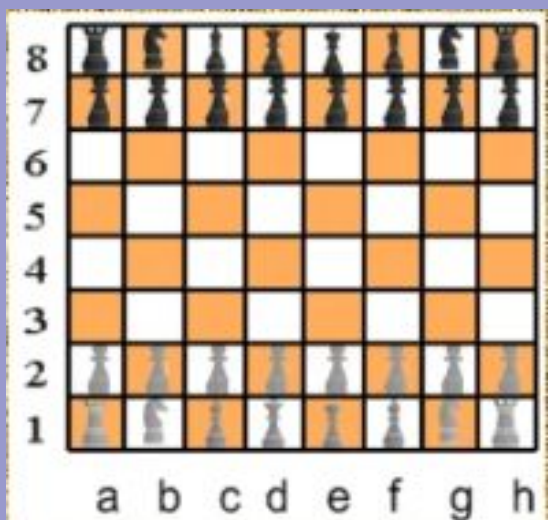
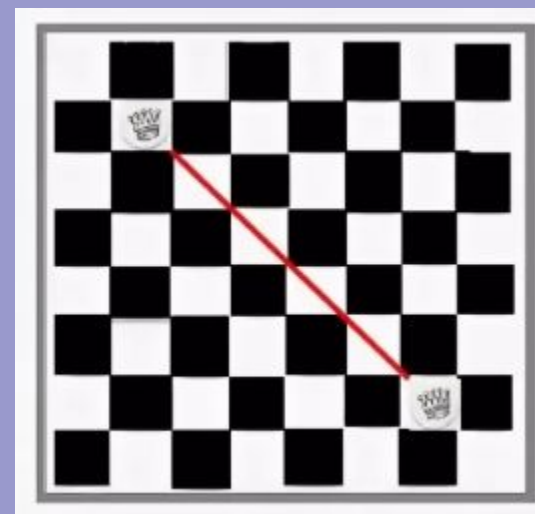


# Симметрия шахматной доски

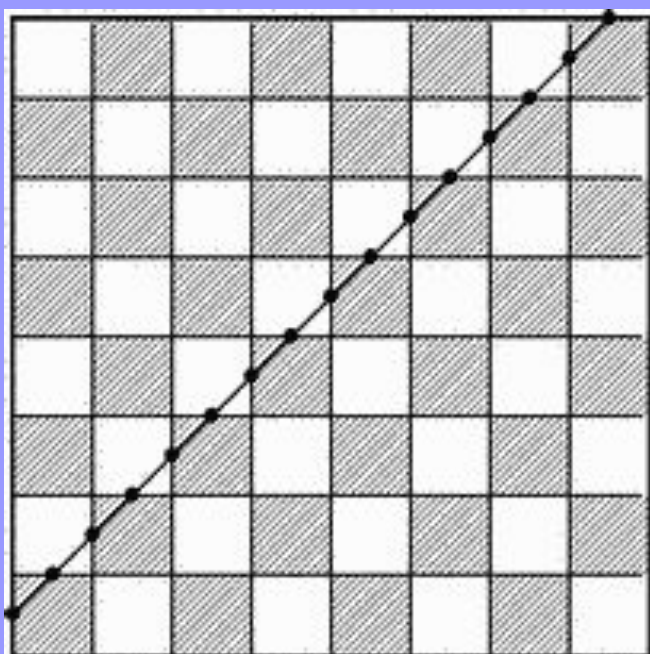
На шахматной доске можно провести прямую, разделяющую левый и правый фланги доски (граница между вертикалями «d» и «e») или нижнюю и верхнюю части (граница между четвертой и пятой горизонталями). Если, скажем, белый конь стоит на c2, а черный на c7, то мы говорим, что эти кони расположены симметрично. В данном случае мы можем говорить о таком математическом явлении, как осевая симметрия, где осями будут являться прямые, разделяющие фланги и горизонталы. Осями являются и большие диагонали. Симметрией обладает и исходное расположение шахматных фигур.

Известна такая забавная история. Некто явился в шахматный клуб и объявил, что нашел верный способ не проигрывать черными. «Каким образом?» - спросили его. «Очень просто, - ответил гость, - повторяя ходы противника!» Сыграть с наивным изобретателем вызвался С.Ллойд, который и объявил ему мат в 4 хода.

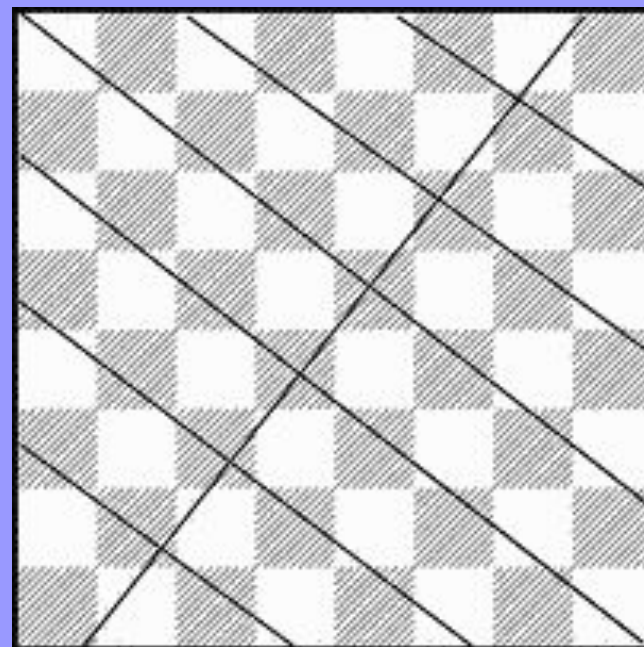
# Симметрия шахматной доски



Сколько нужно провести разрезов на доске, чтобы пересечь все ее поля? Разумеется, восемью разрезами вполне достаточно — по одному вдоль каждой вертикали или каждой горизонтали. Однако, оказывается, что и семь прямых могут пересечь все 64 поля доски. Для этого одну прямую нужно провести почти в диагональном направлении через центр доски, а шесть других — в направлениях почти параллельных второй диагонали доски



Пятнадцать полей  
пересечены одной прямой

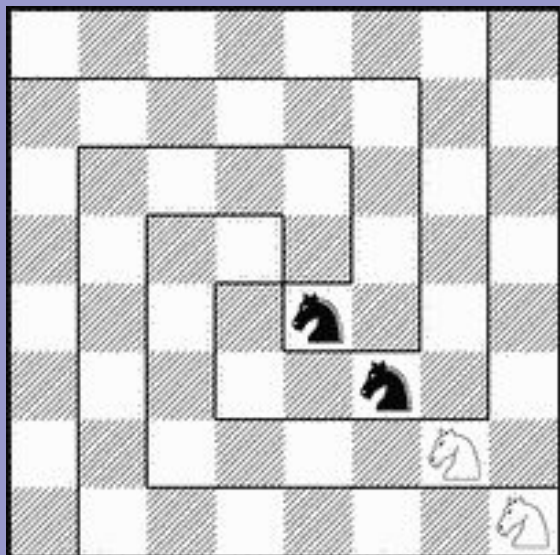


Семь прямых пересекают  
все поля доски

# Система координат

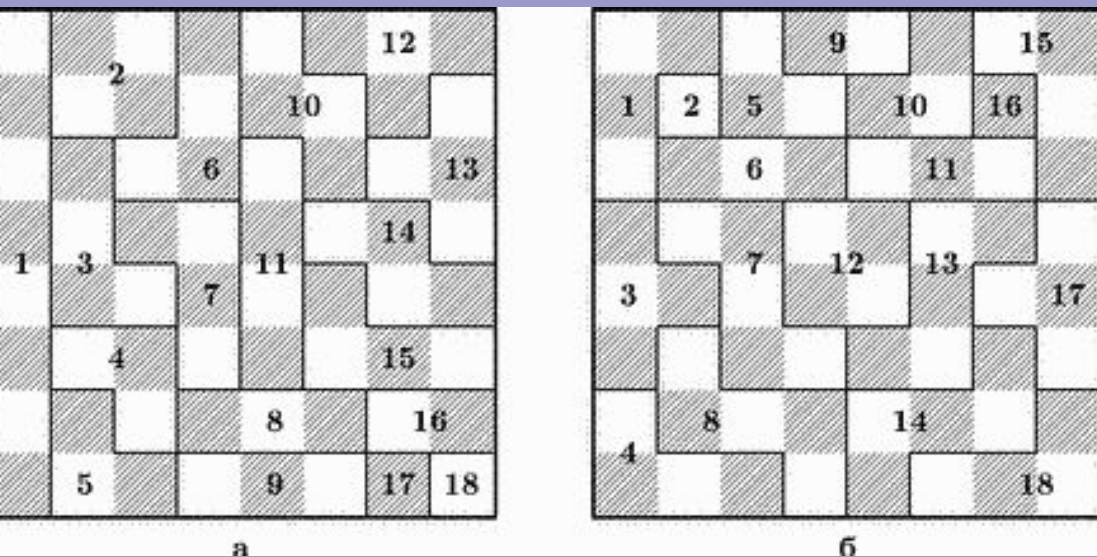
Более чем за 100 лет до н.э. греческий ученый Гиппарх предложил опоясать на карте земной шар параллелями и меридианами, и ввести хорошо теперь известные географические координаты: широту и долготу – и обозначить их числами. В XIVв. Французский математик Н. Оресм ввел, по аналогии с географическими, координаты на плоскости. Он предложил покрыть плоскость прямоугольной сеткой и называть широтой и долготой то, что мы теперь называем абсциссой и ординатой. Это нововведение оказалось чрезвычайно продуктивным. На его основе возник метод координат, связавший геометрию с алгеброй.

## Легенда о четырёх алмазах



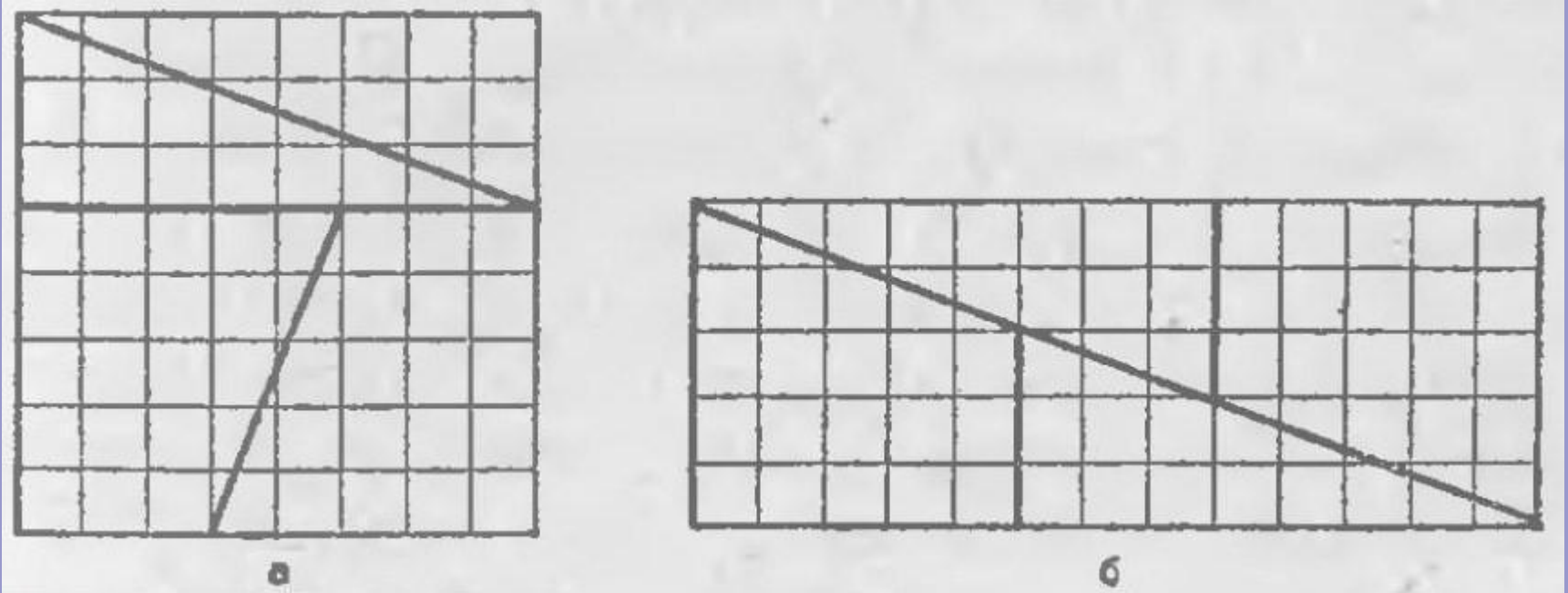
Легенда о четырёх алмазах  
Один восточный властелин был таким искусным игроком, что за всю жизнь потерпел всего четыре поражения. В честь своих победителей, четырех мудрецов, он приказал вставить в его шахматную доску четыре алмаза — на те поля, на которых был заматован его король (см. рис. 2, где вместо алмазов изображены кони). После смерти властелина его сын, слабый игрок и жестокий деспот, решил отомстить мудрецам, обыгравшим его отца. Он велел разделить им шахматную доску с алмазами на четыре одинаковые по форме части так, чтобы каждая заключала в себе по одному алмазу. Хотя мудрецы выполнили требование нового властелина, он все равно лишил их жизни.

На какое максимальное число разных частей можно разрезать шахматную доску, если считать разными части, отличающиеся своей формой или цветом полей при совмещении. Переворачивать части не разрешается.



Особенность решения на рис. 3а состоит в том, что одна из частей содержит восемь полей (максимум). В решении на рис. 3б, отличающемся внешней симметрией, ни одна часть не содержит более пяти полей. На рис. 3а части 17 и 18, или 8 и 9, хотя и имеют одинаковую форму, отличаются цветом полей при совмещении. Другие части, например, 3 и 6, вообще не могут быть совмещены (переворачивать их нельзя).

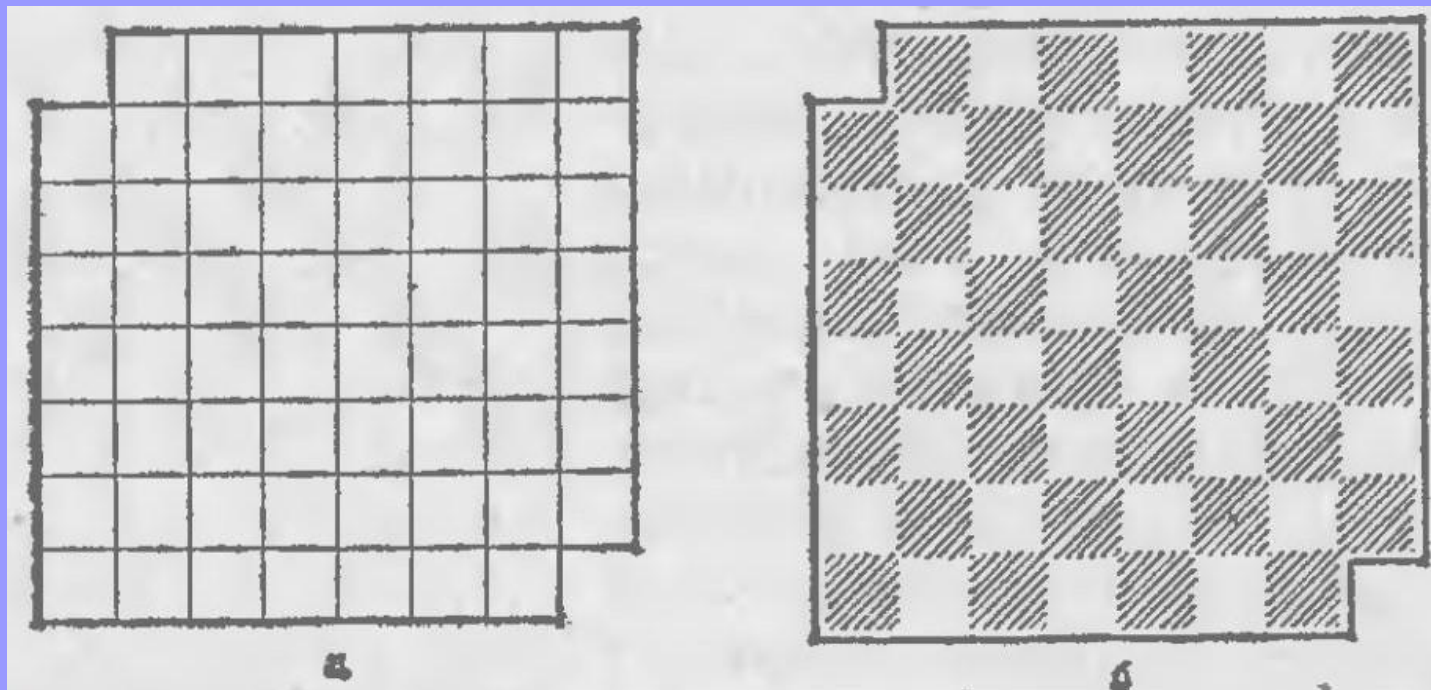
## Парадокс с разрезанием доски



Разрежем доску на четыре части, как показано на рис. 5а, и составим из них прямоугольник (рис. 5б). Площадь шахматной доски, очевидно, равна 64, а площадь полученного прямоугольника — 65. Таким образом, при разрезании доски откуда-то взялось лишнее поле! Разгадка парадокса состоит в том, что наши чертежи выполнены не совсем точно. Если делать чертеж аккуратно, то вместо диагонали прямоугольника на рис. 5б появится ромбовидная, чуть вытянутая фигура со сторонами, которые кажутся почти слившимися. Площадь этой фигуры как раз и дает одно «лишнее» поле.

## Задача о домино

Можно ли целиком покрыть домино квадрат  $8 \times 8$ , из которого вырезаны противоположные угловые клетки?



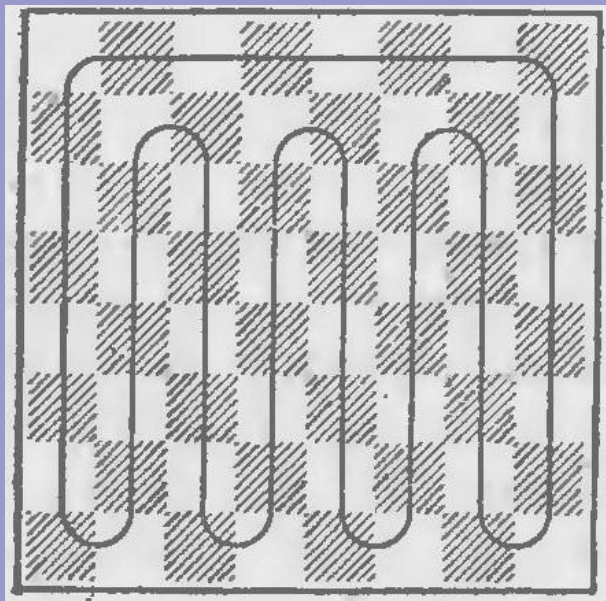


## Задача о домино

Можно воспользоваться алгебраическими рассуждениями, однако «шахматное» решение проще. Окрасим урезанный квадрат в черно-белый цвет, превратив его в шахматную доску без двух угловых полей a8 и h1 (рис. б). При любом покрытии доски каждое домино покрывает одно белое и одно черное поле. У нас белых полей на два меньше, чем черных (вырезанные поля - белые), и поэтому необходимого покрытия не существует! Раскраска доски не только позволяет шахматисту легче ориентироваться во время игры, но и служит средством решения математических задач.

В рассмотренной задаче существенным было не то, что из доски вырезаны угловые поля, а то, что они одного цвета.

# Математика шахматной доски

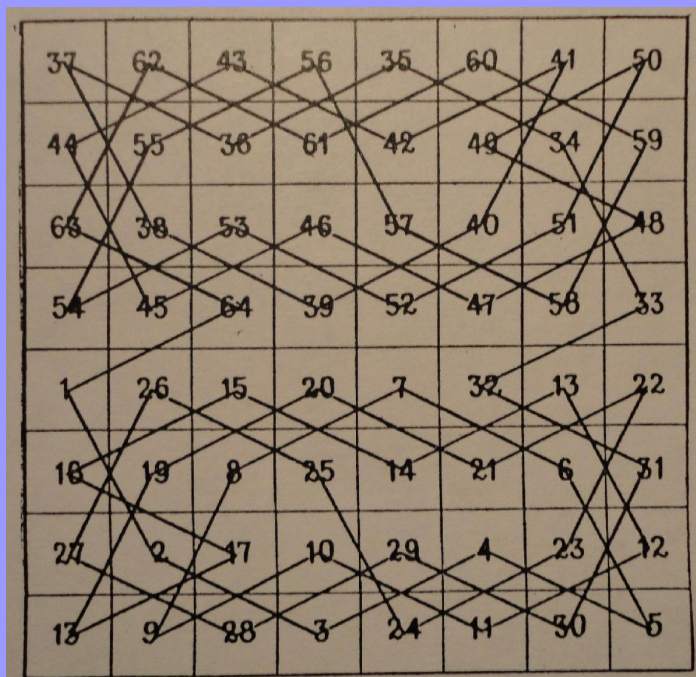


Домино покрывают доску

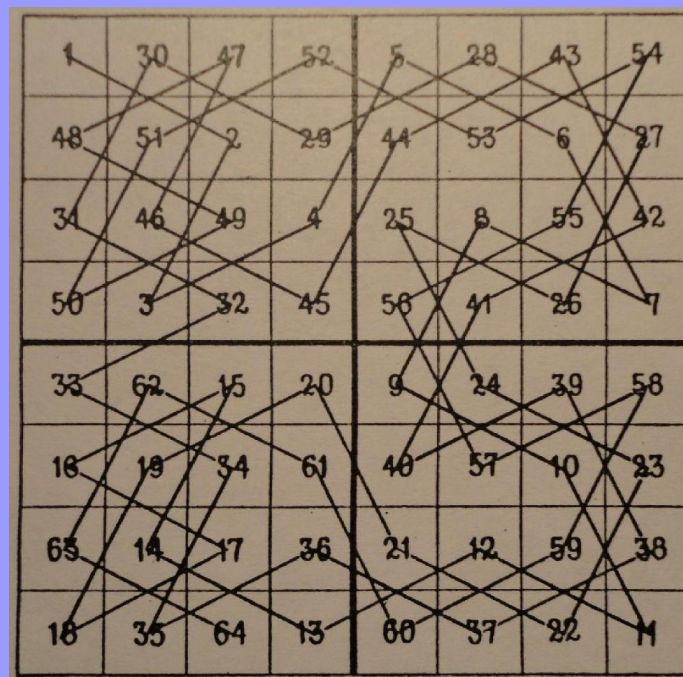
Пусть на шахматной доске вырезаны два поля разного цвета. Всегда ли можно покрыть оставшуюся часть доски 31 домино?

## Задача об обходе конём всех клеток шахматной доски

Требуется обойти ходом коня все клетки шахматной доски, побывав на каждой из них только один раз.

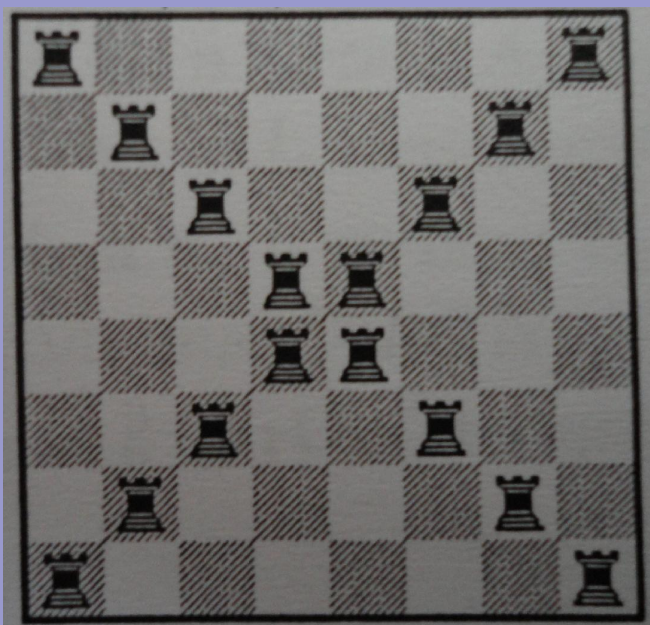


Решение задачи,  
предложенное Эйлером



Первый полумагический  
обход конём всех клеток  
шахматной доски

# Математика шахматных фигур



Каждая не занятая ладьёй  
клетка находится под боем  
хотя бы трёх из них

Какое наименьшее количество ладей  
можно поставить на шахматной доске так,  
чтобы каждая не занятая ладьёй клетка  
находилась под боем хотя бы трёх из них?

# Заключение



- Шахматы справедливо считают единственной игрой из всех, придуманных человеком, в которой сочетаются спорт, искусство и наука.
- Занятие шахматами способствует развитию математических способностей человека. Шахматы – это и вид интеллектуальной борьбы, и соревнование, а любое соревнование совершенствует сильные черты личности.
- Задачи, связанные с шахматной теорией, широко применяются в математике.
- В ходе работы мы исследовали связь математики и шахмат, рассмотрели математические решения задач, связанных с шахматной доской и шахматными фигурами. Таким образом, мы изучили математику на шахматной доске.

Спасибо за  
внимание!

