

Лекция 3.5. Знакопостоянные ряды

Признак сравнения Даламбера

Пусть даны два положительных ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad (A), \quad \sum_{n=1}^{\infty} b_n \quad (B)$$

и начиная с некоторого n выполняется неравенство

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \frac{b_{n+1}}{b_n}$$

То из сходимости ряда (B) вытекает сходимость ряда (A), а из расходимости ряда (A) вытекает расходимость ряда (B)

Теорема (признак Д'Аламбера):

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \quad a_n > 0$$

1) если $\exists \alpha > 1, \exists n_0 \in \mathbb{N}$, что $\forall n > n_0$

$\frac{a_n}{a_{n+1}} \geq \alpha$, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится.

2) если $\exists n_0 \in \mathbb{N}$, что $\forall n > n_0$

$\frac{a_n}{a_{n+1}} \leq 1$, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ расходится.

Следствие (признак Д'Аламбера в предельной форме):

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \quad a_n > 0$$

1) если $\liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{a_{n+1}} \geq \alpha > 1$, то ряд сходится.

2) если $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{a_{n+1}} = \alpha < 1$, то ряд расходится.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{(2n)!}$$

Теорема (признак Коши):

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \quad a_n > 0$$

1) если $\exists \beta < 1, \exists n_0 \in \mathbb{N}$, что $\forall n \geq n_0$

$\sqrt[n]{a_n} \leq \beta$, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится.

2) если $\exists \{n_k\}_{k=1}^{\infty}$ такая, что

$\sqrt[n_k]{a_{n_k}} \geq 1$, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ расходится.

Следствие (признак Коши в предельной форме):

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \quad a_n > 0$$

1) если $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = q < 1$, то ряд сходится.

2) если $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = q > 1$, то ряд расходится.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3^n}$$
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(3 + (-1)^n)^n}$$

Теорема (интегральный признак Коши):

Пусть $f(x) \geq 0$ на $[1; +\infty)$ и монотонно убывает.

Тогда ряд $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ сходится одновременно

с несобственным интегралом $\int_1^{+\infty} f(x) dx$.

Теорема (Уточнение интегрального признака). Пусть $f(x) > 0$ и монотонно убывает на $[1, +\infty)$.

Тогда существует неотрицательный предел

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \left(\sum_{n=1}^m f(n) - \int_1^m f(x) dx \right)$$

Примеры:

1) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$ — расходится. ($\sum_{n=1}^N \frac{1}{n} \sim \ln N$)

2) $\sum_{n=3}^{+\infty} \frac{1}{n * \ln n}$ — расходится.

3) $\sum_{n=10}^{+\infty} \frac{1}{n * \ln n * \ln \ln n}$ — расходится.

1') $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha}, \alpha \neq 1$ — сходится при $\alpha > 1$, расходится при $\alpha < 1$.

2') $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n * \ln^\beta n}, \beta \neq 1$ — сходится при $\beta > 1$, расходится при $\beta < 1$.

Теорема (признак Раабе):

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \quad a_n > 0$$

и пусть $R_n = n \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) \geq r$.

тогда:

если $r > 1$, то ряд сходится;

если $r \leq 1$, то ряд расходится.

Следствие (признак Раабе в предельной форме):

Пусть существует $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n = R$.

Тогда при $R > 1$ ряд сходится, при $R < 1$ расходится.

Теорема (признак Гаусса):

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n, a_n > 0, \text{ и пусть } \frac{a_n}{a_{n+1}} = \alpha + \frac{\beta}{n} + O\left(\frac{1}{n^{1+\varepsilon}}\right), n \rightarrow \infty,$$

$\varepsilon > 0$ и ε не зависит от n .

тогда:

если $\alpha > 1$, то ряд сходится;

если $\alpha < 1$, то ряд расходится;

если $\alpha = 1, \beta > 1$, то ряд сходится;

если $\alpha = 1, \beta \leq 1$, то ряд расходится.