3. Моногенный многочлен $S_k = S(x_1^k)$ относительно n переменных $x_1,...,x_n$ называется степенной суммой.

а) Доказать, что при $k \ge n$; $S_k - \sigma_1 S_{k-1} + \sigma_2 S_{k-2} - ... + (-1)^k S_{k-n}\sigma_n = 0$, причем $S_0 = n$ (вторая формула Ньютона для степенных сумм).

б) Доказать, что при $k \le n$; $S_k - \sigma_1 S_{k-1} + ... + (-1)^k k\sigma_k = 0$ (первая формула Ньютона для степенных сумм).

в) Найти степенные суммы $S_k(k \le n)$ от корней уравнения

$$x^n + \frac{x^{n-1}}{1!} + \frac{x^{n-2}}{2!} + ... + \frac{1}{n!} = 0;$$

г) Для каких уравнений n - ой степени все степенные суммы от корней этих уравнений $S_1,...,S_{n-1}$ равняются нулю ?

4. Вычислить площадь треугольника, если известно, что длины его сторон являются корнями уравнения $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0,\ a \ne 0.$

5. Вычислить результант многочленов:

$a)$ $3x^2 - x - 2,\quad x^2 - 2x - 2;\quad b)\ x^3 - 3x + 6,\quad x^3 + x^2 - x - 1.$

6. С помощью результанта найти значение параметра p , с которым многочлены $x^3 + px + 1$ и $x^2 + px + 1$ имеют общий корень.

7. Найти дискриминант многочлена: $a) x^3 - 2x^2 - 4x + 6;\quad b) x^4 + px + q.$

8. Исключить x из системы уравнений: $\begin{cases} x^2 - 3xy + y^2 = 2, \\ 2x^2 - xy + 3y^2 = 1. \end{cases}$

9. С помощью результанта решить системы уравнений:

$a)\ \begin{cases} 2x^2 + 10xy + 13y^2 - 2x - 4y + 1 = 0; \\ x^2 + 2xy - y^2 - 4x - 8y - 1 = 0; \end{cases}\quad b)\ \begin{cases} x^3 - 4x^2 + 6x - 3xy^2 + 4y^2 - 4 = 0; \\ y^3 - 3x^2y + 8xy - 6y = 0. \end{cases}$

10. Число, которое является корнем многочлена с рациональными (или же с целыми) коэффициентами, называется алгебраическим. Доказать, что все алгебраические числа образуют поле относительно обычных действий.

[4, № 693-697; 699-702; 708; 723-726; 731-733];
[6, № 7.3.6; 7.3.8; 7.3.14; 7.4.1-7.4.4].

Литература

1. Курош А.Г. Курс высшей алгебры. - М. : Наука, 1975. - 432 с.
2. Фаддеев Д.К. Лекции по алгебре. - М. : Наука, 1984. - 416 с.
3. Кострикин А.И. Введение в алгебру. - М. : Наука, 1977. - 496 с.
4. Фаддеев Д.К., Соминский И.С. Сборник задач по высшей алгебре. - М. : Наука, 1977. - 288 с.
5. Проскуряков И.В. Сборник задач по линейной алгебре. - М.: Наука, 1984. - 336 с.
6. Сборник задач по алгебре / Под ред. АИ Кострикина - М. : Наука, 1987. - 352 с.
7. Сушкевич А.К. Вища алгебра. Ч.1. - Вид-во Харк. Ун-ту, 1964. - 436 с.
8. Костарчук В.М., Хацет Б.3 Курс вищої алгебри. - К. : Вища шк., 1969. - 540 с.

1. СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

Понятия:

1) решение системы линейных уравнений;
2) эквивалентность систем линейных уравнений;
3) матрица;
4) элементарные преобразования матриц и систем линейных уравнений;
5) однородные и неоднородные системы линейных уравнений.
6) определители 2-го и 3-го порядков.

Факты:

1) эквивалентность систем линейных уравнений, получаемых друг из друга элементарными преобразованиями;
2) метод Гаусса;
3) условия существования решений; условия единственности решений систем линейных уравнений;
4) условия существования ненулевых решений однородной системы;
5) правило Крамера для решения системы двух линейных уравнений с двумя неизвестными и трех линейных уравнений с тремя неизвестными.

Систему линейных уравнений удобно записывать следующим образом:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2; \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases} \qquad (1)$$

Здесь *коэффициенты при неизвестных* $x_1, x_2, ..., x_n$ обозначены одной и той же буквой с двумя индексами. Коэффициент a_{ij} стоит в i-м уравнении при неизвестном x_j. Единственный индекс *свободного члена* b_i совпадает с номером уравнения. Упорядоченный набор чисел $k_1, k_3, ..., k_n$ называют *решением* системы (1) если каждое из уравнений (1) обращается в тождество после замены в нем неизвестных x_j соответствующими числами k_j, $j=1,2,\ldots,n$. Система, имеющая хотя бы одно решение называется *совместной*, не имеющая решений - *несовместной*. Если решений более одного, то систему называют *неопределенной*, если ровно одно, систему называют *определенной*.

Метод Гаусса (или же *метод последовательного исключения неизвестных*) позволяет привести произвольную систему линейных уравнений с n неизвестными к *ступенчатому виду*. Преобразования, которые при этом необходимо произвести, включают в себя: перестановку двух уравнений, умножение одного из уравнений на ненулевое число, прибавление к одному из уравнений другого, умноженного на число (*элементарные преобразования*).

При практическом решении систем удобно пользоваться табличной (матричной) записью системы (1):

$$\left(\begin{array}{c|c} a_{11}a_{12}\ldots a_{1n} & b_1 \\ a_{21}a_{22}\ldots a_{2n} & b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots \\ a_{m1}a_{m2}\ldots a_{mn} & b_m \end{array}\right) \qquad (2)$$

Следует выписать матрицу коэффициентов при неизвестных системы, присоединить к ней столбец из свободных членов, для удобства отделенный вертикальной чертой, и все преобразования выполнять над строками этой "расширенной" матрицы.

Пример 1. Решить систему: $\begin{cases} 2x+y+z=1, \\ 4x+y=-2, \\ -2x+2y+z=7. \end{cases}$

□ Подвергнем преобразованиям расширенную матрицу этой системы - сначала первую строку, умноженную на 2, вычтем из второй, а к третьей строке прибавим первую. Затем, новую вторую строку, умноженную на 3, прибавим к третьей:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 0 & -2 \\ -2 & 2 & 1 & 7 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & -4 \\ 0 & 3 & 2 & 8 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & -4 & -4 \end{array}\right).$$ Приходим к системе $\begin{cases} 2x+y+z=1, \\ -y-2z=-4, \\ -4z=-4, \end{cases}$

обладающей единственным решением $z=1$; $y=2$; $x=-1$. Исходная система оказалась совместной, определенной. ■

Пример 2. Решить систему: $\begin{cases} 2x+2y-3z+3t=2; \\ 2x+3y+3z+4t=3; \\ 4x+3y+4z+3t=4; \\ 6x+y+3z-2t=3. \end{cases}$

□ Преобразуем расширенную матрицу системы. Для этого мы вначале из второй строки вычтем первую, из третьей - удвоенную первую, а из четвертой-утроенную первую. Затем полученную вторую строку прибавим к третьей и, умножив на 5, прибавим к четвертой строке. Наконец, новую третью строку, умножив на 3, вычтем из четвертой строки.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 2 & 3 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 3 & 4 & 3 \\ 4 & 3 & 4 & 3 & 4 \\ 6 & 1 & 3 & -2 & 3 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 2 & 3 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & -3 & 0 \\ 0 & -5 & -6 & -11 & -3 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 2 & 3 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -6 & -6 & 2 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 2 & 3 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right)$$

Мы пришли к системе, содержащей уравнение $0x+0y+0z+0t=-1$, не имеющее решений. Исходная система будет, следовательно, несовместной. ■

Пример 3. Решить систему : $\begin{cases} x+y+z+t=1, \\ x+y-2z-t=0, \\ x+y+4z+3t=2, \\ x+y+7z+5t=3. \end{cases}$

□ Преобразуем расширенную матрицу системы:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 4 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 7 & 5 & 3 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -3 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 6 & 4 & 2 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -3 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$.Последней матрице соответствует

система линейных уравнений ступенчатого вида: $\begin{cases} x+y+z+t=1, \\ -3z-2t=-1. \end{cases}$ Эта система совместна и, притом, неопределена. Из последнего уравнения полученной системы выражаем z через t: $z=\frac{1-2t}{3}$ и подставляем в первое уравнение, в результате чего будем иметь: $x+y+\frac{1+t}{3}=1$, откуда $x=\frac{2-3y-t}{3}$. Получили выражения неизвестных x и z через так называемые *свободные неизвестные* y и t: $x=\frac{2}{3}-y-\frac{1}{3}t$, $z=\frac{1}{3}-\frac{2}{3}t$, где y и t - любые числа. Эти равенства называют *общим решением* системы. Давая свободным неизвестным произвольные значения в общем решении, мы получим все решения неопределенной системы. Например, при $y=1$; $t=2$; будем иметь $x=-1$; $z=-1$, т.е. получим *частное решение* $x=-1; y=1; z=-1; t=2$ или $(-1;1;-1;2)$. ■

К определителю (детерминанту) 2-го порядка приходим, решая систему $\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2=b_1, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2=b_2. \end{cases}$ Обозначим $\Delta=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{21}a_{12}$ - *определитель данной системы*. Правило Крамера в случае, если $\Delta\neq 0$, даёт единственное решение системы в виде $x_1=\frac{\Delta_1}{\Delta}, x_2=\frac{\Delta_2}{\Delta}$, где $\Delta_1=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}$; $\Delta_2=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{22} & b_2 \end{vmatrix}$.

Аналогично вводится *определитель 3-го порядка*:

$$\Delta=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32}.$$

Правило Крамера дает единственное решение системы

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3=b_1,\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3=b_2,\\ a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3=b_3.\end{cases}$$

в случае, если $\Delta\neq 0$: $x_1=\dfrac{\Delta_1}{\Delta}, x_2=\dfrac{\Delta_2}{\Delta}, x_3=\dfrac{\Delta_3}{\Delta}$. Здесь Δ_i (i=1,2,3) получается из Δ заменой i-го столбца столбцом свободных членов.

Пример 4. Решить систему уравнений с параметром a: $\begin{cases} ax+y=1,\\ x+ay=1.\end{cases}$

☐ Определитель данной системы линейных уравнений $\begin{vmatrix} a & 1\\ 1 & a\end{vmatrix}=a^2-1=(a-1)(a+1)$ обращается в нуль только при a=1 и при a= -1, поэтому при всех других значениях параметра a решение будет единственно и может быть получено по правилу Крамера: $\Delta_x=\begin{vmatrix} 1 & 1\\ 1 & a\end{vmatrix}=a-1$, $\quad\Delta_y=\begin{vmatrix} a & 1\\ 1 & 1\end{vmatrix}=a-1, x=y=\dfrac{a-1}{(a-1)(a+1)}=\dfrac{1}{a+1}$.

Если a=1, то имеем систему из двух одинаковых уравнений $x+y=1$, откуда получим общее решение $x=1-y$.

Если a= -1, то имеем систему $\begin{cases} -x+y=1,\\ x-y=1.\end{cases}$ Сложив оба уравнения, получим 0–2, что говорит о несовместности системы.

Таким образом, при $a\neq\pm 1$ $\quad x=y=\dfrac{a-1}{(a-1)(a+1)}=\dfrac{1}{a+1}$;

при a=1 $x=1-y$, где y - любое; при a= -1 система несовместна. ■

Контрольные вопросы

1. Всегда ли система двух линейных уравнений с тремя неизвестными имеет бесконечное множество решений ?
2. Всегда ли сумма двух решений системы линейных уравнений является также решением этой системы ? А полусумма ?
3. Может ли система k линейных уравнений с p неизвестными ($p>k$) иметь одно решение ? Тот же вопрос для $p<k$.
4. Пусть имеем две системы линейных уравнений:

$$\begin{cases} a_{11}x+a_{12}y+a_{13}z=1,\\ a_{21}x+a_{22}y+a_{23}z=1,\\ a_{31}x+a_{32}y+a_{33}z=1.\end{cases}\quad (А)\qquad \begin{cases} a_{11}x+a_{12}y+a_{13}z=0,\\ a_{21}x+a_{22}y+a_{23}z=0,\\ a_{31}x+a_{32}y+a_{33}z=0.\end{cases}\quad (Б)$$

Верны ли следующие утверждения:

a) если система (Б) имеет бесконечное множество решений, то и система (А) имеет бесконечное множество решений;

b) если система (Б) имеет единственное решение,то и система (А) имеет единственное решение;

c) если система (А) не имеет решений, то система (Б) не имеет решений ?

5. Даны две системы линейных уравнений

$$\begin{cases} a_1x+b_1y+c_1z=d_1,\\ a_2x+b_2y+c_2z=d_2.\end{cases}\quad (1)\qquad \{(a_1+a_2)x+(b_1+b_2)y+(c_1+c_2)z=d_1+d_2,\quad (2)$$

где единственное уравнение системы (2) получено в результате сложения уравнений системы (1). Эквивалентны ли системы (1) и (2)?

6. Какие из следующих высказываний верны:

a) если детерминант системы равен нулю, то система не имеет решений;

b) если квадратная система имеет бесконечно много решений , то детериминант системы равен нулю;

c) если детерминант не равен нулю , то система не имеет решений ?

Задачи и упражнения

[4, № 400 (a,c,f,h), 443 (a,c,e), 444 (a,b,c,e), 447 (a,d,e)];
[5, № 567, 573, 575, 578-581,691-693, 699, 702, 704, 712, 713, 715, 717].

Индивидуальные задания

Задача 1. Решить системы уравнений:

	(a)	(b)	(c)
1	$\begin{cases} x+y+z=2,\\ x+2y=1,\\ x+3y-z=0,\\ x+4y-2z=-1,\\ x+5y-3z=-2;\end{cases}$	$\begin{cases} x-y-z-t+7=0,\\ 2x-z-t+4=0,\\ x+3y-2z-1=0,\\ 3x-3y+3z-5t+9=0;\end{cases}$	$\begin{cases} 2x+3y+4z+t=1,\\ 4x+y+3z+2t=3,\\ 2x+8y+9z+t=0,\\ 6x+4y+7z+3t=5;\end{cases}$
2	$\begin{cases} x+2y+2z+3t=1,\\ 2x+3y+4z+4t=3,\\ 2x+2y+3z+3t=1,\\ 3x+3y+5z+4t=2;\end{cases}$	$\begin{cases} x-2y+z-t=-1,\\ 2x-3y+2z-2t=0,\\ 3x-4y+3z-3t=1;\end{cases}$	$\begin{cases} 3x+y+z+2t+2=0,\\ 6x+y+2z+3t+6=0,\\ 6x+y+2z+3t+6=0,\\ 3x+2y+3z+7t-6=0,\\ 9x+2y+3z+5t+8=0,\end{cases}$
3	$\begin{cases} x+2y+z+3t=2,\\ 2x+3y+3z+2t=1,\\ 5x-6y+9z-t=0.\end{cases}$	$\begin{cases} x+3y-2z-t+7=0,\\ 2x+y-4z-2t+4=0,\\ x+2y-2z-t-5=0,\\ 2x+3y-4z-2t+8=0.\end{cases}$	$\begin{cases} 3x+y+z+t=1,\\ 9x+y+3z+3t=1,\\ 6x-2z+t=-6,\\ 3x+3y+5z+t=7,\\ 3x+y+5z-t=5.\end{cases}$

4	$\begin{cases} 3x+3y+2z+4t=3, \\ 3x+2y-3z+3t=2, \\ 6x+5y+4z+5t=1, \\ 6x+5y+6z+9t=0; \end{cases}$	$\begin{cases} x+y+z+2t=3, \\ 3x+2y+z+8t=8, \\ x+4y+2z+t=6, \\ 2x+2y+z+5t=6, \\ 2x+y+z+5t=5, \end{cases}$	$\begin{cases} x-y+3z=2, \\ 2x+y+5z+t=2, \\ 2x+y+7z=1, \\ 3x+8z+5t=8; \end{cases}$
5	$\begin{cases} x+4y-z+2t=2, \\ 2x-5y-z+3t=4, \\ 2x-5y-5z+2t=-1, \\ 3x+9y-6z+2t=-1, \\ 2x+5y+3z+4t=9. \end{cases}$	$\begin{cases} x-2y-2z-t+2u=1, \\ 2x+3y-3z-2t+3u=2, \\ x+y-z-t+u=1. \end{cases}$	$\begin{cases} 2x+2y+3z+3t=2, \\ 2x+3y-3z+4t=3, \\ 4x+3y+4z+3t=4, \\ 6x+y-3z-2t=3. \end{cases}$
6	$\begin{cases} 2x+2y+z=2, \\ 4x+6y+z=0, \\ 6x-y+z=9, \\ 6x+7y+2z=3, \\ 2x-3y+2z=9. \end{cases}$	$\begin{cases} x-2y+2z-4t+3=0, \\ 2x-2y+3z-5t+2=0, \\ 2x-3y+3z-6t+5=0, \\ x-y+3z-4t-2=0. \end{cases}$	$\begin{cases} x+2y+3z+4t+3u=2, \\ 2x+3y+4z+3t+2u=1, \\ 3x+4y+5z+2t+u=0, \\ x+3y+5z+9t+7u=6, \end{cases}$
7	$\begin{cases} x+y-2z+2t=-2, \\ 3x+y-5z+5t=-6, \\ 2x+6y-2z+7t=9, \\ x+3y-3z+6t=1. \end{cases}$	$\begin{cases} x+2y+2z-2u=4, \\ 2x+2y+3z-2t-2u=5, \\ x+y+z-2u=2, \\ 4x+3y+4z-2t-6u=7. \end{cases}$	$\begin{cases} 4x+3y+2z+t=1, \\ 4x+4y+3z+2t=2, \\ 8x+5y+3z+t=1, \\ 4x+y-t=1. \end{cases}$
8	$\begin{cases} x+2y-z+t=1, \\ 3x+2y-3z+t-2u=5, \\ 4x+3y-4z+t-3u=7, \\ 2x+3y-2z+t-u=2. \end{cases}$	$\begin{cases} x+2y-z+t+2=0, \\ 2x+4y-z+t+1=0, \\ x+2y-2z+2t+5=0, \\ 3x+6y-z+t=0. \end{cases}$	$\begin{cases} 4x+2y+3z+t=6, \\ 2x+3y+2z+2t=2, \\ 3x+4y+3z+2t=3, \\ 4x+6y+3z+3t=2. \end{cases}$
9	$\begin{cases} x+y+z+2t=2, \\ 2x+3y+4z+4t=3, \\ 3x+5y+7z+6t=5. \end{cases}$	$\begin{cases} x+2y-z+t+2=0, \\ 2x+4y-z+t+1=0, \\ x+2y-2z+2t+5=0, \\ 3x+6y-z+t=0. \end{cases}$	$\begin{cases} 4x+2y-3z+t=6, \\ 4x+3y+3z+2t=7, \\ 8x+2y+3z-t=8, \\ 8x+y+3z-4t=9 \\ 4x-y-3t=1. \end{cases}$
10	$\begin{cases} x+y+3z+2t=4, \\ 3x+8z+7t=5, \\ 2x-y+z+4t=-3, \\ 2x-y+5z+3t=1. \end{cases}$	$\begin{cases} x+2y+z-2t-u=1, \\ 3x+2y+z-2t+u=5, \\ 4x+y+z-t-3u=6, \\ 2x+y+z-t+u=2. \end{cases}$	$\begin{cases} 2x+3y+3z=1, \\ 3x+3y+4z=2, \\ x+3y+2z=0, \\ 5x+3y+6z=3, \\ x-3y=2. \end{cases}$
11	$\begin{cases} x+2y-3z-t-u=0, \\ 3x+2y-5z+t-2u=-2, \\ 2x+3y-5z-t-u=1, \end{cases}$	$\begin{cases} x+3y+2z+4t=3, \\ 2x+4y+z+3t=1, \\ 3x+2y+z+4t=2, \\ 4x+3y+3t=1. \end{cases}$	$\begin{cases} 4x+3y+3z+t=-2, \\ 4x+y+3z=0, \\ 8x+8y+3z=1, \\ 8x+4y+3z-t=1 \\ 4x+5y+6z+4t=-7. \end{cases}$

12	$\begin{cases} x+3y+z=0, \\ 2x+2y+z=1, \\ 2x+6y-z=3, \\ 3x+5y+2z=1, \\ x+3y-2z=3. \end{cases}$	$\begin{cases} 3x+2y+4z+t+2u=3, \\ 3x+4y+z+2t+3u=2, \\ 3x+8y-5z+4t+5u=0, \\ 2y-3z+t+u=2. \end{cases}$	$\begin{cases} x+2y+2z-4t=4, \\ 2x+3y+3z-6t=7, \\ 3x+2y+2z-4t=8, \\ 2x+y+z-2t=5. \end{cases}$
13	$\begin{cases} x+2y+3z=3; \\ 2x+3y+4z=4; \\ 3x+3y+4z=2; \\ 4x+4y+5z=4. \end{cases}$	$\begin{cases} 2x+y+z+3t=2, \\ 4x+y+3z+t=8, \\ 6x+y+z+6t=7, \\ 2x+5y-3z+7t=2. \end{cases}$	$\begin{cases} x-y+2z+4t+3u=2, \\ 4x-4y+3z+3t+2u=3, \\ 2x-2y+3z+2t-4u=3, \\ 3x-3y+2z+t+u=2. \end{cases}$
14	$\begin{cases} x+2y+z+2t=2, \\ 2x+3y+2z+3t=2, \\ 4x+5y+4z+5t=3, \\ 5x+6y+5z+6t=3. \end{cases}$	$\begin{cases} 3x+y+z+2t=3, \\ 3x+2y+2z+2t=4, \\ 6x+y-3z+4t=5, \\ 3x+4y+4z+4t=2, \\ 9x+y-4z+6t=7. \end{cases}$	$\begin{cases} x-2y+z+t=2, \\ 2x-4y+2z-t=7, \\ 3x-6y+3z-4t=8. \end{cases}$
15	$\begin{cases} x+2y+z-t=4, \\ 2x+3y-z-3t=7, \\ 2x+y-z-5t=5, \\ 3x+y-3z-8t=7. \end{cases}$	$\begin{cases} 3x+2y+z+2t+1=0, \\ 3x+4y+z+3t+2=0, \\ 6x+2y-z+2t+1=0, \\ 9x+4y+2z+8t-2=0, \\ 3x-2y-t-1=0. \end{cases}$	$\begin{cases} x+y+z=2, \\ x+2y+3z=2, \\ x+3y+6z=2, \\ 3x+2y=6, \\ 2x+5y+9z=3. \end{cases}$

Задача 2.

a) Составить систему трех линейных уравнений с тремя неизвестными, имеющую данное решение **a**. Имеет ли построенная система и другие решения?

b) Составить систему трех линейных уравнений с тремя неизвестными, имеющую данные решения **a** и **b**. Найти все решения построенной системы уравнений.

	a	b		a	b
1	(-1,-1,3)	(1,-2,4)	9	(1,-2,4)	(3,-2,-2)
2	(2,0,1)	(2,2,-3)	10	(2,2,-3)	(-2,3,-1)
3	(1,2,3)	(2,-4,1)	11	(2,-4,1)	(1,3,-2)
4	(2,-1,2)	(0,3,-1)	12	(0,3,-1)	(-2,3,-2)
5	(1,2,-2)	(4,-1,-1)	13	(4,-1,-1)	(-2,1,0)
6	(0,1,2)	(2,0,-3)	14	(2,0,-3)	(4,-3,-1)
7	(-1,0,2)	(2,3,4)	15	(2,3,4)	(-3,1,1)
8	(4,2,1)	(3,2,0)			

Задача 3. Найти многочлен $f(x)$ не выше 4-й степени, зная его значения $f(1)$, $f(2)$, $f(3)$, $f(-1)$, $f(-2)$:

	$f(1)$	$f(2)$	$f(3)$	$f(-1)$	$f(-2)$
1	1	-1	1	-7	-29
2	-3	-2	11	7	6
3	-5	-2	13	1	-2
4	-1	-1	7	-1	-13
5	-1	-1	47	-1	47
6	-4	-13	4	-4	-1
7	1	9	41	9	1
8	7	17	39	-1	-11
9	8	21	46	-6	-19
10	5	15	37	-3	-13
11	1	-1	17	17	127
12	1	31	145	1	-5
13	-7	-4	11	-1	-4
14	-5	-1	15	-1	-5
15	-1	3	19	3	-1

Задача 4. В пространстве даны точки $A(2,2,-1)$; $B(2,-1,2)$; $C(-2,3,-2)$; $H(-1,2,2)$; $K(-2,-2,-2)$; $M(-2,-2,3)$; $P(1,1,1)$; $T(3,-2,-2)$. Составить уравнение плоскости:

1	*ABC*	2	*BCH*	3	*CHK*	4	*HKM*	5	*KMP*	6	*MPT*
7	*APT*	8	*ABT*	9	*ACK*	10	*BHM*	11	*CKP*	12	*HMT*
13	*AKP*	14	*BMT*	15	*ACP*						

Задача 5. Если уравнение $ax+by+cz=d$ задает в пространстве плоскость α, то обозначим $\alpha=(a,b,c,d)$. В пространстве даны плоскости $\alpha=(1,1,-1,0)$, $\beta=(0,1,2,-1)$, $\gamma=(2,1,0,2)$, $\delta=(1,0,1,1)$, $\mu=(1,1,1,-1)$, $\nu=(2,-1,1,2)$, $\eta=(3,0,1,-1)$. При помощи правила Крамера найти точку пересечения плоскостей:

1	α, β, γ	6	α, β, δ	11	β, γ, δ
2	α, δ, μ	7	α, μ, η	12	δ, μ, η
3	δ, μ, ν	8	β, μ, ν	13	β, γ, ν
4	γ, μ, η	9	α, γ, ν	14	β, δ, μ
5	γ, δ, ν	10	γ, ν, η	15	μ, η, ν

Задача 6. Решить систему уравнений с параметром a:

1) $\begin{cases}(2-a)x+6y=1;\\ 6x+(2-a)y=1.\end{cases}$ 2) $\begin{cases}(a-1)x-6y=-3;\\ ax+(a-2)y=a.\end{cases}$ 3) $\begin{cases}(a-3)x+5y=8;\\ 5x+(a-3)y=a.\end{cases}$

4) $\begin{cases}ax+2ay=0;\\ x+(a-1)y=1.\end{cases}$ 5) $\begin{cases}2x+(a+2)y=a;\\ (a-3)x-3y=-1.\end{cases}$ 6) $\begin{cases}(a+2)x-2ay=4a;\\ x+(a-3)y=2.\end{cases}$

7) $\begin{cases}(a-6)x+4y=12;\\ 6x+(a+4)y=a.\end{cases}$ 8) $\begin{cases}x+(a-3)y=7;\\ (a+1)x+5y=7.\end{cases}$ 9) $\begin{cases}ax+4y=2;\\ 9x+ay=3.\end{cases}$

10) $\begin{cases}ax+(5-a)y=5;\\ x+(a+3)y=5a.\end{cases}$ 11) $\begin{cases}(a-1)x+2y=2;\\ 2x+(a-1)y=a.\end{cases}$ 12) $\begin{cases}(2+a)x+(18-a)x=15\\ x+ay=a\end{cases}$

13) $\begin{cases}2ax+(a+3)y=9;\\ (a+2)x+ay=a.\end{cases}$ 14) $\begin{cases}(a-3)x+12y=10;\\ x+(a+1)y=a.\end{cases}$ 15) $\begin{cases}2x+(a-1)y=0;\\ (2-a)x-y=a.\end{cases}$

Задача 7. Решить 2-3 из дополнительных задач.

Дополнительные задачи и упражнения

1. Эквивалентны ли системы уравнений:

a) $\begin{cases}x+y+z=2,\\ x+2y+3z=3,\\ x+3y+5z=5\end{cases}$ и $\begin{cases}x+y-2z=1,\\ x-2y+z=1,\\ -2x+y+z=1.\end{cases}$ b) $\begin{cases}x+y=3,\\ y+z=5,\\ z+x=4\end{cases}$ и $\begin{cases}y-x=1,\\ z-y=1,\\ x-z=-2\end{cases}$

c) $\begin{cases}x+y+z=3,\\ x+2y+3z=6,\\ x+3y+5z=9\end{cases}$ и $\begin{cases}x+y+z=3,\\ x+2y+3z=6,\\ x+5y+7z=12\end{cases}$ d) $\begin{cases}x+y-2z=1,\\ x-2y+z=1,\\ -2x+y+z=1\end{cases}$ и $\begin{cases}x+y-2z=0,\\ x-2y+z=0,\\ -2x+y+z=0\end{cases}$?

2. Записать в общем виде систему двух линейных уравнений с тремя неизвестными. Доказать, что если в этой системе:
   a) к первому уравнению почленно прибавить второе уравнение;
   b) из второго уравнения почленно вычесть первое уравнение, умноженное на 3;
   c) к удвоенному первому уравнению почленно прибавить утроенное второе,
   то получится система, эквивалентная данной.
3. Доказать, что если система линейных уравнений имеет два различных решения, то она имеет бесконечно много решений.
4. Пусть система (А) состоит из 3-х линейных уравнений, которые мы кратко обозначим (1), (2), (3), а система (Б) состоит из уравнений (1)+(2), (2)+(3), (3)+(1). Эквивалентны ли системы (А) и (Б)?
5. Пусть система (А) состоит из уравнений (1),(2),(3), а система (Б) - из уравнений (1)-(2), (2)-(3), (3)-(1). Обязательно ли эквивалентны системы (А) и (Б)?
6. Даны две системы линейных уравнений

$$\begin{cases}a_1x+b_1y+c_1z=d_1,\\ a_2x+b_2y+c_2z=d_2,\end{cases} \text{(А)};\qquad \begin{cases}a_1x+b_1y+c_1z=0,\\ a_2x+b_2y+c_2z=0.\end{cases} \text{(Б)}$$

   a) Доказать, что если $\mathbf{a}=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$, $\mathbf{b}=(\beta_1,\beta_2,\beta_3)$ - два решения системы А, то тройка чисел $(\alpha_1-\beta_1,\alpha_2-\beta_2,\alpha_3-\beta_3)$, которую мы обозначим через **a-b**, является решением системы (Б).

b) Доказать, что если **a** является решением системы (А), **b** - решением системы (Б), то **a+b** является решением системы (А).

c) Доказать, что сумма любых двух решений системы (Б) также является решением системы (Б).

d) Верно ли, что сумма любых двух решений системы (А) также является решением системы (А)?

e) Пусть **a** и **b** - два решения системы (А); обязательно ли 2**a**-**b** является решением системы (А)?

7. Доказать, что если все элементы детерминанта 3-го порядка равны ± 1, то детерминант есть четное число.

8. Решить системы с параметрами a и b:

a) $\begin{cases} x+y+az=1, \\ x+ay+z=1, \\ ax+y+z=1; \end{cases}$ b) $\begin{cases} ax+2z=2, \\ 5x+2y=1, \\ x-2y+bz=3. \end{cases}$

2. ОПРЕДЕЛИТЕЛИ

Понятия:

1) перестановки символов;
2) инверсии в перестановках;
3) транспозиции;
4) подстановки;
5) четность (нечетность) перестановок и подстановок;
6) определитель квадратной матрицы;
7) транспонированная матрица;
8) минор;
9) дополнительный минор;
10) алгебраическое дополнение.

Факты:

1) число перестановок n символов;
2) изменение четности перестановок при транспозициях;
3) число четных перестановок (подстановок);
4) свойства определителей:

- определитель матрицы не меняется при ее транспонировании;
- при умножении строки (столбца) матрицы на фиксированное число ее определитель также умножается на это число;
- разложение определителя в сумму двух определителей;
- изменение знака определителя при перестановке двух строк (столбцов);

- определитель матрицы не меняется, если в ней к одной строке прибавить другую, умноженную на данное число;
- определитель треугольной матрицы равен произведению всех ее диагональных элементов;

5) теорема о произведении минора на его алгебраическое дополнение;
6) теорема Лапласа;
7) разложение определителя по строке (столбцу);
8) теорема о сумме произведений элементов строки на алгебраические дополнения соответствующих элементов другой строки;
9) формулы Крамера.

Перестановкой элементов множества $M=\{a_1,a_2,...,a_n\}$ принято называть любое упорядоченное расположение его элементов. В дальнейшем ограничимся рассмотрением перестановок n-элементного подмножества $\{1,2,\ldots,n\}$ множества натуральных чисел. Если $i>j$, но в перестановке число i расположено левее числа j, то говорят, что i образует *инверсию* с j. Так, в перестановке 2,1,5,4,3,6 числа 5 и 3 образуют инверсию, а 4 и 6 инверсии не образуют. *Четность перестановки* определяется четностью числа инверсий, образованных всеми элементами перестановки. Всего в данной перестановке 4 инверсии, поэтому она четна. *Транспозиция*, т.е. перемена местами двух чисел, меняет четность на противоположную. Так транспозиция (1,6) приводит к перестановке 2,6,5,4,3,1, элементы которой образуют 11 инверсий.

<u>Пример 1.</u> Определить число инверсий в перестановке 3,6,...,3n,1,4,...,3n-2,2,5,...,3n-1.

□ Данная перестановка состоит из трех n-элементных частей. Числа, входящие в каждую часть, между собой инверсий не образуют, так как расположены в порядке возрастания. Найдем количество инверсий, которые образуют элементы второй группы с элементами первой. Число 1 образует n инверсий, число 4 образует n-1 инверсию и т.д., число 3n-2 образует 1 инверсию. Итого: $n+(n-1)+\ldots+1=\dfrac{n(n+1)}{2}$ инверсий. Ясно, что такое же количество инверсий образует третья группа элементов с первой. Третья группа со второй образует $(n-1)+(n-2)+\ldots+1=\dfrac{n(n-1)}{2}$. Всего инверсий $\dfrac{1}{2}n(3n+1)$. ■

Подстановка π степени n определяется как взаимнооднозначная функция $\pi=\begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & n \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \ldots & \alpha_n \end{pmatrix}$. Здесь числа $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n$ принадлежат множеству $\{1,2,\ldots,n\}$ и составляют перестановку. Четность подстановки совпадает с четностью суммы числа инверсий в перестановках, образованных верхней и нижней строками. Общее количество подстановок на n-элементном множестве равно $1\cdot 2\cdot\ldots\cdot n=n!$, причем количество четных и нечетных совпадает и равно $\dfrac{n!}{2}$.

Определитель (или *детерминант*) квадратной матрицы $A=(a_{ij})$ порядка n мы введем в соответствии с учебным пособием [2]. А именно:

$$\det A=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\sum_{\begin{pmatrix} 1 & 2 \ldots & n \\ \alpha_1 & \alpha_2 \ldots & \alpha_n \end{pmatrix}} a_{1\alpha_1}a_{2\alpha_2}\ldots a_{n\alpha_n}(-1)^t.$$

Здесь суммирование проводится по всевозможным подстановкам степени n чисел $1,2,\ldots,n$. Знак каждого члена определяется сомножителем $(-1)^t$, где t - количество инверсий, образованной элементами подстановки $\begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & n \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \ldots & \alpha_n \end{pmatrix}$.

Таким образом, *определитель n-го порядка* представляет собой сумму $n!$ членов. Каждый член - произведение n элементов матрицы A, взятых по одному и только по одному из каждой строки и каждого столбца. Член входит в сумму со знаком "+", если подстановка, составленная из индексов сомножителей, четна, и "-", если подстановка нечетна.

В ряде случаев определитель легко вычислить, воспользовавшись его свойствами:

- при умножении всех элементов строки матрицы на фиксированное число её определитель умножается на это число;
- определитель не изменится, если к одной строке прибавить другую, умноженную на число;
- знак определителя меняется на противоположный при перестановке двух строк.

Два последних свойства позволяют привести матрицу определителя к треугольному виду, тогда определитель с точностью до знака совпадет с произведением диагональных элементов (проверить!):

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn} \quad \text{и} \quad \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,n-1} & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2,n-1} & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix}=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}a_{1n}a_{2,n-1}\cdots a_{n1}.$$

Поскольку определитель не меняется при транспонировании его матрицы, указанные преобразования можно производить как со строками, так и со столбцами.

Пример 2. Вычислить определитель матрицы $A=\begin{pmatrix} 3 & -3 & -5 & 8 \\ -3 & 2 & 4 & -6 \\ 2 & -5 & -7 & 5 \\ -4 & 3 & 5 & -6 \end{pmatrix}$.

□ $$|A|=\begin{vmatrix} 3 & -3 & -5 & 8 \\ -3 & 2 & 4 & -6 \\ 2 & -5 & -7 & 5 \\ -4 & 3 & 5 & -6 \end{vmatrix}=\frac{1}{3}\begin{vmatrix} 3 & -3 & -5 & 8 \\ 0 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & -9 & -11 & -1 \\ 0 & -7 & -9 & 4 \end{vmatrix}=\frac{1}{3}\begin{vmatrix} 3 & -3 & -5 & -8 \\ 0 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & -19 \\ 0 & 0 & 0 & 9 \end{vmatrix}=\frac{1}{3}3(-1)(-2)9=18.$$

Здесь ко второй строке прибавим первую; а к четвертой - третью, умноженную на 2. К третьей строке, умноженной на 3, прибавим первую строку, умноженную на (-2), затем к полученным на первом шаге третьей и четвертой строке прибавим вторую строку умноженную соответственно на (-9) и на (-7). На последнем шаге мы к полученной на втором шаге четвертой строке прибавим третью, умноженную на (-1). В результате всех преобразований мы получили определитель с треугольной матрицей. ■

Пример 3. Вычислить определитель

$$\Delta=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \ldots n-2 & n-1 & n \\ -1 & 1 & 0 \ldots 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \ldots 0 & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 \ldots -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \ldots 0 & -1 & 1 \end{vmatrix}.$$

□ Прибавим к каждому столбцу все последующие. Определитель Δ не изменится, однако, его матрица будет иметь треугольный вид:

$$\Delta=\begin{vmatrix} 1+\ldots+n & 2+\ldots+n & 3+\ldots+n & n-1+n & n \\ 0 & 1 & 0 \ldots\ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \ldots\ldots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 \ldots\ldots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \ldots\ldots & 0 & 1 \end{vmatrix}=1+2+\ldots+n=\frac{n\cdot(n+1)}{2}. \quad ■$$

Одним из основных приемов, применяемых при вычислении определителей порядка $n>3$, является сведение к вычислению определителей более низкого порядка. При этом используются понятия минора и алгебраического дополнения к минору. Пусть Δ - определитель порядка n. Выберем произвольные k строк и k столбцов $(1\le k<n)$. Определитель, составленный из элементов, стоящих на пересечении этих строк и столбцов, называется *минором k-го порядка* определителя Δ. Например, в определителе D порядка 5 фиксируем 2,3,5 строки, 1,2,4 столбцы.

$$D=\begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 5 & 7 \\ 3 & 3 & 2 & 1 & 5 \\ 2 & 2 & 5 & 3 & 1 \end{vmatrix}$$

Элементы, стоящие на пересечении указанных строк и столбцов (они взяты в кружочки), образуют определитель M (минор) порядка 3. Элементы, стоящие на пересечении оставшихся строк и столбцов (в нашем случае 1, 4 строки, 3, 5 столбцы) образуют минор M_1, дополнительный к минору M. Выражение $(-1)^{S_M}M_1$, где S_M - сумма номеров строк и столбцов, в которых стоит минор M, называется *алгебраическим дополнением* к M.

В нашем примере $M_1 = \begin{vmatrix} -1 & 4 \\ 2 & 5 \end{vmatrix}$, а алгебраическое дополнение к минору M равно $(-1)^{2+3+3+1+2+4} M_1 = -M_1$.

Известно, что произведение минора на его алгебраическое дополнение дает несколько членов данного определителя. Более того, если зафиксируем произвольные k строк определителя Δ порядка n ($1 \le k < n$), то сумма произведений всех миноров k-го порядка, построенных на элементах данных строк, на соответствующие алгебраические дополнения, равна определителю Δ (теорема Лапласа). Ясно, что теорема Лапласа и дает способ "понижения порядка" определителей при их вычислении.

В частности $\Delta = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \ldots + a_{in}A_{in} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}A_{ij}$. Здесь $a_{i1}, \ldots, a_{in}$ - элементы i-й строки определителя Δ (миноры первого порядка), а $A_{i1}, \ldots, A_{in}$ - их алгебраические дополнения. Аналогичные результаты справедливы и для столбцов определителя. Например

$$\Delta = \begin{vmatrix} 4 & 2 & 0 & -2 \\ 3 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 5 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 0 & -3 \end{vmatrix} = 4 \cdot (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 5 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & -3 \end{vmatrix} + 2 \cdot (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & -3 \end{vmatrix} + 0 \cdot (-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 5 & -1 \\ 2 & -1 & -3 \end{vmatrix} +$$

$$+(-2) \cdot (-1)^{1+4} \begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 5 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{vmatrix}.$$ Мы получили разложение определителя Δ по элементам первой строки. Как видно, целесообразно разлагать определитель по той строке или столбцу, которые содержат больше нулей. В связи с этим следует вначале путем преобразования матрицы определителя сделать в строке или столбце побольше нулей, а потом уже разлагать определитель по полученной строке или столбцу.

Пример 4. Вычислить определитель $\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -3 & -1 & 3 \\ -1 & -4 & -7 & 2 \\ 3 & 3 & 5 & -5 \\ 2 & -2 & 1 & 2 \end{vmatrix}$.

□ Попытаемся в какой-либо строке (столбце) сделать все элементы, кроме одного, нулями. В результате определитель будет равен ненулевому элементу, умноженному на его алгебраическое дополнение. Стоит запомнить, что если хотят получить нули в строке, то, как правило, оперируют со столбцами. В нашем случае мы преобразуем в нули элементы 4-й строки, кроме a_{43}. Для этого вычтем удвоенный третий столбец из первого и четвертого, прибавим удвоенный третий столбец ко второму. Получим

$$\Delta = \begin{vmatrix} 4 & -5 & -1 & 5 \\ 13 & -18 & -7 & 16 \\ -7 & 13 & 5 & 15 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}, \quad \Delta = a_{43}A_{43}, \qquad \text{т.е. } \Delta = 1 \cdot (-1)^{4+3} \begin{vmatrix} 4 & -5 & 5 \\ 13 & -18 & 16 \\ -7 & 13 & 15 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 4 & -5 & 5 \\ 13 & -18 & 16 \\ -7 & 13 & 15 \end{vmatrix}.$$

Поступая аналогичным образом для полученного определителя 3 порядка, имеем

$$\Delta = -\begin{vmatrix} -1 & 0 & 5 \\ -3 & -2 & 16 \\ -22 & 28 & 15 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -3 & -2 & 1 \\ -22 & 28 & -95 \end{vmatrix} = -(-1)^2 \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 28 & -95 \end{vmatrix} = -(190 - 28) = -162. \quad ■$$

Метод вычисления определителей, рассмотренный выше, становится громоздким и практически неприменимым в случае определителей произвольного порядка n с числовыми или буквенными элементами. Общих методов вычисления таких определителей не существует. Рассмотрим прием, позволяющий вычислять определители некоторых специальных типов.

Пример 5. Вычислить определитель n-го порядка:

□ $$\Delta_n = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \ldots & n-1 & n \\ -1 & x & 0 \ldots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & x \ldots & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 \ldots & x & 0 \\ 0 & 0 & 0 \ldots & -1 & x \end{vmatrix}.$$

Разложим данный определитель по элементам последнего столбца:

$$\Delta_n = (-1)^{n+1} \bullet n \begin{vmatrix} -1 & x & 0 \ldots 0 & 0 \\ 0 & -1 & x \ldots 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \ldots 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 \ldots -1 & x \\ 0 & 0 & 0 \ldots 0 & -1 \end{vmatrix} + x \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \ldots & n-1 \\ -1 & x & 0 \ldots & 0 \\ 0 & -1 & x \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 \ldots & x \end{vmatrix}.$$

Первый определитель - верхнетреугольный и равен $(-1)^{n-1}$, а второй- такого же вида, но уже порядка $(n-1)$.

Итак, $\Delta_n = (-1)^{n+1}(-1)^{n-1} n + x\Delta_{n-1} = (-1)^{2n} n + x\Delta_{n-1}$. Таким образом, получим рекуррентное соотношение $\Delta_n = n + x\Delta_{n-1}$. Применяя эту формулу для Δ_{n-1}, найдем: $\Delta_{n-1} = (n-1) + x\Delta_{n-2}$, откуда $\Delta_n = n + x((n-1) + x\Delta_{n-2}) = n + (n-1)x + x^2\Delta_{n-2}$. Аналогично $\Delta_{n-2} = (n-2) + x\Delta_{n-3}$; поэтому $\Delta_n = n + (n-1)x + x^2((n-2) + x\Delta_{n-3}) =$ $= n + (n-1)x + (n-2)x^2 + x^3\Delta_{n-3}$. Повторяя эти соображения еще $(n-4)$ раза, получим: $\Delta_n = n + (n-1)x + (n-2)x^2 + \ldots + 2x^{n-2} + x^{n-1}$. ■

<u>Пример 6.</u> Вычислить определитель : $\Delta = \begin{vmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ -a_{12} & 0 & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ -a_{13} & -a_{23} & 0 & a_{34} & a_{35} \\ -a_{14} & -a_{24} & -a_{34} & 0 & a_{45} \\ -a_{15} & -a_{25} & -a_{35} & -a_{45} & 0 \end{vmatrix}$

□ При транспонировании матрицы определитель не меняется, т.е.

$$\Delta = \Delta_1, \quad \Delta_1 = \begin{vmatrix} 0 & -a_{12} & -a_{13} & -a_{14} & -a_{15} \\ a_{12} & 0 & -a_{23} & -a_{24} & -a_{25} \\ a_{13} & a_{23} & 0 & a_{34} & a_{35} \\ a_{14} & a_{24} & a_{34} & 0 & -a_{45} \\ a_{15} & a_{25} & a_{35} & a_{45} & 0 \end{vmatrix}.$$

С другой стороны каждая строка определителя Δ получается из соответствующей строки определителя Δ_1 вынесением множителя (-1) за знак определителя, поэтому $\Delta_1 = (-1)^5 \Delta = -\Delta$. Таким образом, $\Delta = -\Delta \Rightarrow 2\Delta = 0 \quad \Rightarrow \quad \Delta = 0.$ ■

Отметим, что определитель вида, рассмотренного в примере 6, называют кососимметрическим, кроме того, матрицу такого вида называют антисимметрической.

Контрольные вопросы

1. Чему равна сумма числа инверсий и порядков перестановки ?
2. Какая перестановка n чисел имеет наибольшее число инверсий ? Вычислите это число.
3. Как изменится детерминант матрицы, если к её первой строке прибавить удвоенную вторую ?
4. Как изменится детерминант матрицы, если к её удвоенной первой строке прибавить вторую ?
5. Как изменится детерминант n - го порядка, если все элементы его матрицы изменят свой знак на противоположный ?
6. Как изменится детерминант n - го порядка, если все элементы его матрицы умножить на число p ?
7. С каким знаком входит в детерминант n - го порядка произведение элементов его второй диагонали ?
8. Как изменится детерминант n - го порядка $(n \geq 3)$, если от первой строки отнять вторую, от второй - третью и от третьей - первую ?
9. Как изменится детерминант, если каждый элемент a_{ij} умножить на ij ?

10. Чему равняется количество миноров k-го порядка для детерминанта n-го порядка ?

Задачи и упражнения

[4, № 232, 235-240, 248-256, 261-263, 266, 275-281];
[5, № 90-98, 100-104, 111-117, 123-136, 188-194, 197-205, 208, 212-216, 236-240, 257-272, 279-284, 290-293, 297-301, 425-434].

Индивидуальные задания

Задача 8.

а) Выписать все члены определителя (5x5)- матрицы , содержащие данные множители и входящие в выражение определителя со знаком “–”.

1) $a_{24}a_{33}$	4) $a_{15}\,a_{42}\,a_{51}$	7) $a_{24}\,a_{43}$	10) $a_{14}\,a_{32}\,a_{43}$	13) $a_{42}\,a_{24}$
2) $a_{23}a_{35}$	5) $a_{23}\,a_{34}\,a_{45}$	8) $a_{31}\,a_{14}$	11) $a_{13}\,a_{35}\,a_{44}$	14) $a_{25}\,a_{42}\,a_{51}$
3) $a_{15}a_{34}a_{42}$	6) $a_{14}\,a_{21}$	9) $a_{14}\,a_{42}\,a_{51}$	12) $a_{41}\,a_{23}$	15) $a_{22}\,a_{31}\,a_{43}$

б) Выписать все члены определителя (5x5)- матрицы, содержащие данные множители и входящие в выражение определителя со знаком “-“.

1) $a_{35}\,a_{42}\,a_{51}$	4) $a_{23}\,a_{34}$	7) $a_{15}\,a_{42}\,a_{34}$	10) $a_{22}\,a_{31}$	13) $a_{41}\,a_{23}\,a_{35}$
2) $a_{25}\,a_{33}\,a_{31}$	5) $a_{42}\,a_{54}$	8) $a_{31}\,a_{13}\,a_{45}$	11) $a_{25}\,a_{42}$	14) $a_{13}\,a_{35}$
3) $a_{34}\,a_{45}$	6) $a_{24}\,a_{41}\,a_{13}$	9) $a_{13}\,a_{24}$	12) $a_{41}\,a_{23}$	15) $a_{14}\,a_{32}$

Задача 9. Вычислить определители:

а) 1) $\begin{vmatrix} 99 & 100 & 100 & 101 \\ 100 & 100 & 101 & 101 \\ 101 & 102 & 102 & 102 \\ 102 & 102 & 103 & 104 \end{vmatrix}$ 2) $\begin{vmatrix} 5 & 4 & 0 & 0 \\ 7 & 6 & 0 & 0 \\ -3 & -2 & 1 & 0 \\ -4 & -3 & -2 & 1 \end{vmatrix}$ 3) $\begin{vmatrix} 4 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 8 & 5 & 0 \\ 3 & 7 & 4 & 0 \end{vmatrix}$

4) $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 2 \\ 4 & 3 & 0 & 3 \\ 7 & 5 & 0 & 4 \\ -2 & -2 & 2 & 5 \end{vmatrix}$ 5) $\begin{vmatrix} 3 & 2 & -3 & 0 \\ 2 & 2 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & -2 & 4 \end{vmatrix}$ 6) $\begin{vmatrix} 2 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 3 & 0 \\ 3 & 3 & 4 & 0 \\ 4 & 0 & 5 & 0 \end{vmatrix}$

7) $\begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ -8 & 5 & 9 & 5 \\ 7 & 7 & 7 & 4 \end{vmatrix}$ 8) $\begin{vmatrix} 213 & 186 & 162 & 137 \\ 344 & 157 & 295 & 106 \\ 419 & 418 & 419 & 418 \\ 417 & 416 & 417 & 416 \end{vmatrix}$ 9) $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 0 & 3 \\ -3 & -3 & 3 & -3 \\ -3 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 5 & 0 & 7 \end{vmatrix}$

10) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 4 \end{vmatrix}$ 11) $\begin{vmatrix} 4 & 3 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$ 12) $\begin{vmatrix} 2 & -5 & 1 & 2 \\ -3 & 7 & -1 & 4 \\ 5 & -9 & 2 & 7 \\ 4 & -6 & 1 & 2 \end{vmatrix}$

13) $\begin{vmatrix} 10 & 11 & 12 & 13 \\ 11 & 10 & 11 & 12 \\ 12 & 11 & 10 & 11 \\ 13 & 12 & 11 & 10 \end{vmatrix}$ 14) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$ 15) $\begin{vmatrix} -4 & -3 & -2 & -1 \\ 3 & 4 & 2 & 0 \\ 4 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \end{vmatrix}$

б) 1) $\begin{vmatrix} 5 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 6 & 5 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}$ 2) $\begin{vmatrix} 10 & 10 & 11 & 11 & 12 \\ 11 & 12 & 12 & 13 & 13 \\ 11 & 12 & 13 & 13 & 14 \\ 12 & 13 & 14 & 14 & 15 \\ 12 & 14 & 14 & 15 & 16 \end{vmatrix}$ 3) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 6 & 4 & 1 & 0 \\ 1 & 10 & 10 & 5 & 1 \\ 1 & 15 & 20 & 15 & 6 \end{vmatrix}$

4) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 5 \end{vmatrix}$ 5) $\begin{vmatrix} 0 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$ 6) $\begin{vmatrix} 3 & 6 & 5 & 6 & 4 \\ 5 & 9 & 7 & 8 & 6 \\ 6 & 12 & 13 & 9 & 7 \\ 4 & 6 & 6 & 5 & 4 \\ 2 & 5 & 4 & 5 & 3 \end{vmatrix}$

7) $\begin{vmatrix} 3 & -1 & -2 & 0 & 2 \\ -2 & -2 & -2 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 \\ 4 & -2 & -2 & 0 & 5 \end{vmatrix}$ 8) $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 4 & -5 & -2 & 2 & 3 \\ -2 & 3 & 0 & 3 & 4 \\ -5 & 4 & 3 & 4 & 5 \end{vmatrix}$ 9) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 5 \end{vmatrix}$

10) $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 5 & -4 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 2 & 2 & -4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & -5 \end{vmatrix}$ 11) $\begin{Vmatrix} 11 & 12 & 13 & 14 & 15 \\ 12 & 13 & 14 & 15 & 16 \\ 13 & 14 & 15 & 16 & 17 \\ 14 & 15 & 16 & 17 & 18 \\ 15 & 16 & 17 & 18 & 19 \end{Vmatrix}$ 12) $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 & 3 & 3 \\ 1 & -5 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -3 & -3 & -3 & -3 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$

13) $\begin{vmatrix} 0 & 3 & 2 & 0 & 5 \\ 0 & -2 & 5 & -3 & 4 \\ 0 & 4 & 2 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & 3 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$ 14) $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 5 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -30 & 0 & 6 & 1 & 5 \\ 0 & -2 & -3 & -4 & -5 \\ 1 & -2 & -3 & -4 & -5 \end{vmatrix}$ 15) $\begin{vmatrix} 10 & 10 & 10 & 11 & 11 \\ 10 & 11 & 11 & 11 & 12 \\ 10 & 11 & 12 & 12 & 12 \\ 11 & 11 & 12 & 13 & 14 \\ 11 & 12 & 12 & 14 & 14 \end{vmatrix}$

Задача 10. Вычислить определители порядка n [5, № 309, 311, 313, 316, 319].

Задача 11. Дана (4х4)-матрица A, Обозначим ее столбцы через **a, b, c, d.** Как изменится определитель матрицы A , если ее столбцы заменить на указанные ниже столбцы? Ответ обосновать.

	(a)	(b)	(c)
1)	**a + b, b, c, d;**	**a, a+2b , c ,d ;**	**-b ,a ,c ,d ;**
2)	**2a +3b , c ,d , b ;**	**a , a+2b , c , d ;**	**a + b , b + d , c , d +a;**
3)	**a + b , b + c ,c + a , d;**	**2a+d , b , c , d ;**	**a ,c , -b , d ;**
4)	**a ,2b-c , c , d ;**	**a ,b ,2b - c , d ;**	**a ,b ,2b - c , d ;**
5)	**a ,2b - 3c , c , d ;**	**a, b , 2b -3c , d ;**	**a - b , b - d , c , d - a ;**

6)	**a - b , b - c , c - a , d ;**	**a , 3b + c , c , d ;**	**a , b , 3b + c , d ;**
7)	**a , b - 2c , c , d ;**	**a , b , b - 2c , d ;**	**a , -c , - d , b ;**
8)	**a , b , 2c - 3d , d ;**	**a , b , c , 2c -3d ;**	**a + c , b , c + d , d +a;**
9)	**a , b + c , c + d , d + b ;**	**a , b , c , 2c - 3d ;**	**a , b , c , 3c - d ;**
10)	**a , b - c , c - d , d - b ;**	**a , b , 3c - d , d ;**	**- b , - a , c , d ;**
11)	**2a + 3c , b , c , d ;**	**a , b , 2a + 3c , d ;**	**a - c , b , c - d , d - a ;**
12)	**a , b - c , c - d , d -b ;**	**a , 3b+ d , c , d ;**	**a , b , c ; 3b + d ;**
13)	**2a + c , b , c ,d ;**	**a , b,2a + c ,d ;**	**a , b , -d , c ;**
14)	**a , 2b + 3c , c , d ;**	**a , b , 2b + 3c , d ;**	**a + d , b + c , c + d ,d;**
15)	**a + b , b + c , c +d , d + a ;**	**3a - b , b , c ,d ;**	**a , 3a -b , c ,d ;**

Задача 12. Решить систему при помощи формул Крамера.

1) $\begin{cases} 2x-3y+3z+4t=1, \\ 3x-3y+4z+4t=2, \\ 3x-4y+4z+4t=0, \\ 2x-2y+4z+5t=5. \end{cases}$	2) $\begin{cases} 2x+3y+3z-4t=-2, \\ 3x+4y+4z-5t=-1, \\ 4x+3y+2z-2t=8, \\ 3x+2y+2z-5t=-5. \end{cases}$	3) $\begin{cases} 2x+2y+2z+3t=4, \\ 4x+3y+2z+2t=3, \\ 8x+5y+3z+4t=9, \\ 3x+3y+2z+2t=1. \end{cases}$
4) $\begin{cases} 4x+6y+8z+5t=2, \\ 3x+2y+5z+2t=0, \\ 2x+3y+4z+2t=1, \\ 2x+3y+3z+4t=2. \end{cases}$	5) $\begin{cases} 4x-7y+7z-8t=1, \\ 3x-6y+7z+7t=3, \\ 3x-6y+6z+8t=2, \\ 2x-4y+5z+5t=3. \end{cases}$	6) $\begin{cases} 3x+4y-7z+8t=1, \\ 4x+5y-6z+7t=4, \\ 5x+6y-7z+8t=5, \\ 5x+7y-7z+8t=5. \end{cases}$
7) $\begin{cases} 3x+3y-2z+2t=0, \\ 3x+2y-2z+3t=-3, \\ 2x+2y-3z+2t=5, \\ 3x+2y-3z+3t=0. \end{cases}$	8) $\begin{cases} 2x+2y+3z+3t=5, \\ 2x+3y+3z+3t=4, \\ 3x+2y+3z+3t=7, \\ 2x+2y+3z+2t=4. \end{cases}$	9) $\begin{cases} 3x-3y+4z+4t=1, \\ 6x-6y+3z+2t=0, \\ 2x-2y+3z+3t=1, \\ 6x-5y+3z+2t=-2. \end{cases}$
10) $\begin{cases} 3x+4y+2z+2t=3, \\ 3x+5y+3z+5t=4, \\ 6x+8y+4z+5t=6, \\ 3x+5y+5z+7t=2. \end{cases}$	11) $\begin{cases} 2x+5y-4z+2t=1 \\ 3x+3y-2z+2t=3, \\ 2x+8y-9z+3t=-4, \\ 6x+6y-3z+4t=8. \end{cases}$	12) $\begin{cases} 2x+3y+8z+5t=1, \\ 6x+2y+5z+2t=9, \\ 2x+2y+3z+2t=3, \\ 3x-4y-3z-4t=5. \end{cases}$
13) $\begin{cases} 4x+3y+4z-3t=4, \\ 3x+2y+3z-3t=2, \\ 4x+3y+2z-3t=2, \\ 3x+3y+3z-2t=4. \end{cases}$	14) $\begin{cases} 2x+2y-3z+3t=-2, \\ 4x+4y+3z+5t=0, \\ 3x+5y+3z+3t=0, \\ 2x+2y+5z+3t=-4. \end{cases}$	15) $\begin{cases} 3x+4y+2z-3t=4, \\ 6x+8y+7z-8t=6, \\ 5x+7y+2z-3t=9, \\ 3x+4y+3z-6t=1. \end{cases}$

Задача 13. Решить 2-3 из дополнительных задач.

Дополнительные задачи и упражнения

1. Доказать, что для любого k, $\left(0 \le k \le n\dfrac{n-1}{2}\right)$ существует перестановка из n чисел, которая имеет k инверсий.
2. Как изменится определитель ($n x n$) - матрицы, если все её столбцы записать в обратном порядке ?
3. Доказать что кососимметрический определитель нечётного порядка равен нулю.

4. Доказать, что если $(n{\times}n)$ - матрица имеет больше $n^2 - n$ нулевых элементов, то её детерминант равен нулю.
5. Как изменится детерминант $(n{\times}n)$-матрицы, если каждый её элемент заменить симметричным относительно второй диагонали ?
6. Все элементы главной диагонали $(n{\times}n)$ - матрицы равны нулю , а все остальные элементы отличны от нуля. Сколько членов, равных нулю, имеет детерминант такой матрицы ?
7. Доказать , что детерминант А квадратной матрицы n-го порядка с элементами ± 1 не превышает : а) $n!$; б) $(n-1)(n-1)!$ $\quad (n \geq 3)$.
8. Докажите, что разложение Лапласа по k строкам совпадает с разложением по остальным $n - k$ строкам.
9. Доказать, что произвольный детерминант равен полусумме двух детерминантов, один из которых получен из данного путем прибавления ко всем элементам какой нибудь строки числа p, а другой - путем прибавления ко всем элементам той же строки числа $-p$.
10. Доказать, что если в детерминанте n-го порядка все миноры k-го порядка ($k<n$) равны нулю, то и все миноры больших порядков равны нулю.

3. АЛГЕБРА МАТРИЦ

Понятия:
1) произведение матриц;
2) сумма матриц;
3) произведение матрицы на число;
4) единичная матрица;
5) обратная матрица;
6) элементарные матрицы.

Факты:
1) свойства операций над матрицами:
   - коммутативность сложения;
   - ассоциативность сложения;
   - ассоциативность умножения;
   - дистрибутивность умножения относительно сложения (левая и правая);
   - дистрибутивность умножения на число относительно сложения;
   - связь между умножением матриц и умножением их на число;
2) теорема об определителе произведения матриц;
3) критерий существования обратной матрицы;
4) связь между элементарными преобразованиями матриц и элементарными матрицами.

С *матрицей*- прямоугольной таблицей, составленной из чисел, мы встретились еще в первой теме. Однако, это понятие применялось, в основном, для упрощения записи системы линейных уравнений. Подобно тому как операции над числами

открывают неограниченные возможности в использовании числовых систем, разумное введение операций над матрицами сделало матричный аппарат одним из самых мощных средств, используемых во всех областях математики. На первом этапе мы ограничимся изучением матриц с числовыми элементами.

Две *матрицы равны*, если они имеют одинаковые размеры и их соответствующие элементы равны: т. е. если $A = (a_{ij})$ - $(m{\times}n)$-матрица, т.е. матрица, содержащая m строк и n столбцов, $B = (b_{ij})$ - $(p{\times}s)$-матрица и $A = B$ то: $m = p, n = s$ и $a_{ij} = b_{ij}, i = \overline{1,m}; j = \overline{1,n}$.

Действия *сложения матриц* (одинаковых размеров!) и *умножения матриц на число* обычно не вызывают затруднений. Если $A = (a_{ij}), B = (b_{ij})$ - $(m \times n)$-матрицы, k - число, то $A + B = (a_{ij} + b_{ij})$, $\quad k \cdot A = A \cdot k = (ka_{ij})$, $\quad i = \overline{1,m}; j = \overline{1,n}$.

Обратим внимание не только на естественность, но и на полезность таких действий. Известно, что при умножении вектора на скаляр его координаты умножаются на этот скаляр, а при сложении двух векторов его соответствующие координаты складываются. Взаимно однозначное соответствие, существующее между векторами и упорядоченными последовательностями их координат, позволяет сопоставить каждому вектору $\bar{x}$ матрицу-столбец его координат $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$.

Это соответствие не нарушается при сложении векторов и при умножении вектора на число.

А вот *умножение матриц*, на первый взгляд, вводится не совсем естественно. Если $A = (a_{ij}) - (m \times n)$-матрица, $B = (b_{ij}) - (n \times p)$-матрица, то их произведение $A \cdot B = C = (c_{ij})$ будет $(m \times p)$-матрицей, причем

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj} = a_{i1} b_{1j} + a_{i2} b_{2j} + \ldots + a_{in} b_{nj}, \quad i = \overline{1,m}; j = \overline{1,n}.$$

Проиллюстрируем умножение матриц следующей схемой:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \\ b_{41} & b_{42} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \\ c_{31} & c_{32} \end{pmatrix}$$

Например, $c_{32} = a_{31} b_{12} + a_{32} b_{22} + a_{33} b_{32} + a_{34} b_{42}$

<u>Пример 1.</u> Вычислить произведение AB матриц $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -1 & 2 & 3 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 1 & 4 \\ 0 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

$$\square \qquad A\cdot B=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\-1&2&3&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&3\\-2&1&4\\0&3&1\\1&2&1\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}1\cdot1+2\cdot(-2)+3\cdot0+4\cdot1 & 1\cdot2+2\cdot1+3\cdot3+4\cdot2 & 1\cdot3+2\cdot4-3\cdot1+4\cdot1\\ -1\cdot1+2\cdot(-2)+3\cdot0+2\cdot1 & -1\cdot2+2\cdot1+3\cdot3+2\cdot2 & -1\cdot3+2\cdot4+3\cdot1+2\cdot1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&21&18\\-3&13&10\end{pmatrix}.$$

Произведение же BA получить нельзя, так как число столбцов матрицы В не равно числу строк матрицы А . ■

Далеко идущий пример последовательного применения двух линейных преобразований координат точки $M(x,y)$ на плоскости при повороте прямоугольной декартовой системы координат сначала на угол α: $\begin{matrix}x'=x\cos\alpha+y\sin\alpha=x\cdot a_{11}+y\cdot a_{12},\\ y'=y\cos\alpha-x\sin\alpha=x\cdot a_{21}+y\cdot a_{22},\end{matrix}$ а затем, на угол β: $\begin{matrix}x''=x'\cos\beta+y'\sin\beta=x'b_{11}+y'b_{12},\\ y''=y'\cos\beta-x'\sin\beta=x'b_{21}+y'b_{22},\end{matrix}$ указывает на целесообразность данного нами определения умножения матриц. В самом деле, первому повороту системы координат соответствует матрица $A=(a_{ij})=\begin{pmatrix}\cos\alpha&\sin\alpha\\-\sin\alpha&\cos\alpha\end{pmatrix}$, второму - матрица $B=(b_{ij})=\begin{pmatrix}\cos\beta&\sin\beta\\-\sin\beta&\cos\beta\end{pmatrix}$.

Матрица $C=(c_{ij})$, соответствующая повороту на угол $\alpha+\beta$, равна

$$A\cdot B=\begin{pmatrix}a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12}-a_{12}b_{21}\\ a_{21}b_{11}+a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12}+a_{22}b_{22}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos(\alpha+\beta)&\sin(\alpha+\beta)\\-\sin(\alpha+\beta)&\cos(\alpha+\beta)\end{pmatrix}.$$

Обратную матрицу можно отыскать на основании ее определения, как такую матрицу X, которая для заданной матрицы A удовлетворяет условию $AX=XA=E$. Для этого прийдется решить систему n^2 линейных уравнений с n^2 неизвестными, построенную на основании матричного уравнения (что, впрочем, приводит к довольно громоздким вычислениям.) :

$$\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}\dots a_{1n}\\a_{21}&a_{22}\dots a_{2n}\\ \dots&\dots\\a_{n1}&a_{n2}\dots a_{nn}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x_{11}&x_{12}\dots x_{1n}\\x_{21}&x_{22}\dots x_{2n}\\ \dots&\dots\\x_{n1}&x_{n2}\dots x_{nn}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\dots0\\0&1\dots0\\ \dots&\dots\\0&0\dots1\end{pmatrix},$$

Следует обратить внимание на то, что необходимым и достаточным условием существования обратной матрицы для матрицы A является невырожденность, т.е. $|A|$ должен быть отличен от 0.

Существует несколько способов вычисления обратной матрицы. В учебнике [1] доказано, что $A^{-1}=\frac{1}{|A|}A^*$, где A^*- присоединенная матрица к матрице A. Если $A=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}\dots a_{1n}\\a_{21}&a_{22}\dots a_{2n}\\ \dots&\dots\\a_{n1}&a_{n2}\dots a_{nn}\end{pmatrix}$, то $A^*=\begin{pmatrix}A_{11}&A_{21}\dots A_{n1}\\A_{12}&A_{22}\dots A_{n2}\\ \dots&\dots\\A_{1n}&A_{2n}\dots A_{nn}\end{pmatrix}$. Здесь A_{ij}- алгебраическое дополнение к

элементу a_{ij} матрицы A. Оно строится из определителя матрицы A вычеркиванием i-той строки, j-того столбца и берется со знаком $(-1)^{i+j}$. Обратите внимание на то, что алгебраические дополнения для столбцов матрицы A становятся строками матрицы A^*.

<u>Пример 2.</u> Пусть $A=\begin{pmatrix}-3&-2&-1\\2&5&3\\-3&4&2\end{pmatrix}$, найти A^{-1}.

□ Так как $|A|=9\neq0$, то A^{-1} существует. Последовательно находим:

$A_{11}=-2,\ A_{12}=-13,\ A_{13}=23,$

$A_{21}=0,\ A_{22}=-9,\ A_{23}=18,$ Следовательно, $A^{-1}=\frac{1}{9}\begin{pmatrix}-2&0&-1\\-13&-9&7\\23&18&-11\end{pmatrix}$. Проверкой

$A_{31}=-1,\ A_{32}=7,\ A_{33}=-11.$

убеждаемся, что $A\cdot A^{-1}=E$. ■

Обратную матрицу можно находить, обратившись к линейным преобразованиям неизвестных. А именно, квадратная матрица n-го порядка $A=(a_{ij})$ определяет линейное преобразование неизвестных:

$$x_i=a_{i1}y_1+a_{i2}y_2+\dots+a_{in}y_n;\quad i=1,2,..n. \tag{1}$$

С помощью метода Гаусса выражаем $y_1,y_2,\dots,y_n$ через $x_1,x_2,\dots,x_n$, т.е. находим линейное преобразование неизвестных, обратное преобразованию (1). Матрица такого преобразования и будет искомой матрицей A^{-1}, обратной матрице A.

<u>Пример 3.</u> Найти матрицу A^{-1}, обратную матрице $A=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&1&-1\\3&0&2\end{pmatrix}$.

□ Данная матрица определяет линейное преобразование неизвестных $\begin{cases}y_1+2y_2+3y_3=x_1,\\2y_1+y_2-y_3=x_2,\\3y_1\quad+2y_3=x_3.\end{cases}$ Обратимся к расширенной матрице, которая получается добавлением к матрице A столбца из неизвестных x_1,x_2,x_3: $\left(\begin{array}{ccc|c}1&2&3&x_1\\2&1&-1&x_2\\3&0&2&x_3\end{array}\right)$

Применяя метод Гаусса, последовательно имеем: вычитаем из второй строки расширенной матрицы ее первую строку, умноженную на 2, и из третьей строки-первую строку, умноженную на 3. Затем вычитаем из третьей строки полученной матрицы ее вторую строку, умноженную на 2.

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1&2&3&x_1\\0&-3&-7&x_2-x_1\\0&-6&-7&x_3-3x_1\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|c}1&2&3&x_1\\0&-3&-7&x_2-x_1\\0&0&7&x_1-2x_2+x_3\end{array}\right)$$

Процесс закончен и мы выражаем y_1, y_2, y_3 через x_1, x_2, x_3:

$$y_1 = \frac{1}{21}(-2x_1 + 4x_2 + 5x_3);$$

$$y_2 = \frac{1}{3}(x_1 + x_2 - x_3);$$

$$y_3 = \frac{1}{7}(x_1 - 2x_2 + x_3).$$

Отсюда. $A^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{2}{21} & \frac{4}{21} & \frac{5}{21} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{7} & -\frac{2}{7} & \frac{1}{7} \end{pmatrix}$ ■

При решении матричных уравнений вида $A \cdot X = B$ или $X \cdot A = B$, если A невырождена следует обе части уравнений(в первом случае слева, а во втором - справа)умножить на A^{-1}. В результате, мы получим $X = A^{-1} \cdot B$ или $X = B \cdot A^{-1}$.

<u>Пример 4.</u> Решить матричное уравнение $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

□ Уравнение имеет вид $A \cdot X = B$. Поскольку $\det A = -1 \neq 0$ то A^{-1} существует и равна $A^{-1} = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$, получим $X = A^{-1} \cdot B = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. ■

<u>Пример 5.</u> Найти все матрицы X второго порядка, удовлетворяющие уравнению

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 6 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 10 & 4 \end{pmatrix}.$$

□ Метод описанный выше, здесь не пригоден, так как матрица $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}$ – вырожденная. Воспользуемся методом, который всегда приводит к решению матричных уравнений.

Представим матрицу X в виде $X = \begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{pmatrix}$. Имеем $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 10 & 4 \end{pmatrix}$ или,после перемножения,получим: $\begin{pmatrix} 2x_1 + 3x_2 & 2y_1 + 3y_2 \\ 4x_1 + 6x_2 & 4y_1 + 6y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 10 & 4 \end{pmatrix}$.

Откуда $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 = 5, \\ 4x_1 + 6x_2 = 10 \end{cases}$ и $\begin{cases} 2y_1 + 3y_2 = 2, \\ 4y_1 + 6y_2 = 4 \end{cases}$. Обе системы совместны, причем в каждой системе второе уравнение можно отбросить и считать второе неизвестное свободным. Таким образом, получаем, что $x_1 = \frac{5}{2} - \frac{3}{2}x_2$, $x_2 \in R$ - общее решение первой системы, $y_1 = 1 - \frac{3}{2}y_2$, $y_2 \in R$ - общее решение второй системы. Полагая $x_2 = 2\alpha$, $y_2 = 2\beta$, получаем следующий вид матрицы X, удовлетворяющий данному уравнению: $X = \begin{pmatrix} \frac{5}{2} - 3\alpha & 1 - 3\beta \\ 2\alpha & 2\beta \end{pmatrix}$, где α, β - произвольные числа. ■

Контрольные вопросы.

1. Верно ли, что детерминант суммы матриц равен сумме детерминантов?
2. Выполняются ли для матриц соотношения:
а) $(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$; б) $(A-B)(A+B) = A^2 - B^2$;
в) $(AB)^{-1} = A^{-1}B^{-1}$; г) $(AB)^t = A^t B^t$;
д) $(AB)^2 = A^2 B^2$; е) $(A^m)^{-1} = (A^{-1})^m$?
3. Чему равен детерминант произведения
а) $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} (a \quad b \quad c)$; б) $(a \quad b \quad c) \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$?
4. Верно ли, что если A, B- вырожденные матрицы, то AB, $A+B$ - вырожденные матрицы?
5. На какие правила действий над матрицами следует опираться при доказательстве равенства детерминанта произведения трех матриц произведению их детерминантов?
6. Известно, что $AB=0$. Означает ли это, что $A=0$ или $B=0$?
7. Известно, что $AB=E$. Означает ли это, что $BA=E$?
8. Пусть A - невырожденная симметрическая матрица. Будет ли симметрической матрица A^{-1} ?
9. Является ли симметрической матрица $A \cdot A^t$?
10. Образуют ли группу все $(n \times n)$-матрицы с действительными элементами
а) относительно умножения; б) относительно сложения?
11. Может ли быть группой относительно умножения некоторое множество вырожденных матриц ?

Задачи и упражнения

[4, № 220, 221, 223, 224, 410, 411];
[5, № 790-796, 799-802, 804, 805, 808, 809, 822-825, 827-829, 836-843, 86-870].

Индивидуальные задания

Задача 14. Для каждой матрицы A, B, C, из списка матриц на с. 29-30 вычислить обратную матрицу.

Задача 15. Пусть $f(x)$- многочлен, найденный в задаче 3. Вычислить $f(C)$, где C - матрица из того же списка.

Задача 16. Что произойдет со строками или столбцами (3x3)- матрицы X при умножении ее слева (справа) на матрицу P, а также на матрицу T, где P и T — матрицы из того же списка?

Задача 17. На какую матрицу и с какой стороны следует умножить данную (4x4) матрицу A, чтобы в этой матрице A:

1) а) 1-й и 2-й столбцы поменялись местами? б) 1-я строка умножилась на 2? в) к 4-ой строке прибавилась 2-я строка?

2) а) 1-я и 3-я строки поменялись местами? б) 1-й столбец умножился на -2? в) из 4-го столбца вычелся 3-й столбец?

3) а) 1-я и 4-я строки поменялись местами? б) 2-й столбец умножился на 3? в) к 1-му столбцу прибавился 2-ой столбец?

4) а) 1-й и 3-й столбцы поменялись местами? б) 2-я строка умножилась на -3? в) из 1-й строки вычлась 3-я строка?

5) а) 1-й и 4-й столбцы поменялись местами? б) 3-я строка умножилась на -4? в) к 1-ой строке прибавилась 2-я строка?

6) а) 1-я и 2-я строки поменялись местами? б) 3-я строка умножилась на -9? в) к 1-му столбцу прибавился 4-й столбец?

7) а) 2-й и 3-й столбцы поменялись местами? б) 4-й столбец умножился на 2? в) из 1-й строки вычлась 3-я строка?

8) а) 2-я и 3-я строки поменялись местами? б) 4-я строка умножилась на -2? в) из 2-го столбца вычелся 3-й столбец?

9) а) 2-й и 4-й столбцы поменялись местами ? б) 1-я строка умножилась на 3 ? в) из 3-го столбца вычелся 4-й столбец?

10) а) 2-я и 4-я строки поменялись местами? б) 1-й столбец умножился на -3? в) из 3-го столбца вычелся 4-й столбец?

11) а) 3-й и 4-й столбцы поменялись местами б) 2-я строка умножилась на 4? в) из 2-ой строки вычлась 1-я строка?

12) а) 3-я и 4-я строки поменялись местами? б) 2-й столбец умножился на -4? в) к 3-му столбцу прибавился 1-й столбец?

13) а) 1-й и 4-й столбцы поменялись местами б) 3-й столбец умножился на -2? в) к 1-й строке прибавилась 4-я строка?

14) а) 1-я и 2я строки поменялись местами? б) 3-я строка умножилась на 2? в) из 2-го столбца вычелся 3-й столбец?

15) а) 1-я и 2-я строки поменялись местами? б) 4-я строка умножилась на -3? в) ко 2-му столбцу прибавился 4-й столбец?

Задача 18. Вычислить матрицу $K=B^{-1}\ H\ B$, где B и H - матрицы из приведенного ниже списка. Вычислить затем K^{100} и, пользуясь этим результатом, вычислить H^{100}.

Задача 19. Решить уравнения $B\,X = H$ и $X\,H = H$, где B и H - матрицы из приведенного ниже списка.

Список матриц:

	A	B	C	H	P	T
1)	$\begin{pmatrix}2&1&0\\1&1&1\\0&1&3\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}2&1&0\\1&1&1\\2&1&1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}2&1&0\\1&1&1\\0&1&1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}2&5&-5\\1&3&-3\\2&5&-5\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}4&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$
2)	$\begin{pmatrix}1&1&2\\1&0&1\\2&1&2\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}-2&1&2\\-1&0&1\\-1&2&2\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}-2&-2&2\\-1&0&-1\\-1&2&2\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&2&-2\\1&0&-1\\-1&4&-1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&4&1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&-2\end{pmatrix}$
3)	$\begin{pmatrix}0&1&2\\1&2&3\\2&3&3\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0&0&1\\1&0&2\\2&1&0\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0&0&1\\2&0&2\\2&1&0\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}3&-2&1\\6&-4&2\\4&-2&1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&3&0\\0&0&1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&0&0\\3&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$
4)	$\begin{pmatrix}0&0&-1\\0&-1&2\\-1&2&0\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0&-2&-1\\2&-1&2\\-1&2&0\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0&-2&-1\\2&2&2\\-1&2&0\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}-4&-2&-4\\-2&-1&-2\\4&2&4\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\-3&0&1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}2&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$
5)	$\begin{pmatrix}-1&2&0\\2&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&2&0\\2&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}2&0&2\\2&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0&0&-2\\2&-1&-3\\0&0&-1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&0&0\\-4&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$
6)	$\begin{pmatrix}2&1&1\\1&1&0\\1&0&2\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}2&0&3\\1&1&0\\1&0&2\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}2&1&1\\1&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}-4&2&6\\-2&0&3\\-2&1&3\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&0&0\\-1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0&0&1\\0&-4&0\\0&0&1\end{pmatrix}$
7)	$\begin{pmatrix}4&3&2\\3&2&1\\2&1&-1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}3&3&2\\3&2&1\\-1&1&1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}4&4&4\\-4&0&1\\0&-3&-4\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}-3&3&3\\-3&3&3\\1&-1&-1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&-3\end{pmatrix}$

Продолжение списка матриц:

	A	B	C	H	P	T
8)	$\begin{pmatrix}1&1&-2\\1&0&-1\\-2&-1&2\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}3&1&-2\\1&0&-1\\-2&-1&2\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}3&3&3\\1&0&3\\-2&-1&-3\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}3&-8&-1\\1&-2&0\\-2&6&1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&0&4\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$
9)	$\begin{pmatrix}1&0&2\\0&1&2\\2&2&9\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&0&2\\0&1&2\\2&2&7\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&0&1\\0&-1&1\\-4&-3&0\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&-1&0\\-4&-3&2\\-6&-8&4\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&3&1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&1\end{pmatrix}$
10)	$\begin{pmatrix}0&1&1\\1&1&2\\1&2&2\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0&1&1\\1&1&2\\1&2&4\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0&1&1\\-1&1&2\\-1&-1&-1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&1&-1\\4&3&-3\\8&6&-6\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&2&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}-2&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$
11)	$\begin{pmatrix}3&1&1\\1&1&0\\1&0&1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&1&1\\-1&1&0\\1&0&1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&0\\1&0&1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}3&-1&-4\\1&0&-1\\2&-1&-3\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&-2\\0&0&1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}$
12)	$\begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&1\\1&1&1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&1\\1&1&3\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0&1&-3\\1&0&3\\3&3&-3\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}-4&-5&3\\1&2&-1\\-3&-3&2\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-2&0\\0&0&1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&2\\0&0&1\end{pmatrix}$
13)	$\begin{pmatrix}4&4&1\\4&3&1\\1&1&0\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}4&4&1\\-3&-4&-1\\1&1&0\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}4&4&1\\-3&-4&-1\\4&4&0\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}4&4&0\\-2&-2&-1\\1&1&0\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&4&0\\0&0&1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&-2&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$
14)	$\begin{pmatrix}3&1&1\\1&0&1\\1&1&-2\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}3&-1&0\\1&0&-1\\1&1&-3\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}3&-1&0\\3&0&-1\\3&3&-3\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}2&-9&3\\1&-4&1\\1&-3&0\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\2&0&1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-3&0\\0&0&1\end{pmatrix}$
15)	$\begin{pmatrix}-1&1&0\\1&-1&1\\0&1&0\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&1&0\\1&-1&1\\2&1&0\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&1&0\\1&-1&1\\0&1&0\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}2&0&-1\\3&1&-2\\2&0&-1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&-4\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&-1&1\end{pmatrix}$

Задача 20. Решить 2-3 из дополнительных задач.

Дополнительные задачи и упражнения

1. Вычислить $A^{72}, B^{72}, C^{72}, X^n, Y^n$.

$$A=\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix};\ B=\begin{pmatrix}0&1\\-1&1\end{pmatrix};\ C=\begin{pmatrix}A&0\\0&B\end{pmatrix};\ X=\begin{pmatrix}a&a\\0&a\end{pmatrix};\ Y=\begin{pmatrix}a&b\\b&a\end{pmatrix}.$$

2. Найти все матрицы X такие, что а) $X^2=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$; б) $X^2=\begin{pmatrix}-1&0\\0&-1\end{pmatrix}$.

3. Пусть дана матрица $A=\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}$.

   а) Доказать, что множество всех (2Х2)-матриц X таких, что $XA=0$, замкнуто относительно сложения и умножения.

   б) Найти все матрицы X такие, что $(A+X)^2=A^2+2AX+X^2$.

   в) Найти все матрицы X такие, что $(A+X)(A-X)=A^2-X^2$.

4. Доказать, что если A - вырожденная квадратная матрица n-го порядка, то существует бесконечное множество таких квадратных матриц B, что $AB=0$.

5. Пусть A и B - квадратные матрицы n-го порядка. Доказать, что $A=B$ тогда и только тогда, когда $AX=BX$ для произвольной матрицы - столбца X из n элементов.

6. Доказать, что множество матриц вида $\begin{pmatrix}\cos\alpha&-\sin\alpha\\\sin\alpha&\cos\alpha\end{pmatrix}, \alpha\in R$, образует группу относительно умножения матриц.

7. Доказать, что произвольную невырожденную матрицу можно разложить в произведение элементарных.

8. Как изменится обратная матрица A^{-1}, если в матрице A:

   а) переставить местами i-тый и j-тый столбцы;

   б) i-тый столбец умножить на число $p\neq 0$;

   в) к i-тому столбцу прибавить j-тый, умноженный на p?

9. Доказать, что если оба произведения AB и BA имеют смысл и A - $(m$Х$n)$ - матрица, то B - $(n$Х$m)$ - матрица.

10. Пусть $A=\begin{pmatrix}A_{11}&A_{12}\\A_{21}&A_{22}\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}B_{11}&B_{12}\\B_{21}&B_{22}\end{pmatrix}$, где A_{ij}, B_{ij} — клетки одинакового порядка.

    Доказать, что $AB=\begin{pmatrix}C_{11}&C_{21}\\C_{21}&C_{22}\end{pmatrix}$, где $C_{ij}=\sum_{k=1}^{2}A_{ik}B_{kj}$. Попробуйте обобщить этот результат.

4. АЛГЕБРА КОМПЛЕКСНЫХ ЧИСЕЛ

Понятия:

1) комплексное число;
2) геометрическая интерпретация;
3) сопряжённые числа;
4) сумма, разность, произведение и частное комплексных чисел;
5) модуль ;
6) аргумент;
7) тригонометрическая форма комплексного числа;
8) корень из комплексного числа;
9) корень n-ной степени из 1, первообразный корень.

Факты:

1) свойства операций:
   - коммутативность сложения;
   - ассоциативность сложения;
   - коммутативность умножения;
   - ассоциативность умножения.
2) свойства модуля;
3) свойства аргумента;
4) свойства операции сопряжения;
5) формула Муавра;
6) вычисление всех значений корня из комплексного числа;
7) свойства корней из единицы.

Комплексные числа рассматривают как пары $(a;b)$ действительных чисел a и b, определив на них *операции сложения* $(a;b)+(c;d)=(a+c;b+d)$ и *умножения* $(a;b)(c;d)=(ac-bd;ad+bc)$. Обратными к этим операциям будут *вычитание* $(a;b)-(c;d)=(a-c;b-d)$ и *деление* $\frac{(a,b)}{(c,d)}=\left(\frac{ac+bd}{c^2+d^2};\frac{ad+bc}{c^2+d^2}\right)$. Первые три операции определены для всех пар указанного вида, деление определено за исключением деления на пару (0;0). Множество всех комплексных чисел является расширением множетва всех вещественных. Если отождествить пару (1;0) с числом 1, а паре (0;1) поставить в соответствие букву i, тогда произвольной паре $(a;b)$ будет соответствовать двучлен $z=a+bi$, где a и b -действительные числа, причем i - так называемая мнимая единица, удовлетворяющая условию $i^2=-1$, a называют *действительной частью* $(\operatorname{Re} z)$, b – *мнимой частью* $(\operatorname{Im} z)$ комплексного числа z. Выполняя действия с комплексными числами, мы можем руководствоваться правилами действия с многочленами и учитывать указанное условие. Например:

$$(1-2i)+(3+i)=4-i; \qquad (1-2i)(3+i)=3-6i-2i-2i^2=3-8i+2=5-8i.$$

Переход от числа $z=a+bi$ к сопряженному $\bar{z}=a-bi$ называют операцией сопряжения. Рекомендуем убедиться в справедливости следующих свойств этой операции : $\overline{z+t}=\bar{z}+\bar{t}; \overline{z-t}=\bar{z}-\bar{t}; \overline{zt}=\bar{z}\cdot\bar{t}; \overline{\left(\frac{z}{t}\right)}=\frac{\bar{z}}{\bar{t}}$ для любых комплексных чисел z и t. Причем всегда $z+\bar{z}$ и $z\cdot\bar{z}$ - действительные числа.

Учитывая последнее свойство, заметим, что при выполнении деления, избавиться от комплексного числа в знаменателе дроби можно, домножив числитель и знаменатель на число, сопряженное знаменателю, например:

$$\frac{1-2i}{3+i}=\frac{(1-2i)(3-i)}{(3+i)(3-i)}=\frac{3-6i-i-2}{9+1}=\frac{1-7i}{10}=\frac{1}{10}-\frac{7}{10}i.$$

<u>Пример 1.</u> Решить уравнение $(2+i)z^2-(5-i)z+(2-2i)=0$

□ Вычислим дискриминант этого уравнения: $D=(5-i)^2-4(2+i)(2-2i)=$ $=24-10i-4(6-2i)=-2i$. Вычислим значения $\sqrt{-2i}=x+yi$, считая, что $x,y\in R$. После возведения в квадрат имеем $-2i=x^2-y^2+2xyi$. Учитывая, что комплексные числа равны, если равны их действительные и мнимые части, получим $\begin{cases}x^2-y^2=0\\2xy=-2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(x-y)(x+y)=0\\xy=-1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=y\\xy=-1\end{cases}$ или $\begin{cases}x=-y\\xy=-1\end{cases}$

Первая из этих систем всилу $y^2=-1$ не имеет действительных решений. Из второй имеем $-y^2=-1\Leftrightarrow y=\pm1$. Решениями будут пары (-1;1) и (1;-1). Мы получили $\sqrt{-2i}=\pm(1-i)$. Тогда по формуле корней квадратного уравнения

$$z_{1,2}=\frac{5-i\pm(1-i)}{2(2+i)}. \Rightarrow \begin{array}{l} z_1=\frac{5-i+1-i}{2(2+i)}=\frac{6-2i}{2(2+i)}=\frac{3-i}{2+i}=\frac{(3-i)(2-i)}{(2+i)(2-i)}=\frac{5-5i}{5}=1-i \\ z_2=\frac{5-i-1+i}{2(2+i)}=\frac{4}{2(2+i)}=\frac{2}{2+i}=\frac{2(2-i)}{5}=\frac{4-2i}{5} \end{array}$$ ■

Наряду с алгебраической формой комплексного числа $z=a+bi$, часто бывает полезна тригонометрическая форма $z=\rho(\cos\varphi+i\sin\varphi)$. Здесь $\rho=|z|$ - положительное вещественное число называемое модулем числа , $\varphi=Arg\,z\in[0,2\pi)$ - аргумент числа. При этом, действия сложения и вычитания удобнее выполнять в алгебраической форме; умножения, деления, возведения в степень и извлечения корня - в тригонометрической. Связь тригонометрической формы с алгебраической видна из чертежа и устанавливается тождествами:

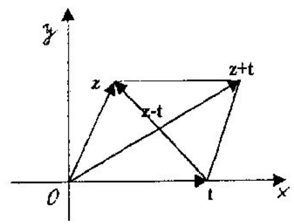
$z=a+bi$;

$b=\rho\sin\varphi$; $a=\rho\cos\varphi$;

$\rho=\sqrt{a^2+b^2}$;

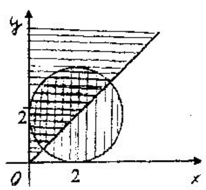
$\cos\varphi=\frac{a}{\rho}$; $\sin\varphi=\frac{b}{\rho}$.

Здесь комплексному числу $z=a+bi$ соответствует вектор $\mathbf{z}=(a;b)$. Важно заметить, что комплексному числу $z+t$ соответствует вектор **z+t**, аналогично числу z-t соответствует вектор **z-t.** Поскольку модуль комплексного числа z равен длине вектора **z**, модуль разности z-t равен длине вектора **z-t**, поэтому число $|z-t|$ равно расстоянию между точками комплексной плоскости, изображающими числа z и t.



Пример 2. Изобразить на комплексной плоскости множество всех чисел z, для которых $|z-2-2i|\le\left|1-i\sqrt{3}\right|; Arg(1+i)\le Arg z\le Arg(2i)$.

□ Прежде всего вычислим $\left|1-i\sqrt{3}\right|=\sqrt{1+3}=2;\quad Arg(1+i)=\pi/4;\quad Arg(2i)=\pi/2$



Неравенство $|z-(2+2i)|\le 2$ выражает тот факт, что расстояние между точкой z и точкой $2+2i$ не превосходит 2, то есть все точки z заполняют круг радиуса 2 с центром в точке (2;2). Второе неравенство $\pi/4\le Arg z\le \pi/2$ выделяет точки, не выходящие за пределы сектора, ограниченного прямыми, составляющими с осью абсцисс углы $\pi/4$ и $\pi/2$.

Если $t=r(\cos\psi+i\sin\psi)$, то $zt=\rho r(\cos(\varphi+\psi)+i\sin(\varphi+\psi))$ и $\frac{z}{t}=\frac{\rho}{2}(\cos(\varphi-\psi)+i\sin(\varphi-\psi))$. Первая из этих формул позволяет получить следующую формулу Муавра $z^n=\rho^n(\cos n\varphi+i\sin n\varphi)$, из которой следует:

$$\sqrt[n]{z}=\sqrt[n]{\rho}\cos\frac{\varphi+2k\pi}{n}+i\sin\frac{\varphi+2k\pi}{n}\qquad \text{где } k=0,1,\dots,n-1. \qquad (1)$$

Из выражения (1) видно, что корень n-ной степени из комплексного числа имеет n различных значений. Кроме того, для модуля $|z|$ комплексного числа z можно заметить $|\bar{z}|=|z|;\ |zt|=|z|\cdot|t|;\ \left|\frac{z}{t}\right|=\frac{|z|}{|t|};\ |z^n|=|z|^n;\ \left|\sqrt[n]{z}\right|=\sqrt[n]{|z|}$.

Пример 3. Вычислить все значения $\sqrt[4]{\frac{(1-i)^5}{(1+i\sqrt{3})^3}}$ и изобразить их на комплексной плоскости.

□ Обозначим $z_1=1-i; z_2=1+i\sqrt{3}$ и найдем тригонометрическую форму этих чисел. $|z_1|=\sqrt{1+1}=\sqrt{2}; \cos(Arg z_1)=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}; \sin(Arg z_1)=-\frac{1}{\sqrt{2}}=-\frac{\sqrt{2}}{2}$, поэтому $Arg z_1=\frac{7\pi}{4}$ и мы получили $z_1=\sqrt{2}(\cos\frac{7\pi}{4}+i\sin\frac{7\pi}{4})$. Для другого числа: $|z_2|=\sqrt{1+3}=2;\ \cos(Arg z_2)=\frac{1}{2}; \sin(Arg z_2)=\frac{\sqrt{3}}{2}$, поэтому $Arg z_2=\frac{\pi}{3}$ и имеем $z_2=2(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3})$. По формуле Муавра:

$$z_1^5=(\sqrt{2})^5(\cos(5\frac{7\pi}{4})+i\sin(5\frac{7\pi}{4}))=4\sqrt{2}(\cos\frac{3\pi}{4}+i\sin\frac{3\pi}{4}).$$

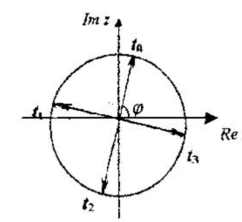
$$z_2^3=2^3(\cos(3\frac{\pi}{3})+i\sin(3\frac{\pi}{3}))=8(\cos\pi+i\sin\pi)=-8.$$

Получили

$$\sqrt[4]{\frac{(1-i)^5}{(1+i\sqrt{3})^3}}=\sqrt[4]{\frac{4\sqrt{2}(\cos 3\pi/4+i\sin 3\pi/4)}{8(\cos\pi+i\sin\pi)}}=\sqrt[4]{\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\cos\frac{7\pi}{4}+i\sin\frac{7\pi}{4}\right)}=$$

$$=\sqrt[4]{\frac{\sqrt{2}}{2}}\left(\cos\frac{\frac{7\pi}{4}+2k\pi}{4}+i\sin\frac{\frac{7\pi}{4}+2k\pi}{4}\right)=\frac{1}{\sqrt[8]{2}}\left(\cos\frac{7+8k}{16}\pi+i\sin\frac{7+8k}{16}\pi\right),\qquad k=0,1,2,3.$$

На комплексной плоскости найденные четыре значения t_0,t_1,t_2,t_3 (соответственно для значений k=0,1,2,3) расположатся на окружности радиуса $r=\frac{1}{\sqrt[8]{2}}$ и разделят окружность на 4 равные части, причем



$$\varphi=Arg t_0=\frac{7\pi}{16};\quad Arg t_1=\frac{15\pi}{16};\quad Arg t_2=\frac{23\pi}{16}\quad \text{и}\quad Arg t_3=\frac{31\pi}{16}$$ ■

Особый интерес представляет изучение свойств корня n-ной степени из единицы:

$$\sqrt[n]{1}=\varepsilon_k=\cos\frac{2k\pi}{n}+i\sin\frac{2k\pi}{n},\qquad \text{где } k=0,1,\dots,n-1. \qquad (2)$$

Сопоставляя формулы (1) и (2) можно заметить, что все корни n-ной степени из комплексного числа z можно получить умножая одно из значений этого корня на все значения корня n-ной степени из 1. Другое важное свойство корней n-ной степени из 1 состоит в том, что все они могут быть получены в качестве степеней одного из них, называемого первообразным. При этом первообразный корень n-ной степени не является корнем из 1 степени меньшей, чем n. Например, среди корней шестой степени из единицы : $\varepsilon_0=1$, ε_1, ε_2, ε_3, ε_4, ε_5, только ε_1 и ε_5, являются первообразными, другие же принадлежат более низким показателям: ε_0, - степени 1; ε_2, и ε_4, - степени 3; ε_3, - степени 2.

Контрольные вопросы

1. Известно, что произведением двух сопряжённых чисел является действительное число. Справедливо ли обратное утверждение ?
2. Какой геометрический смысл имеет умножение комплексных чисел на фиксированное комплексное число с модулем 1?
3. Какой геометрический смысл имеет умножение комплексных чисел на фиксированное действительное число?
4. При каких условиях модуль суммы двух комплексных чисел равен сумме их модулей?
5. Пусть $z_1 \cdot z_2 \in R$. Обязательно ли $z_1 = \bar{z}_2$?
6. Пусть $z_1 \cdot z_2 \in R$ и $z_1 + z_2 \in R$. Верно ли, что $z_1 = \bar{z}_2$?
7. Какую тригонометрическую форму имеют числа:
   a) -1; b) $-i$; c) $\cos\varphi - i\sin\varphi$; d) $-\cos\varphi - i\sin\varphi$?
8. Известно, что корень n-ой степени из 1 является точкой единичного круга. Можно ли утверждать, что каждая точка единичного круга является корнем некоторой степени из 1?
9. Можно ли утверждать, что $2+5i < 10+6i$?
10. Когда достигается равенство в формулах $|z_1|-|z_2| \le |z_1+z_2| \le |z_1|+|z_2|$?
11. Справедлива ли формула Муавра при показателе степени отрицательном целом, при рациональном ?
12. Сформулировать условие равенства комплексных чисел, заданных в тригонометрической форме.
13. Является ли следующая форма записи комплексных чисел тригонометрической:

$a)$ $2\left[i\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)+\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right]$; $b)$ $\cos\frac{2\pi}{3} - i\sin\frac{2\pi}{3}$; $c)$ $-3\left(\cos\frac{\pi}{5}+i\sin\frac{\pi}{5}\right)$;

$d)$ $\sin\frac{3\pi}{4}+i\cos\frac{3\pi}{4}$; $e)$ $2\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{3\pi}{4}\right)$; $f)$ $5\left(\cos 20^\circ + i\sin 20^\circ\right)$?

Задачи и упражнения

[4, № 101-109, 112, 113, 118, 119, 123, 124, 130, 136, 139, 140, `143, 145-149];
[6, № 6.1.1-6.1.6, 6.2.1-6.2.4, 6.2.10, 6.2.12, 6.6.1-6.6.6].

Индивидуальные задания

Задача 21. Найти многочлен $f(z)$ второй степени с комплексными коэффициентами, зная его значения $f(2+i)$, $f(3+i)$, $f(1+2i)$; вычислить $f(1+i)$.

	$f(2+i)$	$f(3+i)$	$f(1+2i)$
1.	$4+2i$	$4+2i$	$5-i$
2.	$2-2i$	$2-i$	$2-6i$
3.	$-12-4i$	$-12-3i$	$-12-8i$
4.	$-5-5i$	$6i$	$-10-6i$
5.	$2i$	$2+4i$	$-3-1$
6.	$4-2i$	$6-2i$	$3-3i$
7.	$6-6i$	$14-7i$	0
8.	$8-i$	$18-2i$	$7i$
9.	$11+7i$	$18+6i$	$6+12i$
10.	$-2i$	0	$-1-7i$
11.	$-3-3i$	$-4-6i$	$2-4i$
12.	$-4+4i$	$5i$	$-8+4i$
13.	$9+7i$	$14+8i$	$4+8i$
14.	$5+5i$	$12+10i$	$-6+4i$
15.	0	$4+2i$	$-5-i$

Задача 22. Решить уравнение $f(z)=0$, где $f(z)$ - многочлен, найденный в задаче 21.

Задача 23. Решить уравнения :

1) $z^2 = i\bar{z}$;	2) $z^2\bar{z} = 2-2i$;	3) $z^4 + 4\bar{z}^2 = 0$;	4) $z^2 + i\bar{z} = 0$;
5) $z^3\bar{z} = -4i$;	6) $z^4 = 4\bar{z}^2$;	7) $z^3 = \bar{z}$;	8) $z^2\bar{z} = 2+2i$;
9) $z^2 + 2i\bar{z} = 0$;	10) $z^3 + \bar{z} = 0$;	11) $z^3\bar{z} = 4i$;	12) $z^2 = 2i\bar{z}$;
13) $z^4 = \bar{z}^2$;	14) $z^3\bar{z} = -4$;	15) $z^3 + 4\bar{z} = 0$;	

Задача 24. Вычислить все значения следующих корней и изобразить их на комплексной плоскости:

1) $\sqrt[4]{8-8i\sqrt{3}}$;	2) $\sqrt[4]{-8+8i\sqrt{3}}$;	3) $\sqrt[4]{-8-8i\sqrt{3}}$;	4) $\sqrt[4]{8+8i\sqrt{3}}$;
5) $\sqrt[4]{-2-2i\sqrt{3}}$;	6) $\sqrt[3]{16+16i}$;	7) $\sqrt[3]{-2-2i}$;	$\sqrt[3]{-16+16i}$;
9) $\sqrt[6]{-64}$;	10) $\sqrt[4]{-2\sqrt{3}+2i}$;	11) $\sqrt[6]{-8i}$;	$\sqrt[3]{2-2i}$;
13) $\sqrt[4]{2\sqrt{3}-2i}$;	14) $\sqrt[3]{64i}$;	15) $\sqrt[4]{-64}$.	

Задача 25. Изобразить на комплексной плоскости множество всех чисел z, удовлетворяющих условию:

	(a)	(b)
1)	$\arg(z^4)=\arg(iz)$;	$6\lvert z-1\rvert \le 3\lvert z-4\rvert < 2\lvert z-9\rvert$;
2)	$\arg(z-i)=\arg(z+i)$;	$3\lvert z-4\rvert \le 6\lvert z-1\rvert < 2\lvert z-9\rvert$;
3)	$\mathrm{Re}(z^2)=0$;	$\lvert z+6i\rvert < 2\lvert z+3i\rvert \le 3\lvert z-2i\rvert$;
4)	$\mathrm{Re}(z^3)=0$;	$\lvert z+6i\rvert < 3\lvert z-2i\rvert \le 2\lvert z+3i\rvert$;
5)	$\lvert z\rvert+\lvert z-2i\rvert=2$;	$2 \le \lvert z\rvert < \lvert z-2\rvert$;
6)	$\lvert z\rvert+\lvert z-2i\rvert=3$;	$\lvert z\rvert \le \lvert z-1\rvert < \lvert z-i\rvert$;
7)	$\lvert z-2\rvert=\mathrm{Re}\ z$;	$\lvert z-1\rvert < \lvert z\rvert \le \lvert z-i\rvert$;
8)	$\lvert z-2\rvert=\mathrm{Im}\ z$;	$\lvert z\rvert < 2 \le \lvert z-2\rvert$;
9)	$\mathrm{Re}(z^2)=1$;	$\lvert z\rvert < \lvert z+1\rvert \le \lvert z-2\rvert$;
10)	$\mathrm{Im}(z^2)=1$;	$\lvert z+1\rvert \le \lvert z-2\rvert < \lvert z\rvert$;
11)	$\lvert z-2\rvert=\mathrm{Re}\ z+\mathrm{Im}\ z$;	$\lvert z-2\rvert \le \lvert z\rvert < \lvert z+1\rvert$;
12)	$z+\bar{z}=z\bar{z}$;	$\lvert z+1\rvert < \lvert z\rvert \le \lvert z-2\rvert$.
13)	$\lvert z-2i\rvert=\mathrm{Im}\, z$;	$\lvert z+i\rvert < \lvert z\rvert \le \lvert z-i\rvert$;
14)	$\lvert z+2\rvert=\mathrm{Re}\, z-2$;	$\lvert z\rvert \le \lvert z+i\rvert < \lvert z-i\rvert$;
15)	$\lvert z+\bar{z}\rvert+\lvert z-\bar{z}\rvert=2$;	$\lvert z\rvert \le \lvert z-i\rvert < \lvert z+i\rvert$.

Задача 26. Решить 2-3 из дополнительных задач.

Дополнительные задачи и упражнения

1. Доказать, что если $|z|=1$, то $z^{-1}=\bar{z}$.
2. Вычислить:
   $a)\cos\frac{2\pi}{5}+\cos\frac{4\pi}{5}+\cos\frac{6\pi}{5}+\cos\frac{8\pi}{5}$;
   $b)\cos\frac{2\pi}{7}+\cos\frac{4\pi}{7}+\cos\frac{6\pi}{7}+\cos\frac{8\pi}{7}+\cos\frac{10\pi}{7}+\cos\frac{12\pi}{7}$;
   $c)\sin x+\sin 2x+\ldots+\sin \kappa x$.
3. Выразить:
   $a)$ $\cos 5x$ через $\cos x$ и $\sin x$
   $b)$ $tg5x$ через tgx;
   $c)$ $\sin^5 x$ в виде многочлена первой степени от тригонометрических функций углов, кратных x.
4. Найти сумму всех корней n-ой степени из 1.
5. Вычислить
   $a)1+C_n^1\cos x+\ldots+C_n^n\cos nx$;
   $b)C_n^1\sin x+C_n^2\sin 2x+\ldots+C_n^n\sin nx$.
6. Доказать, что четыре точки z_1, z_2, z_3, z_4 тогда и только тогда лежат на одной окружности, когда дробь $\frac{(z_3-z_1)(z_4-z_2)}{(z_4-z_1)(z_3-z_2)}$ является действительным числом.
7. Доказать, что все (кроме 1) корни 7-й степени из 1, являются первообразными.
8. Вычислить: а) $1+\varepsilon+\varepsilon^2+\ldots+\varepsilon^{n-1}$; б) $1+2\varepsilon+3\varepsilon^2+\ldots+n\varepsilon^{n-1}$; в) $\sum_{k=1}^{n}k^2\varepsilon^{k-1}$; г) $\sum_{k=1}^{n}k^3\varepsilon^{k-1}$,
   где ε - первообразный корень n-й степени из единицы.
9. Выяснить геометрический смысл преобразований комплексной плоскости, определяемых функциями $f(z)$, $g(z)$ и $h(z)=f(g(z))$:
   $a)$ $f(z)=1-\bar{z}$; $g(z)=1+z$;
   $b)$ б) $f(z)=iz+2$; $g(z)=i(z+2)$;
   $c)$ в) $f(z)=i(2-z)$; $g(z)=-(2+\bar{z})$.

5. АЛГЕБРА МНОГОЧЛЕНОВ

Понятия:

1) многочлен от x; степень многочлена;
2) равенство многочленов;
3) сумма и произведение многочленов;
4) делимость;
5) НОД многочленов;
6) приводимые и неприводимые многочлены;
7) взаимно простые многочлены;
8) корень многочлена;
9) кратный корень.

Факты:

1) теорема о делении многочлена с остатком;
2) теорема о НОД в алгоритме Евклида;
3) представление НОД многочленов в виде их комбинации;
4) свойства делимости многочленов;
5) теорема о разложении на неприводимые множители;
6) теорема Безу;
7) делимость на x-c ;
8) признак кратности корня;
9) теорема о существовании корня многочлена над полем комплексных чисел (без доказательства);
10) разложение многочленов в произведение неприводимых множителей над полем комплексных чисел и над полем действительных чисел;
11) формулы Виета и Лагранжа.

Многочлен $f(x)$ степени n над полем P определяется как выражение вида $a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n$. Здесь $a_0, a_1, \ldots, a_n$ - коэффициенты из некоторого числового поля P, $a_0 \neq 0$, n - целое неотрицательное число, x - переменная, причем, x^0 отожествляют с единицей.

Число 0 также является многочленом, но степень его не определена. Над многочленами выполняют действия сложения, вычитания, умножения по правилам, известным из средней школы. Относительно этих действий множество $P[x]$ всех многочленов над полем P образует кольцо (но не поле, ибо операция деления в $P[x]$ выполняется не всегда, даже если речь идет не о делении на 0). Однако, в кольце $P[x]$ выполнимо деление с остатком: для произвольного многочлена $f(x)$ и ненулевого многочлена $g(x)$ существует единственная пара многочленов $q(x)$- частное и $r(x)$- остаток, таких, что $f(x) = g(x)q(x) + r(x)$, и при $r(x) \neq 0$ степень $r(x)$ меньше степени $g(x)$.

Если $f(x) = g(x)q(x)$, то говорят, что $f(x)$ делится на $g(x)$. Процедуру деления с остатком выполняют в обычной форме.

<u>Пример 1.</u> Разделить с остатком многочлен $f(x) = x^4 - 2x^3 + x - 1$ на многочлен $g(x) = x^2 - 2$.

$$
\begin{array}{rrrr|l}
x^4 & -2x^3 & & +x-1 & x^2-2 \\
\cline{5-5}
x^4 & & -2x^2 & & x^2-2x+2 \\
\cline{1-4}
 & -2x^3 & +2x^2 & +x-1 & \\
 & -2x^3 & & +4x & \\
\cline{2-4}
 & & 2x^2 & -3x-1 & \\
 & & 2x^2 & -4 & \\
\cline{3-4}
 & & & -3x+3 &
\end{array}
$$

Получим $q(x) = x^2 - 2x + 2$, $r(x) = -3x + 3$. ■

Деление с остатком используют при решении задачи о нахождении наибольшего общего делителя многочленов $f(x)$ и $g(x)$ - НОД$(f(x), g(x))$. Точнее, применяется алгоритм последовательного деления, известный под названием *алгоритм Евклида*:

$f(x) = g(x)q(x) + r(x)$

$g(x) = r(x)q_1 + r_1(x)$

$r(x) = r_1(x)q_2(x) + r_2(x)$

....

$r_{k-2}(x) = r_{k-1}(x)q_k(x) + r_k(x)$

$r_{k-1}(x) = r_k(x)q_{k+1}(x)$

Здесь $r_k(x) =$ НОД$(f(x), g(x))$.

<u>Пример 2</u>. Найти наибольший общий делитель многочленов
$f(x) = 2x^5 - 3x^4 - 5x^3 + x^2 + 6x + 3, g(x) = 3x^4 + 2x^3 - 3x^2 - 5x - 2.$

□ Чтобы избежать дробных коэффициентов (а НОД находится с точностью до постоянного ненулевого множителя), умножим $f(x)$ на 3:

$$
\begin{array}{r|l}
6x^5 - 9x^4 - 15x^3 + 3x^2 + 18x + 9 & 3x^4 + 2x^3 - 3x^2 - 5x - 2 \\
\cline{2-2}
6x^5 + 4x^4 - 6x^3 - 10x^2 - 4x & 2x \\
\cline{1-1}
-13x^4 - 9x^3 + 13x^2 + 22x + 9 &
\end{array}
$$

Умножим полученную разность на 3 и продолжим деление. При этом, конечно, частное исказится, но остаток определяется с точностью до множителя нулевой степени.

$$
\begin{array}{r|l}
-39x^4 - 27x^3 + 39x^2 + 66x + 27 & 3x^4 + 2x^3 - 3x^2 - 5x - 2 \\
\cline{2-2}
-39x^4 - 26x^3 + 39x^2 + 65x + 26 & -13 \\
\cline{1-1}
-x^3 \qquad + x \ + 1 &
\end{array}
$$

Предлагаем самим убедится, что $g(x)$ делится на $r(x)$ без остатка. Получили, что НОД$(f(x), g(x)) = x^3 - x - 1$. ■

Алгоритм Евклида позволяет решать важную для приложений задачу о нахождении для многочленов $f(x)$ и $g(x)$ таких многочленов $u(x)$ и $v(x)$, что

$$f(x)u(x) + g(x)v(x) = \text{НОД}(f(x), g(x)).$$

(Для взаимно простых многочленов последнее соотношение принимает вид $f(x)u(x)+g(x)v(x)=1$ и является критерием взаимной простоты $f(x)$ и $g(x)$). При этом из цепочки равенств, кроме последнего, полученных применением к многочленам $f(x)$ и $g(x)$ алгоритма Евклида, следует последовательно исключить $r_{k-1}(x), r_{k-2}(x), \ldots, r(x)$, выразив $r_k(x)$ через $f(x)$ и $g(x)$ с “многочленными коэффициентами” $u(x)$ и $v(x)$.

Понятно, что при решении этой задачи деление с остатком следует выполнять, не пренебрегая множителями нулевой степени.

<u>Пример 3.</u> Для многочленов $f(x)=x^4+x^3+x^2+x+1$ и $g(x)=4x^3+3x^2+2x+1$ найти многочлены $u(x)$ и $v(x)$ такие, что $f(x)u(x)+g(x)v(x)=$ НОД$(f(x),g(x))$.

☐ Предлагаем самостоятельно применить к данным многочленам алгоритм Евклида и убедиться в том, что $f(x)=g(x)\left(\frac{1}{4}x+\frac{1}{16}\right)+\frac{5}{16}\left(x^2+2x+3\right)$,

$$g(x)=\frac{5}{16}\left(x^2+2x+3\right)\left(\frac{64}{5}x-16\right)+16.$$

Здесь $r(x)=\frac{5}{16}\left(x^2+2x+3\right)$, $r_1(x)=16$, $q(x)=\frac{1}{4}x+\frac{1}{16}$, $q_1(x)=\frac{64}{5}-16$.

Понятно, что $r(x)$ делится на число 16, поэтому НОД$(f(x),g(x))=r_1(x)$. Итак, из соотношений $f(x)=q(x)\left(\frac{1}{4}x+\frac{1}{16}\right)+r(x)$, $g(x)=r(x)\left(\frac{64}{5}x-16\right)+16$ нам надо исключить $r(x)$. В итоге получим $f(x)\left(-\frac{64}{5}x+16\right)+g(x)\left(\frac{16}{5}x^2-\frac{16}{5}x\right)=16$.

В случае необходимости, последнее равенство можно разделить на 16. ■

Число a называется *корнем* многочлена $f(x)$, если $f(a)=0$. Критерием того, что a есть корень многочлена, является делимость $f(x)$ на $(x-a)$ (без остатка!). Этот критерий легко доказать на основании *теоремы Безу*: остаток от деления многочлена $f(x)$ на $x-c$ равен $f(c)$.

Сформулированный критерий позволяет дать определение *кратного корня*. Число a является корнем многочлена $f(x)$ кратности k, $k\in N$, если $f(x)$ делится на $(x-a)^k$ и $f(x)$ не делится на $(x-a)^{k+1}$. Известно, что если a является корнем многочлена $f(x)$ кратности k, то для производной $f'(x)$ a является корнем кратности $k-1$.

Деление многочлена $f(x)$ на бином $x-c$ удобно проводить с помощью схемы Горнера, которая основана на рекуррентных соотношениях: $b_k=cb_{k-1}+a_k$, $k=1,\ldots,n-1$ $b_0=a_0$, $b_0,b_1,\ldots,b_{n-1}$ - коэффициенты частного, а $r=cb_{n-1}+a_n$ - остаток. Схема Горнера состоит из двух строк. В первой располагаются коэффициенты многочлена $f(x)$, а вторая заполняется последовательно коэффициентами частного $q(x)$ и остатком r (иногда впереди еще ставят значение c).

<u>Пример 4.</u> Разделить по схеме Горнера многочлен $f(x)=x^5-2x^3+3x^2-5x+11$ на $x+\frac{1}{2}$.

☐

	1	0	−2	3	−5	11
$-\frac{1}{2}$	1	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{7}{4}$	$\frac{31}{8}$	$-\frac{111}{16}$	$\frac{463}{32}$

Таким образом, $q(x)=x^4-\frac{1}{2}x^3-\frac{7}{4}x^2+\frac{31}{8}x-\frac{111}{16}$, $r=\frac{463}{32}$.

Из сказанного выше вытекает, что число $-\frac{1}{2}$ не является корнем многочлена $f(x)$.

Более того, $f(-\frac{1}{2})=\frac{463}{32}$. ■

Схема Горнера позволяет многочлен $f(x)$, записанный по убыванию степени x, разложить по степеням бинома $x-c$, а также определить кратность корня.

<u>Пример 5.</u> Найти корни многочлена $f(x)=x^4+4x^3-18x^2+20x-7$ кратности выше первой и определить эту кратность.

☐ Поскольку корни кратности больше 1 являются и корнями производной, то найдем: $f'(x)=4(x^3+3x^2-9x+5)$. Нетрудно заметить, что число 1 является корнем многочлена $f'(x)$. Проверим является ли 1 корнем многочлена $f(x)$ и, если да, то какой кратности. Для этого делим на $x-1$ многочлен $f(x)$, потом частное и т.д.

	1	4	-18	20	-7
1	1	5	-13	7	0
1	1	6	-7	0	
1	1	7	0		
1	1	**8 ≠ 0**			

Итак, $f(x)=(x-1)^3(x+7)$, т.е. число 1 есть корень многочлена $f(x)$ кратности 3. ■

Находить *рациональные* корни многочлена с *целочисленными* коэффициентами поможет следующий факт: если несократимая дробь $\frac{p}{q}$ является корнем такого многочлена, то p является делителем свободного члена, а q - делителем старшего коэффициента.

<u>Пример 6.</u> Разложить многочлен $f(x)=x^5-3x^3+x^2-2x+1$ по степеням двучлена $x-1$.

☐ Речь идет о представлении данного многочлена в виде

$$f(x)=c_5(x-1)^5+c_4(x-1)^4+\ldots+c_1(x-1)+c_0.$$

Известно, что $c_i=\frac{f^{(i)}(1)}{i!}$, $i=1,\ldots,5$, $c_0=f(1)$, но коэффициенты $c_0,c_1,\ldots$ удобно находить, вычисляя последовательно остатки от деления $f(x)$ на $x-1$, полученного частного на $x-1$, нового частного на $x-1$ и т.д.

	1	0	-3	1	-2	1
1	1	1	-2	-1	-3	-2
1	1	2	0	-1	-4	
1	1	3	3	2		
1	1	4	7			
1	1	5				
1	1					

Таким образом,

$$f(x)=(x-1)^5+5(x-1)^4+7(x-1)^3+2(x-1)^2-4(x-1)-2.$$

Заметим, что

$-2=f(1),\ -4=\dfrac{f'(1)}{1!},\ 2=\dfrac{f''(1)}{2!},\ 7=\dfrac{f'''(1)}{3!},\ 5=\dfrac{f^{IV}(1)}{4!},\ 1=\dfrac{f^{V}(1)}{5!}$, откуда легко найти значение $f(x)$ и всех его производных при $x=1$. ■

В первом индивидуальном задании нужно было построить многочлен степени, не превышающей 4, по его значениям в пяти точках. *Интерполяционная формула Лагранжа* позволяет сразу вычислить многочлен $f(x)$ степени n, если известно, что $f(\alpha_i)=c_i$ при $i=1,2,\ldots,n+1$. А именно:

$$f(x)=\sum_{i=1}^{n+1}\frac{(x-\alpha_1)\ldots(x-\alpha_{i-1})(x-\alpha_{i+1})\ldots(x-\alpha_{n+1})}{(\alpha_i-\alpha_1)\ldots(\alpha_i-\alpha_{i-1})(\alpha_i-\alpha_{i+1})\ldots(\alpha_i-\alpha_{n+1})}.$$

Пример 7. Построить многочлен $f(x)$ четвертой степени такой, что $f(0)=1, f(1)=0, f(-1)=8, f(2)=17, f(3)=136$.

□ Согласно формуле Лагранжа,

$$f(x)=\frac{1(x-1)(x+1)(x-2)(x-3)}{(0-1)(0+2)(0-2)(0-3)}+\frac{0(x-0)(x+1)(x-2)(x-3)}{(1-0)(1+1)(1-2)(1-3)}+\frac{8(x-0)(x-1)(x-2)(x-3)}{(1-0)(-1-1)(-1-3)}+$$

$$+\frac{17(x-0)(x-1)(x+1)(x-3)}{(2-0)(2-1)(2+1)(2-3)}+\frac{136(x-0)(x-1)(x+1)(x-2)}{(3-0)(3-1)(3+1)(3-2)}.$$

После упрощения будем иметь: $f(x)=3x^4-4x^3+1$. ■

Если $f(x)$, $g(x)\neq 0$ - некоторые многочлены над полем P, то *рациональная дробь* над этим полем определяется как отношение $\dfrac{f(x)}{g(x)}$. Рациональная дробь называется *правильной*, если степень числителя $f(x)$ меньше степени знаменателя, а среди правильных дробей выделяют *простейшие* или *элементарные*. Элементарные дроби имеют вид $\dfrac{f(x)}{p^k(x)}$, где $p(x)$ - *неприводимый* над полем P многочлен (т.е. многочлен, который нельзя представить в виде произведения двух многочленов над полем P степени меньшей, чем степень многочлена $p(x)$), $k\geq 1$ и степень $f(x)$ меньше степени $p(x)$.

Известно, что всякая правильная рациональная дробь однозначно разлагается в сумму простейших.

Пример 8. Разложить в сумму простейших над полем действительных чисел рациональную дробь $\dfrac{1}{(x+1)^2(x^2+1)}$.

□ Знаменатель данной дроби разложен в произведение неприводимых многочленов над полем R $x+1$ и x^2+1. Решим задачу методом неопределенных коэффициентов, основываясь на том, что знаменателями простейших дробей могут быть многочлены $x+1$, $(x+1)^2$, (x^2+1): $\dfrac{1}{(x+1)^2(x^2+1)}=\dfrac{A}{x+1}+\dfrac{B}{(x+1)^2}+\dfrac{Cx+D}{x^2+1}$.

Здесь A,B,C,D - неизвестные коэффициенты числителей элементарных дробей. Приведя правую часть последнего равенства к общему знаменателю и приравняв числители обеих частей, будем иметь: $1=A(x+1)(x^2+1)+B(x^2+1)+(Cx+D)(x+1)^2$. Значение неизвестных коэффициентов можно найти из системы линейных уравнений, которую получим, дав неизвестному x четыре значения. Например, положив последовательно $x=-1;\ 0;\ 1;\ -2$, будем иметь

$1=2B, 1=A+B+D, 1=4A+2B+4C+4D, 1=-5A+5B-2C+D$. Откуда

$B=\dfrac{1}{2},\ C=-\dfrac{1}{2},\ D=0,\ A=\dfrac{1}{2}$, т.е. $\dfrac{1}{(x+1)^2(x^2+1)}=\dfrac{1}{2(x+1)}+\dfrac{1}{2(x+1)^2}-\dfrac{x}{2(x^2+1)}$. ■

Контрольные вопросы

1. Существует ли многочлен третьей степени с действительными коэффициентами, все корни которого мнимые?
2. Существует ли многочлен 4-й степени с действительными коэффициентами, имеющий трехкратный корень $i+2$?
3. Существует ли многочлен 4-й степени с действительными коэффициентами, имеющий корни $i+1$, $i+2$, $i+3$?
4. Существует ли многочлен 4-й степени с действительными коэффициентами, имеющий корни $2+i$, $2-i$, $3+i$?
5. Может ли многочлен x^3+px+q с нечетными целыми коэффициентами p и q иметь целый корень?
6. Известно, что число c является k-кратным корнем многочлена $f(x)$ и s-кратным корнем многочлена $g(x)$. Какую кратность имеет корень c для многочлена $f(x)g(x)$? Ответ обосновать.
7. Известно, что число c является k-кратным корнем многочлена $f(x)$ и s-кратным корнем многочлена $g(x)$. Какую кратность имеет корень c для многочлена $f(x)+g(x)$? Ответ обосновать.
8. Составить многочлен наименьшей степени с целыми коэффициентами, имеющий корень i-3.
9. Существует ли многочлен третьей степени с рациональными коэффициентами, имеющий только один иррациональный корень?

10. Многочлены $p(x)$ и $p'(x)$ взаимно просты. Следует ли из этого, что многочлен $p(x)$ не имеет кратных корней?
11. Многочлен $p(x)$ не имеет кратных корней. Следует ли из этого, что многочлены $p(x)$ и $p'(x)$ взаимно просты?
12. Обязательно ли, кратный корень многочлена $p'(x)$ является также кратным корнем многочлена $p(x)$?
13. Пусть число c является корнем четного многочлена $p(x)$. Будет ли корнем число $-c$ для многочлена $p(x)$? А для нечетного многочлена?
14. Существует ли над полеем R неприводимый многочлен третьей степени?

Задачи и упражнения

[4, № 546, 549-552, 554-557, 577-580, 585, 587, 589, 590, 592, 593, 624-626, 650];
[6, № 7.1.1-7.1.4, 7.2.1-7.2.4, 7.2.8, 7.2.10, 7.2.11, 7.6.1, 7.6.2, 7.6.4, 7.7.2].

Индивидуальные задания

Задача 27. Даны многочлены $f(x)$, $g(x)$, $h(x)$. Вычислить наибольший общий делитель: a) многочленов $f(x)$ и $g(x)$;

b) многочленов $f(x)$ и $h(x)$;

c) многочленов $g(x)$ и $h(x)$.

	$f(x)$	$g(x)$	$h(x)$
1.	x^2+4x+4	$x^3-6x^2+12x-8$	$x^4-4x^3+16x-16$
2.	x^2-2x+1	x^3-8x+3	x^4-6x^2+8x-3
3.	x^2+2x+3	$2x^3-9x+27$	x^4-4x^3+27
4.	x^2+3x-4	x^3-3x^2+3x-1	$x^5-10x^3+20x^2-15x+4$
5.	$3x^2-4x+3$	$2x^3+3x^2-1$	$3x^5+5x^4+5x+3$
6.	$3x^2+3x+2$	$2x^3-3x^2-4$	$3x^5-15x^4+20x^3-16$
7.	$9x^2+2x+1$	x^3-3x+2	$3x^4-4x^3+1$
8.	$3x^2+4x+4$	x^3-8	$3x^4-8x^3+16$
9.	x^2-1	$4x^3+3x^2+2x+1$	$4x^5-5x^4+1$
10.	$9x^2-4$	x^3-3x^2+3x-1	$3x^5-10x^4+10x^3-5x+2$
11.	$3x^2+8x-3$	x^3-3x-2	$3x^4+8x^3+6x^2-1$
12.	$x^2-4x+12$	x^3-2x+4	$x^4+32x+48$
13.	x^2-4	$x^3-4x^2+12x-12$	x^5+20x^2-48
14.	x^2+3x+6	$2x^3-3x^2+1$	$x^5-10x^2+15x-6$
15.	$3x^2+x-2$	$x^3+6x^2+12x+8$	$3x^4+16x^3+24x^2-16$

Задача 28. Для многочленов $f(x)$ и $g(x)$ из задачи 27 найти такие многочлены $u(x)$ и $v(x)$, что $f(x)u(x)+g(x)v(x)=1$.

Задача 29. Многочлен $h(x)$ из задачи 27 разложить:

а) по степеням двучлена x-2;

б) по степеням двучлена $x+1$.

Задача 30. Найти кратные корни многочлена $h(x)$ из задачи 27 и определить их кратность.

Задача 31. Разложить в сумму простейших дробей над полем действительных чисел:

	(a)	(b)
1.	$\frac{x-9}{x^3-9x}$	$\frac{x^2-4x}{x^4-3x^2-4}$
2.	$\frac{x-2}{x^3-x^2+2}$	$\frac{x^3+1}{x^4-x^2}$
3.	$\frac{x^2-2}{x^3-8}$	$\frac{2x-1}{x^4+x^3}$
4.	$\frac{1}{x^3+x^2}$	$\frac{x^3}{x^4+x^2+1}$
5.	$\frac{1}{x^3-x^2-2x}$	$\frac{x^3}{x^4-1}$
6.	$\frac{x^2-2}{x^3-x^2}$	$\frac{x^3}{x^4+4}$
7.	$\frac{x^2+1}{x^3-7x+6}$	$\frac{1}{x^4-x}$
8.	$\frac{x+1}{x^3-2x-4}$	$\frac{x^2-1}{x^4-4x^2}$
9.	$\frac{x+2}{x^3+2x}$	$\frac{x^2}{x^4-2x^2+1}$
10.	$\frac{1}{x^3+4x^2+4x}$	$\frac{x^2+x}{x^4+3x^2+2}$
11.	$\frac{x+3}{x^3-7x-6}$	$\frac{x-1}{x^4+x}$
12.	$\frac{x+1}{x^3-2x^2+x}$	$\frac{1}{x^4+1}$
13.	$\frac{x+1}{x^3-3x^2+2x}$	$\frac{x^2-2}{x^4-x^3+x^2}$
14.	$\frac{x^2-x}{x^3+1}$	$\frac{1}{x^4-3x^2-2x}$
15.	$\frac{x}{x^3-1}$	$\frac{2x-2}{x^4+4x^3+4x^2}$

Задача 32. Решить 3-4 из дополнительных задач.

Дополнительные задачи и упражнения.

1. Известно, что $f(x)$ при делении на $x+1$ дает остаток 1, а при делении на $x+2$ дает остаток 2. Какой остаток дает $f(x)$ при делении на $(x+1)(x+2)$?

2. Некоторый многочлен при делении на $(x-1)(x-2)$ и на $(x-2)(x-3)$ дает соответственно остатки $2x$ и $x+2$. Какой остаток получится при делении этого многочлена на $(x-1)(x-2)(x-3)$?
3. Может ли некоторый многочлен при делении на $(x-1)(x-2)$ и на $(x-2)(x-3)$ давать соответственно остатки $2x$ и $4x$?
4. Известно, что $f(x)$ и $g(x)$ при делении на x^2+x+1 дают один и тот же остаток $x+1$. Какой остаток при делении на x^2+x+1 дает многочлен $f(x)g(x)$?
5. Разложить на множители многочлен $x^3 -3x+A$ зная, что у него есть кратный корень?
6. Разложить на множители многочлен $x^3-7x^2+14x-A$ зная, что его корни образуют геометрическую прогрессию.
7. Решить уравнение $x^3-6x^2+Ax-6=0$, если один из корней равен 3.
8. При каких значениях A многочлен $3x^4+4x^3-6x^2-12x+A$ имеет кратные корни?
9. При каких значениях A один из корней многочлена $(A^2-5A+3)x^2+(3A-1)x+2$ вдвое больше другого?
10. При каких целых значениях p многочлен x^3+px-2 имеет хотя бы один целочисленный корень?
11. Дан многочлен $f(x)$ с действительными коэффициентами и известно, что $f(1+i)=1+i$. Доказать, что $f(1-i)=1-i$.
12. Дан многочлен $f(x)$ с действительными коэффициентами и известно, что $f(i)=i$. Доказать, что $f\left(\frac{1}{i}\right)=\frac{1}{i}$.
13. Доказать, что в выражении $(1+x+\ldots+x^{100})(1-x+x^2-\ldots+x^{100})$ не встречается x в нечетных степенях.
14. Найти сумму коэффициентов при всех степенях x в $(1-3x+2x^2)^{743}(1+3x-2x^2)^{744}$ после раскрытия скобок и приведения подобных членов.
15. При каких значениях A многочлены x^2+Ax+1 и x^2+x+A имеют общий корень?
16. Для каждого из данных многочленов найти границы действительных корней и вычислить корни с точночтью до 0,001:

а) $3x^4-4x^3-1$; б) $3x^4-8x^3+2$; в) x^3-6x-7;

г) x^3-2x+2; д) x^4+4x^3-1; а) x^4+4x-1.

6. КОЛЬЦО МНОГОЧЛЕНОВ ОТ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

Понятия:

1) многочлен от нескольких переменных;
2) равенство многочленов;
3) степень многочлена;
4) сумма и произведение многочленов;

5) симметрические многочлены;
6) элементарные симметрические многочлены;
7) лексикографическое расположение членов многочлена;
8) результант двух многочленов;
9) дискриминант многочлена.

Факты:

1) основная теорема о симметрических многочленах;
2) связь между дискриминантом и наличием кратных корней;
3) связь между результантом и наличием общих корней двух многочленов.

Контрольные вопросы

1. Образуют ли все симметрические многочлены от n переменных относительно обычных действий кольцо? поле?
2. Верно ли, что произвольный многочлен можно "преобразовать" в симметрический, прибавив к нему несколько членов?
3. Верно ли, что значения произвольного многочлена от основных симметрических многочленов является симметрическим многочленом?
4. Пусть x_1, x_2 - корни квадратного уравнения с целыми коэффициентами. Верно ли, что $x_1^n+x_2^n$ является целым числом для произвольных натуральных n?
5. Какой из членов выше, а какой ниже (в смысле лексикографического порядка): a) $x_1^3x_2x_3$ или $x_1x_2^5x_3^2$; b) $x_1^5x_2x_3^4x_4$ или $x_1^5x_2x_3^4x_4^2$?
6. Являются ли симметрическими многочлены:

a) $f(x_1,x_2,x_3)=x_1x_3+x_2^2x_3+x_2x_3^2+x_3x_1$;

b) $f(x_1,x_2,x_3)=x_2x_3+x_2x_4+x_3x_1$?

Задачи и упражнения

1. Выразить данные симметрические многочлены через элементарные симметрические многочлены : а) $x_1^4+x_2^4+x_3^4-x_2^2x_3^2-x_2^2x_3^2-x_1^2x_2^2$; б) $(x_1-x_2)^2(x_1-x_3)^2(x_2-x_3)^2$; в) $(x_1x_2+x_3x_4)(x_1x_3+x_2x_4)(x_1x_4+x_2x_3)$
2. Моногенный многочлен $S(Ax_1^{k_1}\ldots x_n^{k_n})$, $k_1\ge k_2\ldots\ge k_n$ состоит из всех членов, которые получаются из члена $Ax_1^{k_1}\ldots x_n^{k_n}$ путем различных перестановок переменных.

а) Доказать, что любой симметрический многочлен является суммой моногеных.

б) Выразить через элементарные симметрические многочлены такие многочлены относительно n неизвестных: $S(x_1^3)$, $S(x_1^2x_2^2)$.

в) Вычислить значение $S(x_1^3x_2^3)$ от корней уравнения $x^4-2x^3-2x^2-2x-2=0$.