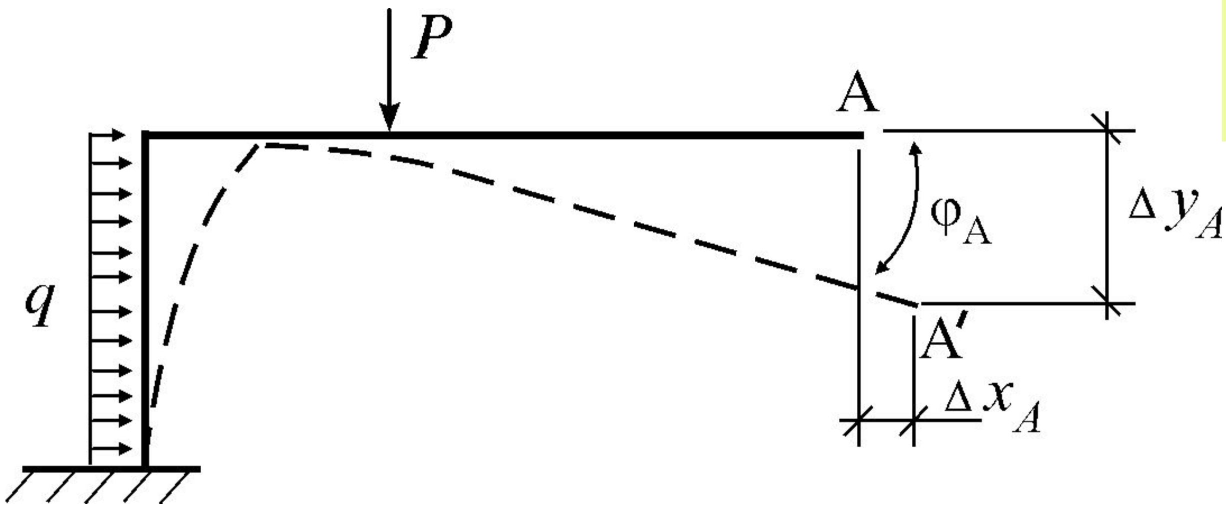
Лекция 6

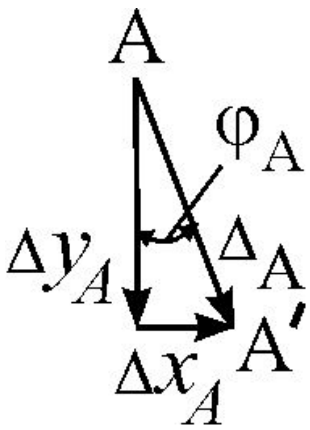
ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ

1. Понятие о перемещениях

При воздействии нагрузки, температуры и других факторов сооружения меняют свою форму, а его точки получают перемещения:



Перемещение – векторная величина:



Перемещение любой точки *A* на плоскости можно задать через его модуль Δ_A и направление ϕ_A, которые определяются по формулам:

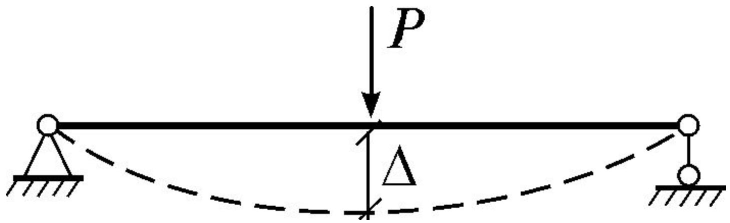
$$\Delta_A = \sqrt{(\Delta x_A)^2 + (\Delta y_A)^2}, \qquad \varphi_A = arc\,tg\,\frac{\Delta x_A}{\Delta y_A},$$

где Δx_A и Δy_A − горизонтальная и вертикальная составляющие Δ_A.

Методы определения перемещений основаны на вычислении работ внешних и внутренних сил.

2. Действительные работы внешних и внутренних сил. Потенциальная энергия

Действительным перемещением называется перемещение, вызванное силой по направлению ее действия.



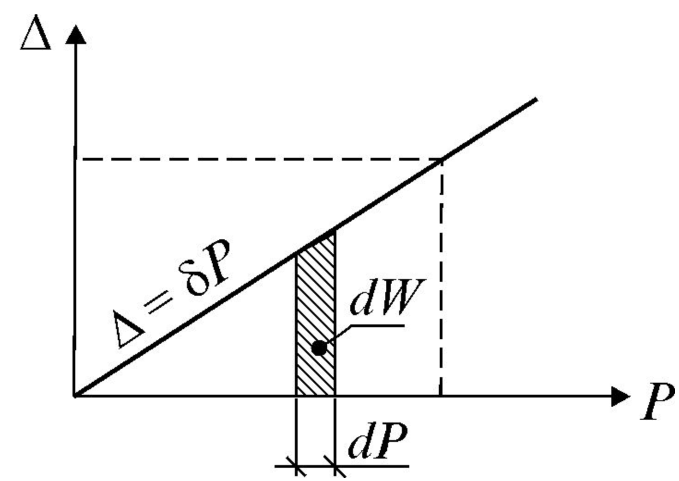
В упругих системах перемещение Δ прямо пропорционально действующей силе, и в них выполняется ***закон Гука***

$$\Delta = \delta P.$$

где δ − ***податливость***.

Эту зависимость представим в виде:

Диаграмма Δ−P



Сила на действительном перемещении выполняет некоторую работу. В механике ее называют ***действительной работой***.

Действительная работа силы *P* определяется по диаграмме *Δ−P*:

$$W = \int_0^P dW = \frac{1}{2} P\Delta.$$

Теорема Клапейрона: *Сила, действующая на упругую систему, совершает работу, равную половине произведения силы на перемещение.*

Если воспользоваться законом Гука, то

$$W = \frac{1}{2}\delta P^2 \geq 0.$$

Значит, ***внешняя сила совершает положительную работу***.

Когда действуют несколько сил, то по принципу суперпозиции

$$W = \frac{1}{2}\sum P_k \Delta_k.$$

В идеально-упругой системе работа внешних сил ***W*** полностью переходит в потенциальную энергию деформации ***U:***

$$W = U.$$

Если убрать внешние силы, упругая система возвратится в исходное положение. Эту работу совершают внутренние силы.

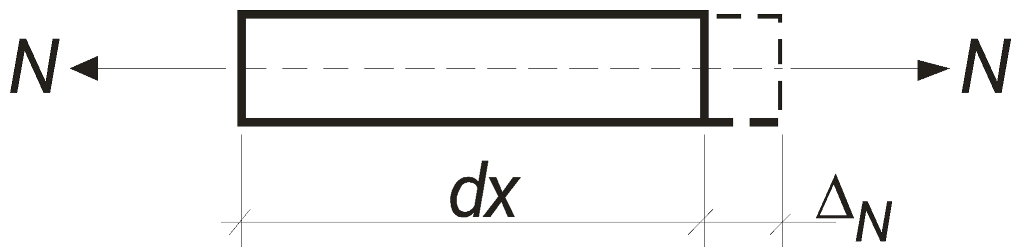
Так как работа внешних сил ***W*** положительна, то работа внутренних сил ***V*** будет отрицательной:

$$W = -V.$$

Определим работу внутренних сил ***M, Q, N*** плоской стержневой системы.

а) Работа продольной силы N

Пара продольных сил N, действующих на элемент dx, приводят к его чистому растяжению:



По теореме Клапейрона, эти силы на общей деформации элемента Δ_N совершают действительную работу

$$-dV_N = \frac{1}{2} N \cdot \Delta_N \,.$$

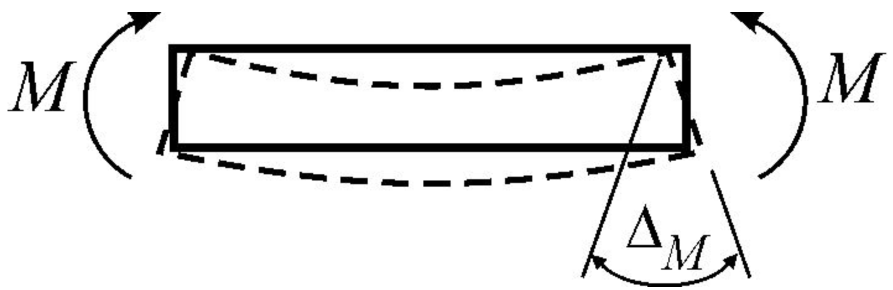
С учетом закона Гука при растяжении $\Delta_N = \dfrac{N\,dx}{EF}$ получим

$$-dV_N = \frac{N^2}{2EF}\,dx\,,$$

где E – модуль Юнга, F – площадь сечения, EF – жесткость на растяжение.

б) Работа изгибающего момента M

Пара изгибающих моментов M, действующих на элемент dx, приводят к его чистому изгибу :



На общей деформации $\varDelta_M$ эти моменты совершают работу

$$-dV_M = \frac{1}{2} M \cdot \Delta_M .$$

По закону Гука

$$\varDelta_M = \frac{M\,dx}{EI}.$$

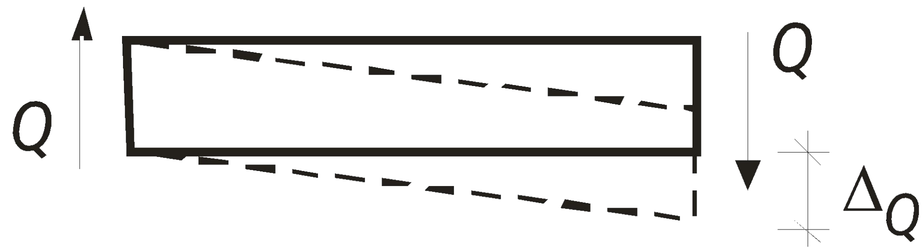
Значит,

$$-dV_M = \frac{M^2}{2EI} dx ,$$

где I – момент инерции сечения, EI – жесткость на изгиб.

в) Работа поперечной силы Q

Действие пары поперечных сил Q приводит к чистому сдвигу элемента dx:



На общей деформации Δ_Q они совершают работу

$$-dV_Q = \frac{1}{2} Q \cdot \Delta_Q .$$

По закону Гука

$$\Delta_Q = \mu \frac{Q\,dx}{GF},$$

где μ – коэффициент формы сечения, GF – жесткость на сдвиг.

Поэтому

$$-dV_Q = \mu \frac{Q^2}{2GF} dx .$$

Воспользуемся принципом суперпозиции:

$$-dV = -(dV_M + dV_Q + dV_N) = \frac{1}{2}\left(\frac{M^2}{EI} + \frac{Q^2}{GF} + \frac{N^2}{EF}\right)dx$$

Если проинтегрировать это выражение по всей длине элемента l и учесть наличие в системе n стержней, получим:

$$U = -V = \frac{1}{2}\sum\int_l\left(\frac{M^2}{EI} + \frac{Q^2}{GF} + \frac{N^2}{EF}\right)dx$$

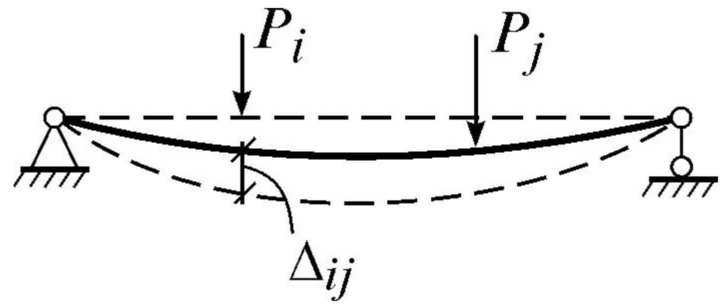
− потенциальная энергия стержневой системы

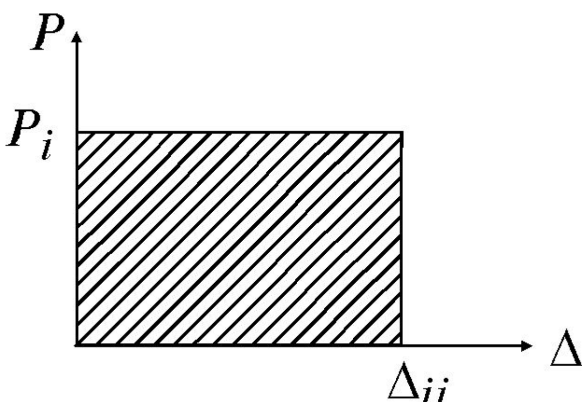
3. Возможные перемещения. Возможная работа внешних и внутренних сил

Малое перемещение, допускаемое связями системы, называется ***возможным перемещением***. Причиной возможного перемещения могут быть другие силы, изменение температуры, осадки опор и др.

Работа силы на ее возможном перемещении называется ***возможной работой***. Возможное перемещение обозначим Δ_{ij}, а возможную работу W_{ij} (индекс i означает направление, j – причину).

Например, если в некоторой точке балки действует сила P_i, а затем в другой точке начнет действовать другая сила P_j, то балка в точке действия силы P_i получит возможное перемещение Δ_{ij}.





Так как в это время сила P_i остается постоянной, совершаемая ею возможная работа будет равна площади прямоугольника:

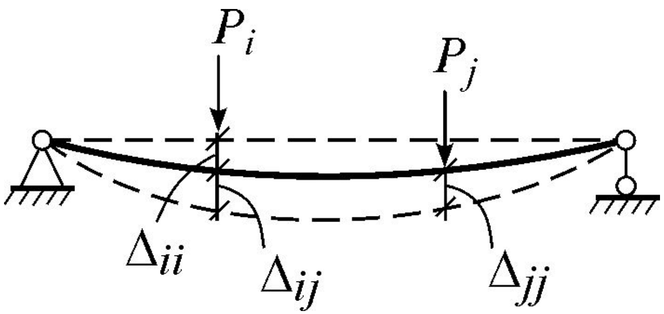
$$W_{ij}=P_i\Delta_{ij}.$$

Возможная работа равна произведению силы на возможное перемещение

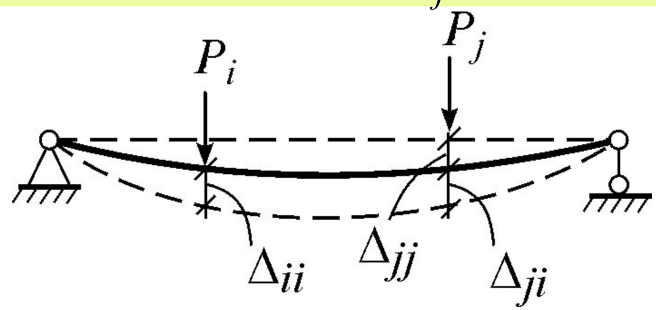
Теорема Бетти. *Возможная работа сил первого состояния на перемещениях второго состояния равна возможной работе сил второго состояния на перемещениях первого.*

Доказательство. Приложим силы P_i и P_j в разной последовательности:

1-е состояние: P_i , затем P_j



2-е состояние: P_j , затем P_i



В обоих состояниях силы на действительных перемещениях совершают действительные, а на возможных перемещениях – возможные работы:

$$W_{ij} = \frac{1}{2} P_i \Delta_{ii} + \frac{1}{2} P_j \Delta_{jj} + P_i \Delta_{ij}, \qquad W_{ji} = \frac{1}{2} P_j \Delta_{jj} + \frac{1}{2} P_i \Delta_{ii} + P_j \Delta_{ji}.$$

На основании принципа суперпозиции, результат не зависит от порядка приложения сил. Поэтому обе работы равны: $W_{ij} = W_{jI}$. Значит,

$$P_i \Delta_{ij} = P_j \Delta_{ji}.$$

Эту теорему часто называют ***теоремой о взаимности работ***.

Определим возможную работу внутренних сил.

Для этого рассмотрим два состояния системы:

1) действие силы P_i − она вызывает внутренние усилия M_i, Q_i, N_i;

2) действие силы P_j − пусть она вызывает возможные деформации

$$\Delta_{Mj} = \frac{M_j}{EI}dx, \qquad \Delta_{Qj} = \mu\frac{Q_j}{GF}dx, \qquad \Delta_{Nj} = \frac{N_j}{EF}dx.$$

Внутренние усилия первого состояния на деформациях второго состояния совершат возможную работу:

$$-dV_{ij} = M_i \cdot \Delta_{Mj} + Q_i \cdot \Delta_{Qj} + N_i \cdot \Delta_{Nj} = \frac{M_iM_j}{EI}dx + \mu\frac{Q_iQ_j}{GF}dx + \frac{N_iN_j}{EF}dx.$$

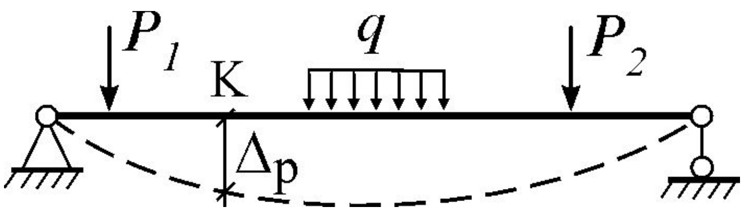
Если это выражение проинтегрировать по длине элемента l и учесть наличие в системе *n* стержней, получим формулу:

$$-V_{ij} = \sum\int\left(\frac{M_iM_j}{EI}dx \quad \frac{Q_iQ_j}{GF} + \frac{N_iN_j}{EF}\right)$$

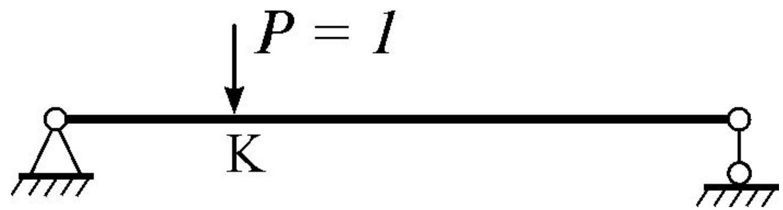
− возможная работа внутренних сил

4. Интеграл Мора. Определение перемещений

Рассмотрим два состояния стержневой системы:



грузовое состояние (ГС)



единичное состояние (ЕС)

Внутренние силы грузового состояния M_P, Q_P, N_P на деформациях единичного состояния $\frac{\overline{M}}{EI}dx, \mu\frac{\overline{Q}}{GF}dx, \frac{\overline{N}}{EF}dx$ совершат возможную работу

$$-V_{P1} = \sum\int\left(\frac{M_P\overline{M}}{EI} + \mu\frac{Q_P\overline{Q}}{GF} + \frac{N_P\overline{N}}{EF}\right)dx.$$

А сила $P=1$ единичного состояния на перемещении грузового состояния Δ_P совершит возможную работу
$W_{1P}=1\cdot\Delta_P=\Delta_P$.

По принципу возможных перемещений, в упругих системах обе работы должны быть равны: $W_{1P} = -V_{P1}$. Отсюда получаем формулу:

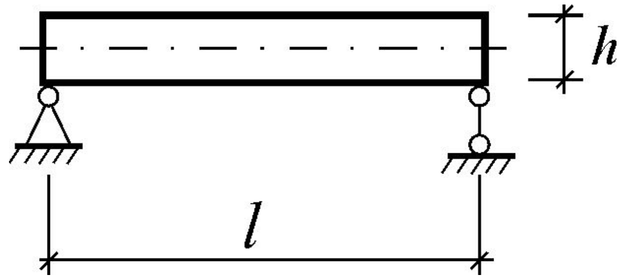
$$\Delta_P = \sum\int\left(\frac{M_P\overline{M}}{EI} + \mu\frac{Q_P\overline{Q}}{GF} + \frac{N_P\overline{N}}{EF}\right)dx$$

– формула Мора

Она используется для определения перемещений стержневой системы.

5. Отдельные случаи применения формулы Мора

1) В балках



Возможны три случая:

1) если $\frac{l}{h} > 8$, учитываются лишь моменты:

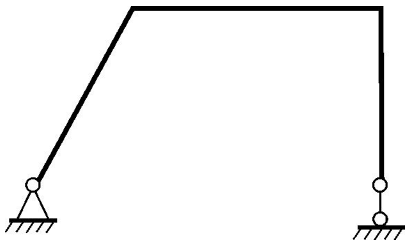
$$\Delta_P = \sum\int \frac{M_P \overline{M}}{EI} dx.$$

2) если $5 \le \frac{l}{h} \le 8$, учитываются и поперечные силы:

$$\Delta_P = \sum\int \left(\frac{M_P \overline{M}}{EI} + \mu \frac{Q_P \overline{Q}}{GF} \right) dx.$$

3) если $\frac{l}{h} < 5$, формула Мора дает большую погрешность. В этом случае перемещения следует определять методами теории упругости.

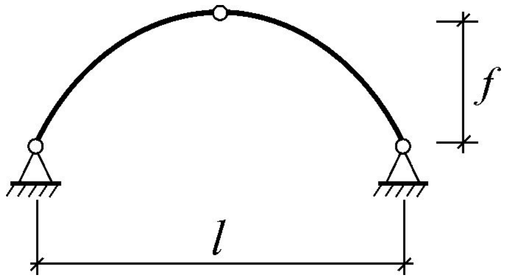
2) В рамах



Их элементы в основном работают только на изгиб. Поэтому в формуле Мора учитываются только моменты. В высоких рамах учитывается и продольная сила:

$$\Delta_P = \sum \int \left(\frac{M_P \overline{M}}{EI} + \frac{N_P \overline{N}}{EF} \right) dx.$$

3) В арках

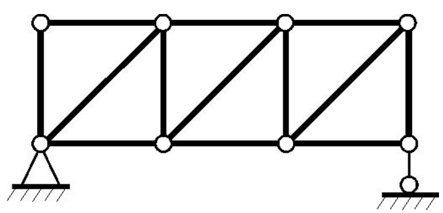


В них нужно учитывать соотношения между основными размерами арки l и f:

1) если $\frac{l}{f} \leq 5$ (крутая арка), учитываются только моменты;

2) если $\frac{l}{f} > 5$ (пологая арка), учитываются моменты и продольные силы.

4) В фермах



В них возникают только продольные силы. Поэтому

$$\Delta_P = \sum \int \frac{N_P \overline{N}}{EF} dx = \sum \frac{N_P \overline{N}}{EF} \int dx = \sum \frac{N_{Pk} \overline{N}_k}{EF_k} l_k.$$