Лекция 3.5. ***Знакопостоянные ряды***

Признак сравнения Даламбера

Пусть даны два положительных ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad (A), \sum_{n=1}^{\infty} b_n \quad (B)$$

и начиная с некоторого n выполняется неравенство

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \frac{b_{n+1}}{b_n}$$

То из сходимости ряда (B) вытекает сходимость ряда (A), а из расходимости ряда (A) вытекает расходимость ряда (B)

<u>Теорема (признак Д'Аламбера):</u>

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \;\; a_n > 0$$

1) если $\exists \alpha > 1, \exists n_0 \in N,$ что $\forall n > n_0$

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} \geq \alpha, \text{то ряд } \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ сходится.}$$

2) если $\exists n_0 \in N,$ что $\forall n > n_0$

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} \leq 1, \text{то ряд } \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ расходится.}$$

Следствие (признак Д'Аламбера в предельной форме):

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \;\; a_n > 0$$

1) если $\underline{\lim}_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{a_{n+1}} \geq \alpha > 1,$ то ряд сходится.

2) если $\overline{\lim}_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{a_{n+1}} = \alpha < 1,$ то ряд расходится.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{(2n)!},$$

Теорема (признак Коши):

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \ \ a_n > 0$$

1) если $\exists \beta < 1, \exists n_0 \in N,$ что $\forall n \geq n_0$

$\sqrt[n]{a_n} \leq \beta,$ то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится.

2) если $\exists \{n_k\}_{k=1}^{\infty}$ такая, что

$\sqrt[n_k]{a_{n_k}} \geq 1,$ то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ расходится.

<u>Следствие (признак Коши в предельной форме):</u>

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \;\; a_n > 0$$

1) если $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{a_n} = q < 1,$ то ряд сходится.

2) если $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{a_n} = q > 1,$ то ряд расходится.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3^n}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(3 + (-1)^n)^n}$$

Теорема (интегральный признак Коши):

Пусть $f(x) \geq 0$ на $[1;\ +\infty)$и монотонно убывает.

Тогда ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f(n)$ сходится одновременно

с несобственным интегралом $\int\limits_{1}^{+\infty} f(x)dx$.

Теорема (Уточнение интегрального признака). Пусть $f(x) > 0$ и монотонно убывает на $[1,+\infty)$.

Тогда существует неотрицательный предел

$$\lim_{m\to\infty}\left(\sum_{n=1}^{m} f(n) - \int_{1}^{m} f(x)dx.\right)$$

Примеры:

$$1)\ \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} - \text{ расходится}.\ (\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} \sim \ln N)$$

$$2)\ \sum_{n=3}^{+\infty} \frac{1}{n * \ln n} - \text{ расходится}.$$

$$3)\ \sum_{n=10}^{+\infty} \frac{1}{n * \ln n * \ln \ln n} - \text{ расходится}.$$

$1')\ \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}, \alpha \neq 1$ – сходится при $\alpha > 1$, расходится при $\alpha < 1$.

$2')\ \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n * \ln^{\beta} n}, \beta \neq 1.$ – сходится при $\beta > 1$, расходится при $\beta < 1$.

Теорема (признак Раабе):

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \ \ a_n > 0$$

и пусть $R_n = n(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1) \geq r$.

тогда:

если $r > 1$, то ряд сходится;

если $r \leq 1$, то ряд расходится.

Следствие (признак Раабе в предельной форме):

Пусть существует $\lim\limits_{n \to \infty} R_n = R$.

Тогда при R > 1 ряд сходится, при R < 1 расходится.

Теорема (признак Гаусса):

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n, a_n > 0,$ и пусть $\frac{a_n}{a_{n+1}} = \alpha + \frac{\beta}{n} + O\left(\frac{1}{n^{1+\varepsilon}}\right), n \to \infty,$

$\varepsilon > 0$ и ε не зависит от n.

тогда:

если $\alpha > 1,$ то ряд сходится;

если $\alpha < 1,$ то ряд расходится;

если $\alpha = 1, \beta > 1,$ то ряд сходится;

если $\alpha = 1, \beta \leq 1,$ то ряд расходится.