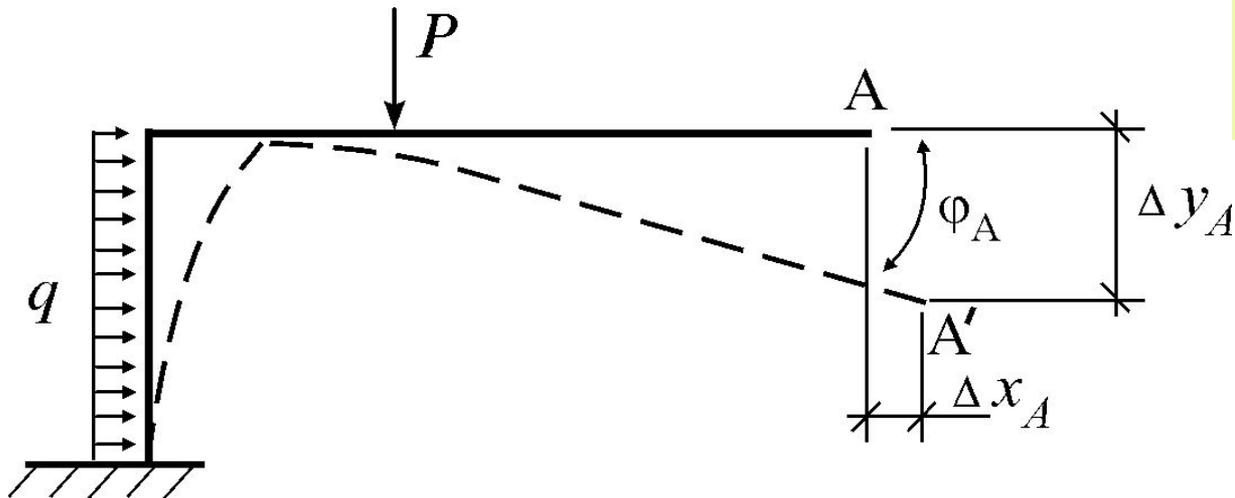


Лекция 6

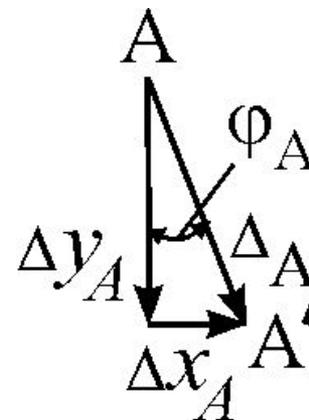
ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ

1. Понятие о перемещениях

При воздействии нагрузки, температуры и других факторов сооружения меняют свою форму, а его точки получают перемещения:



Перемещение – векторная величина:



Перемещение любой точки A на плоскости можно задать через его модуль Δ_A и направление φ_A , которые определяются по формулам:

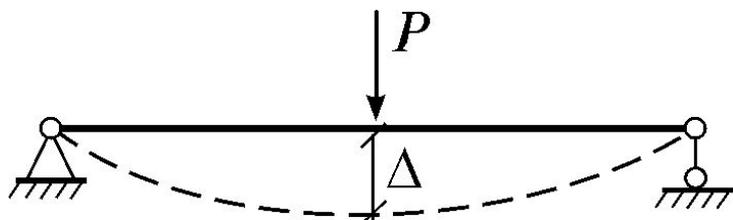
$$\Delta_A = \sqrt{(\Delta x_A)^2 + (\Delta y_A)^2}, \quad \varphi_A = \text{arc tg} \frac{\Delta x_A}{\Delta y_A},$$

где Δx_A и Δy_A – горизонтальная и вертикальная составляющие Δ_A .

Методы определения перемещений основаны на вычислении работ внешних и внутренних сил.

2. Действительные работы внешних и внутренних сил. Потенциальная энергия

Действительным перемещением называется перемещение, вызванное силой по направлению ее действия.



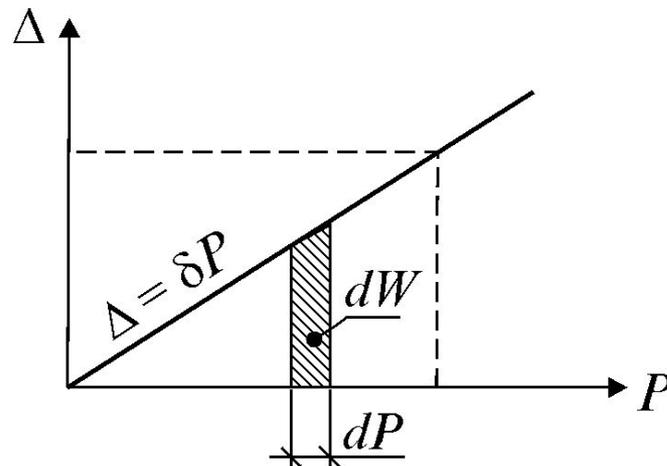
В упругих системах перемещение Δ прямо пропорционально действующей силе, и в них выполняется **закон Гука**

$$\Delta = \delta P.$$

где δ – **податливость**.

Эту зависимость представим в виде:

Диаграмма Δ - P



Сила на действительном перемещении выполняет некоторую работу. В механике ее называют **действительной работой**.

Действительная работа силы P определяется по диаграмме Δ - P :

$$W = \int_0^P dW = \frac{1}{2} P \Delta.$$

Теорема Клапейрона: Сила, действующая на упругую систему, совершает работу, равную половине произведения силы на перемещение.

Если воспользоваться законом Гука, то

$$W = \frac{1}{2} \delta P^2 \geq 0.$$

Значит, **внешняя сила совершает положительную работу**.

Когда действуют несколько сил, то по принципу суперпозиции

$$W = \frac{1}{2} \sum_k P_k \cdot k.$$

В идеально-упругой системе работа внешних сил W полностью переходит в потенциальную энергию деформации U :

$$W = U.$$

Если убрать внешние силы, упругая система возвратится в исходное положение. Эту работу совершают внутренние силы.

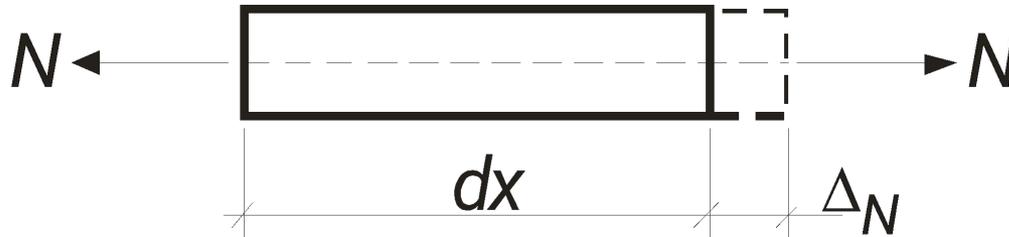
Так как работа внешних сил W положительна, то работа внутренних сил V будет отрицательной:

$$W = -V.$$

Определим работу внутренних сил M , Q , N плоской стержневой системы.

а) Работа продольной силы N

Пара продольных сил N , действующих на элемент dx , приводят к его чистому растяжению:



По теореме Клапейрона, эти силы на общей деформации элемента Δ_N совершают действительную работу

$$-dV_N = \frac{1}{2} N \cdot \Delta_N.$$

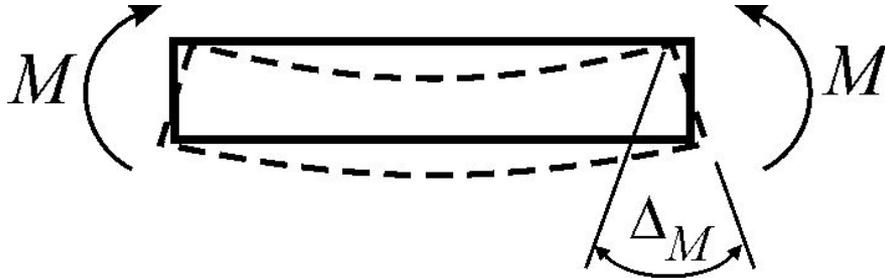
С учетом закона Гука при растяжении $\Delta_N = \frac{N dx}{EF}$ получим

$$-dV_N = \frac{N^2}{2EF} dx,$$

где E – модуль Юнга, F – площадь сечения, EF – жесткость на растяжение.

б) Работа изгибающего момента M

Пара изгибающих моментов M , действующих на элемент dx , приводят к его чистому изгибу :



На общей деформации Δ_M эти моменты совершают работу

$$-dV_M = \frac{1}{2} M \cdot \Delta_M.$$

По закону Гука

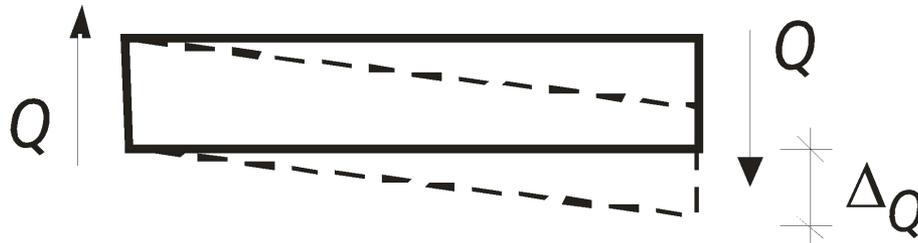
Значит,
$$\Delta_M = \frac{M dx}{EI}.$$

$$-dV_M = \frac{M^2}{2EI} dx,$$

где I – момент инерции сечения, EI – жесткость на изгиб.

в) Работа поперечной силы Q

Действие пары поперечных сил Q приводит к чистому сдвигу элемента dx :



На общей деформации Δ_Q они совершают работу

$$-dV_Q = \frac{1}{2} Q \cdot \Delta_Q.$$

По закону Гука

$$\Delta_Q = \mu \frac{Q dx}{GF},$$

где μ – коэффициент формы сечения, GF – жесткость на сдвиг.

Поэтому

$$-dV_Q = \mu \frac{Q^2}{2GF} dx.$$

Воспользуемся принципом суперпозиции:

$$-dV = -(dV_M + dV_Q + dV_N) = \frac{1}{2} \left(\frac{M^2}{EI} + \frac{Q^2}{GF} + \frac{N^2}{EF} \right)$$

Если проинтегрировать это выражение по всей длине элемента l и учесть наличие в системе n стержней, получим:

$$W = -V = \frac{1}{2} \sum dx \int \left(\frac{M^2}{EI} + \frac{Q^2}{GF} + \frac{N^2}{EF} \right)$$

- потенциальная энергия стержневой системы

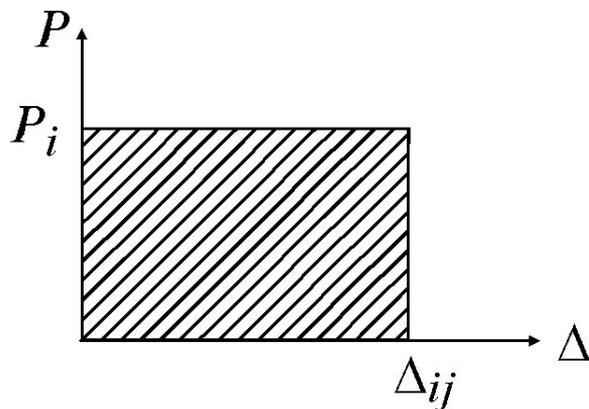
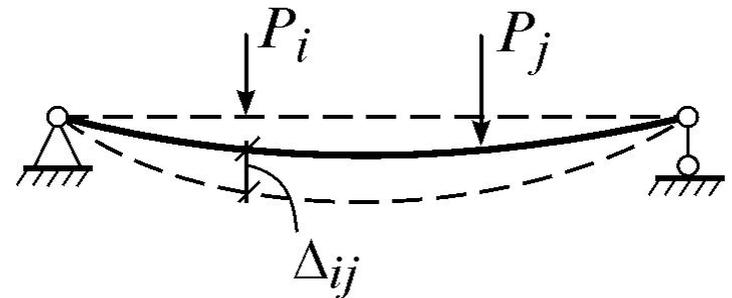
3. Возможные перемещения.

Возможная работа внешних и внутренних сил

Малое перемещение, допускаемое связями системы, называется **возможным перемещением**. Причиной возможного перемещения могут быть другие силы, изменение температуры, осадки опор и др.

Работа силы на ее возможном перемещении называется **возможной работой**. Возможное перемещение обозначим Δ_{ij} , а возможную работу W_{ij} (индекс i означает направление, j – причину).

Например, если в некоторой точке балки действует сила P_i , а затем в другой точке начнет действовать другая сила P_j , то балка в точке действия силы P_i получит возможное перемещение Δ_{ij} .



Так как в это время сила P_i остается постоянной, совершаемая ею возможная работа будет равна площади прямоугольника:

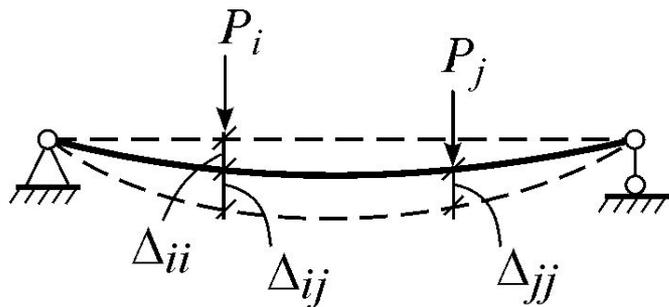
$$W_{ij} = P_i \Delta_{ij}.$$

Возможная работа равна произведению силы на возможное перемещение

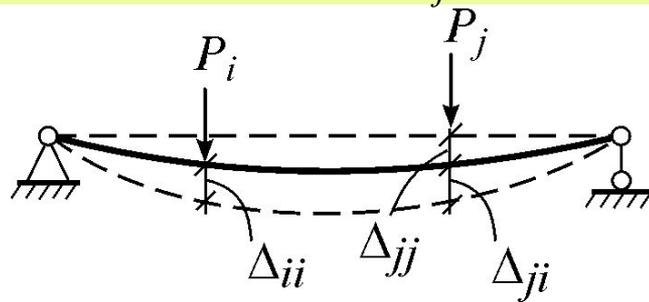
Теорема Бетти. Возможная работа сил первого состояния на перемещениях второго состояния равна возможной работе сил второго состояния на перемещениях первого.

Доказательство. Приложим силы P_i и P_j в разной последовательности:

1-е состояние: P_i , затем P_j



2-е состояние: P_j , затем P_i



В обоих состояниях силы на действительных перемещениях совершают действительные, а на возможных перемещениях – возможные работы:

$$W_{ij} = \frac{1}{2} P_i \Delta_{ii} + \frac{1}{2} P_j \Delta_{jj} + P_i \Delta_{ij},$$

$$W_{ji} = \frac{1}{2} P_j \Delta_{jj} + \frac{1}{2} P_i \Delta_{ii} + P_j \Delta_{ji}.$$

На основании принципа суперпозиции, результат не зависит от порядка приложения сил. Поэтому обе работы равны: $W_{ij} = W_{ji}$. Значит,

$$P_i \Delta_{ij} = P_j \Delta_{ji}.$$

Эту теорему часто называют **теоремой о взаимности работ**.

Определим возможную работу внутренних сил.

Для этого рассмотрим два состояния системы:

- 1) действие силы P_i – она вызывает внутренние усилия M_i, Q_i, N_i ;
- 2) действие силы P_j – пусть она вызывает возможные деформации

$$\Delta_{Mj} = \frac{M_j}{EI} dx, \quad \Delta_{Qj} = \mu \frac{Q_j}{GF} dx, \quad \Delta_{Nj} = \frac{N_j}{EF} dx.$$

Внутренние усилия первого состояния на деформациях второго состояния совершат возможную работу:

$$-dV_{ij} = M_i \cdot \Delta_{Mj} + Q_i \cdot \Delta_{Qj} + N_i \cdot \Delta_{Nj} = \frac{M_i M_j}{EI} dx + \mu \frac{Q_i Q_j}{GF} dx + \frac{N_i N_j}{EF} dx.$$

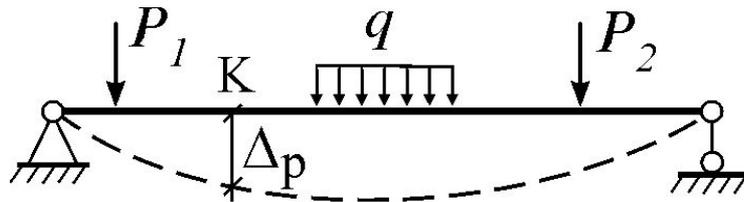
Если это выражение проинтегрировать по длине элемента l и учесть наличие в системе n стержней, получим формулу:

$$-W_{ij} = \sum \int \left(\frac{M_i M_j}{EI} dx + \frac{Q_i Q_j}{GF} + \frac{N_i N_j}{EF} \right)$$

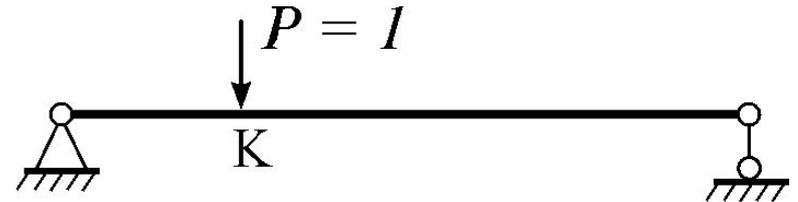
**– возможная работа
внутренних сил**

4. Интеграл Мора. Определение перемещений

Рассмотрим два состояния стержневой системы:



грузовое состояние (ГС)



единичное состояние (ЕС)

Внутренние силы грузового состояния M_P, Q_P, N_P на деформациях единичного состояния $\frac{\bar{M}}{EI} dx, \mu \frac{\bar{Q}}{GF} dx, \frac{\bar{N}}{EF} dx$ совершат возможную работу

$$-V_{PI} = \sum \int \left(\frac{M_P \bar{M}}{EI} + \mu \frac{Q_P \bar{Q}}{GF} + \frac{N_P \bar{N}}{EF} \right) dx.$$

А сила $P=1$ единичного состояния на перемещении грузового состояния Δ_P совершит возможную работу

$$W_{IP} = 1 \cdot \Delta_P = \Delta_P.$$

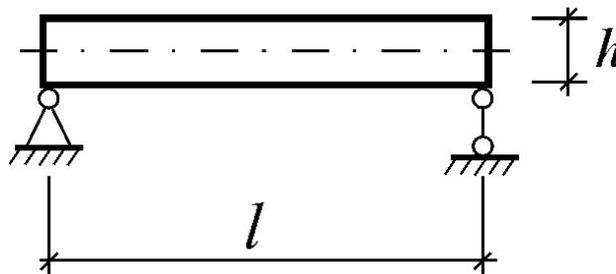
По принципу возможных перемещений, в упругих системах обе работы должны быть равны: $W_{IP} = -V_{PI}$. Отсюда получаем формулу:

$$\Delta_P = \sum \int \left(\frac{M_P \bar{M}}{EI} + \mu \frac{Q_P \bar{Q}}{GF} + \frac{N_P \bar{N}}{EF} \right) dx \quad \text{— формула Мора}$$

Она используется для определения перемещений стержневой системы.

5. Отдельные случаи применения формулы Мора

1) В балках



Возможны три случая:

1) если $\frac{l}{h} > 8$, учитываются лишь моменты:

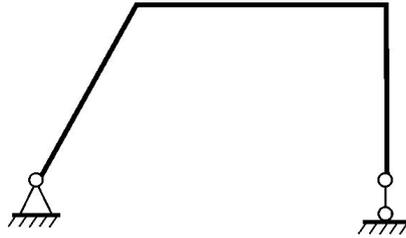
$$\Delta_P = \sum \int \frac{M_P \bar{M}}{EI} dx.$$

2) если $5 \leq \frac{l}{h} \leq 8$, учитываются и поперечные силы:

$$\Delta_P = \sum \int \left(\frac{M_P \bar{M}}{EI} + \mu \frac{Q_P \bar{Q}}{GF} \right) dx.$$

3) если $\frac{l}{h} < 5$, формула Мора дает большую погрешность. В этом случае $\frac{l}{h}$ перемещения следует определять методами теории упругости.

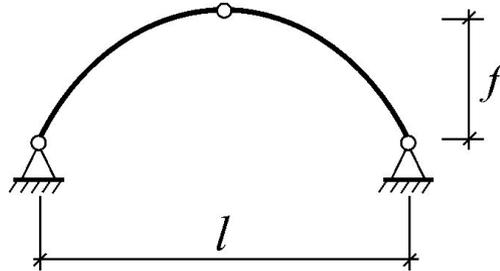
2) В рамах



Их элементы в основном работают только на изгиб. Поэтому в формуле Мора учитываются только моменты. В высоких рамах учитывается и продольная сила:

$$\Delta_P = \sum \int \left(\frac{M_P \bar{M}}{EI} + \frac{N_P \bar{N}}{EF} \right) dx.$$

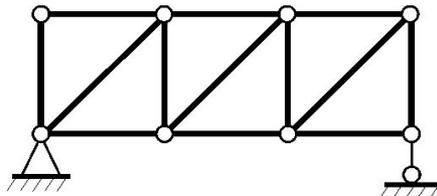
3) В арках



В них нужно учитывать соотношения между основными размерами арки l и f :

- 1) если $\frac{l}{f} \leq 5$ (крутая арка), учитываются только моменты;
- 2) если $\frac{l}{f} > 5$ (пологая арка), учитываются моменты и продольные силы.

4) В фермах



В них возникают только продольные силы. Поэтому

$$\Delta_P = \sum \int \frac{N_P \bar{N}}{EF} dx = \sum \frac{N_P \bar{N}}{EF} \int dx = \sum \frac{N_{Pk} \bar{N}_k}{EF_k} l_k.$$