

## Лекция 3.5. Знакопостоянные ряды

### Признак сравнения Даламбера

Пусть даны два положительных ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad (A), \quad \sum_{n=1}^{\infty} b_n \quad (B)$$

и начиная с некоторого  $n$  выполняется неравенство

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \frac{b_{n+1}}{b_n}$$

То из сходимости ряда (B) вытекает сходимость ряда (A), а из расходимости ряда (A) вытекает расходимость ряда (B)

Теорема (признак Д'Аламбера):

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \quad a_n > 0$$

1) если  $\exists \alpha > 1, \exists n_0 \in \mathbb{N}$ , что  $\forall n > n_0$

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} \geq \alpha, \text{ то ряд } \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ сходится.}$$

2) если  $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ , что  $\forall n > n_0$

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} \leq 1, \text{ то ряд } \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ расходится.}$$

Следствие (признак Д'Аламбера в предельной форме):

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \quad a_n > 0$$

1) если  $\liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{a_{n+1}} \geq \alpha > 1$ , то ряд сходится.

2) если  $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{a_{n+1}} = \alpha < 1$ , то ряд расходится.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{(2n)!}$$

Теорема (признак Коши):

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \quad a_n > 0$$

1) если  $\exists \beta < 1, \exists n_0 \in \mathbb{N}$ , что  $\forall n \geq n_0$

$\sqrt[n]{a_n} \leq \beta$ , то ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  сходится.

2) если  $\exists \{n_k\}_{k=1}^{\infty}$  такая, что

$\sqrt[n_k]{a_{n_k}} \geq 1$ , то ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  расходится.

Следствие (признак Коши в предельной форме):

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \quad a_n > 0$$

1) если  $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = q < 1$ , то ряд сходится.

2) если  $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = q > 1$ , то ряд расходится.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3^n}$$
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(3 + (-1)^n)^n}$$

Теорема (интегральный признак Коши):

Пусть  $f(x) \geq 0$  на  $[1; +\infty)$  и монотонно убывает.

Тогда ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$  сходится одновременно

с несобственным интегралом  $\int_1^{+\infty} f(x) dx$ .

Теорема (Уточнение интегрального признака). Пусть  $f(x) > 0$  и монотонно убывает на  $[1, +\infty)$ .

Тогда существует неотрицательный предел

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \left( \sum_{n=1}^m f(n) - \int_1^m f(x) dx \right)$$

Примеры:

1)  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$  – расходится. ( $\sum_{n=1}^N \frac{1}{n} \sim \ln N$ )

2)  $\sum_{n=3}^{+\infty} \frac{1}{n * \ln n}$  – расходится.

3)  $\sum_{n=10}^{+\infty} \frac{1}{n * \ln n * \ln \ln n}$  – расходится.

1')  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha}, \alpha \neq 1$  – сходится при  $\alpha > 1$ , расходится при  $\alpha < 1$ .

2')  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n * \ln^\beta n}, \beta \neq 1$  – сходится при  $\beta > 1$ , расходится при  $\beta < 1$ .

Теорема (признак Раабе):

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \quad a_n > 0$$

и пусть  $R_n = n \left( \frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) \geq r$ .

тогда:

если  $r > 1$ , то ряд сходится;

если  $r \leq 1$ , то ряд расходится.

Следствие (признак Раабе в предельной форме):

Пусть существует  $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n = R$ .

Тогда при  $R > 1$  ряд сходится, при  $R < 1$  расходится.

Теорема (признак Гаусса):

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n, a_n > 0, \text{ и пусть } \frac{a_n}{a_{n+1}} = \alpha + \frac{\beta}{n} + O\left(\frac{1}{n^{1+\varepsilon}}\right), n \rightarrow \infty,$$

$\varepsilon > 0$  и  $\varepsilon$  не зависит от  $n$ .

тогда:

если  $\alpha > 1$ , то ряд сходится;

если  $\alpha < 1$ , то ряд расходится;

если  $\alpha = 1, \beta > 1$ , то ряд сходится;

если  $\alpha = 1, \beta \leq 1$ , то ряд расходится.