Лекция 3.5. ***Знакопостоянные ряды***

<u>Признак сравнения Даламбера</u>

Пусть даны два положительных ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad (A), \sum_{n=1}^{\infty} b_n \quad (B)$$

и начиная с некоторого n выполняется неравенство

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \frac{b_{n+1}}{b_n}$$

То из сходимости ряда (B) вытекает сходимость ряда (A), а из расходимости ряда (A) вытекает расходимость ряда (B)

Теорема (признак Д'Аламбера):

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \;\; a_n > 0$$

1) если $\exists \alpha > 1, \exists n_0 \in N,$ что $\forall n > n_0$

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} \geq \alpha, \text{то ряд } \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ сходится.}$$

2) если $\exists n_0 \in N,$ что $\forall n > n_0$

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} \leq 1, \text{то ряд } \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ расходится.}$$

Следствие (признак Д'Аламбера в предельной форме):

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \;\; a_n > 0$$

1) если $\displaystyle \varliminf_{n\to\infty} \frac{a_n}{a_{n+1}} \geq \alpha > 1,$ то ряд сходится.

2) если $\displaystyle \varlimsup_{n\to\infty} \frac{a_n}{a_{n+1}} = \alpha < 1,$ то ряд расходится.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{(2n)!},$$

Теорема (признак Коши):

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \;\; a_n > 0$$

1) если $\exists \beta < 1, \exists n_0 \in N,$ что $\forall n \geq n_0$

$$\sqrt[n]{a_n} \leq \beta, \text{ то ряд } \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ сходится.}$$

2) если $\exists \{n_k\}_{k=1}^{\infty}$ такая, что

$$\sqrt[n_k]{a_{n_k}} \geq 1, \text{ то ряд } \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ расходится.}$$

Следствие (признак Коши в предельной форме):

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \;\; a_n > 0$$

1) если $\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{a_n} = q < 1,$ то ряд сходится.

2) если $\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{a_n} = q > 1,$ то ряд расходится.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3^n}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(3+(-1)^n)^n}$$

Теорема (интегральный признак Коши):

Пусть $f(x) \geq 0$ на $[1;\ +\infty)$и монотонно убывает.

Тогда ряд $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ сходится одновременно

с несобственным интегралом $\int_{1}^{+\infty} f(x)dx$.

Теорема (Уточнение интегрального признака). Пусть $f(x) > 0$ и монотонно убывает на $[1,+\infty)$.

Тогда существует неотрицательный предел

$$\lim_{m\to\infty}\left(\sum_{n=1}^{m} f(n) - \int_{1}^{m} f(x)dx.\right)$$

Примеры:

$$1)\ \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n}-\ \text{расходится}.\ (\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n}\sim\ln N)$$

$$2)\ \sum_{n=3}^{+\infty}\frac{1}{n*\ln n}-\ \text{расходится}.$$

$$3)\ \sum_{n=10}^{+\infty}\frac{1}{n*\ln n*\ln\ln n}-\ \text{расходится}.$$

$1')$ $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^{\alpha}}, \alpha\neq 1$ – сходится при $\alpha>1$, расходится при $\alpha<1$.

$2')$ $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n*\ln^{\beta} n}, \beta\neq 1.$ – сходится при $\beta>1$, расходится при $\beta < 1.$

<u>Теорема (признак Раабе):</u>

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n,\ \ a_n > 0$$

и пусть $R_n = n(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1) \geq r.$

тогда:

если $r > 1,$ то ряд сходится;

если $r \leq 1,$ то ряд расходится.

<u>Следствие (признак Раабе в предельной форме):</u>

Пусть существует $\lim\limits_{n\to\infty} R_n = R$.

Тогда при R > 1 ряд сходится, при R < 1 расходится.

Теорема (признак Гаусса):

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n, a_n > 0, \text{и пусть } \frac{a_n}{a_{n+1}} = \alpha + \frac{\beta}{n} + O\left(\frac{1}{n^{1+\varepsilon}}\right), n \to \infty,$$

$\varepsilon > 0$ и ε не зависит от n.

тогда:

если $\alpha > 1$, то ряд сходится;

если $\alpha < 1$, то ряд расходится;

если $\alpha = 1, \beta > 1$, то ряд сходится;

если $\alpha = 1, \beta \leq 1$, то ряд расходится.