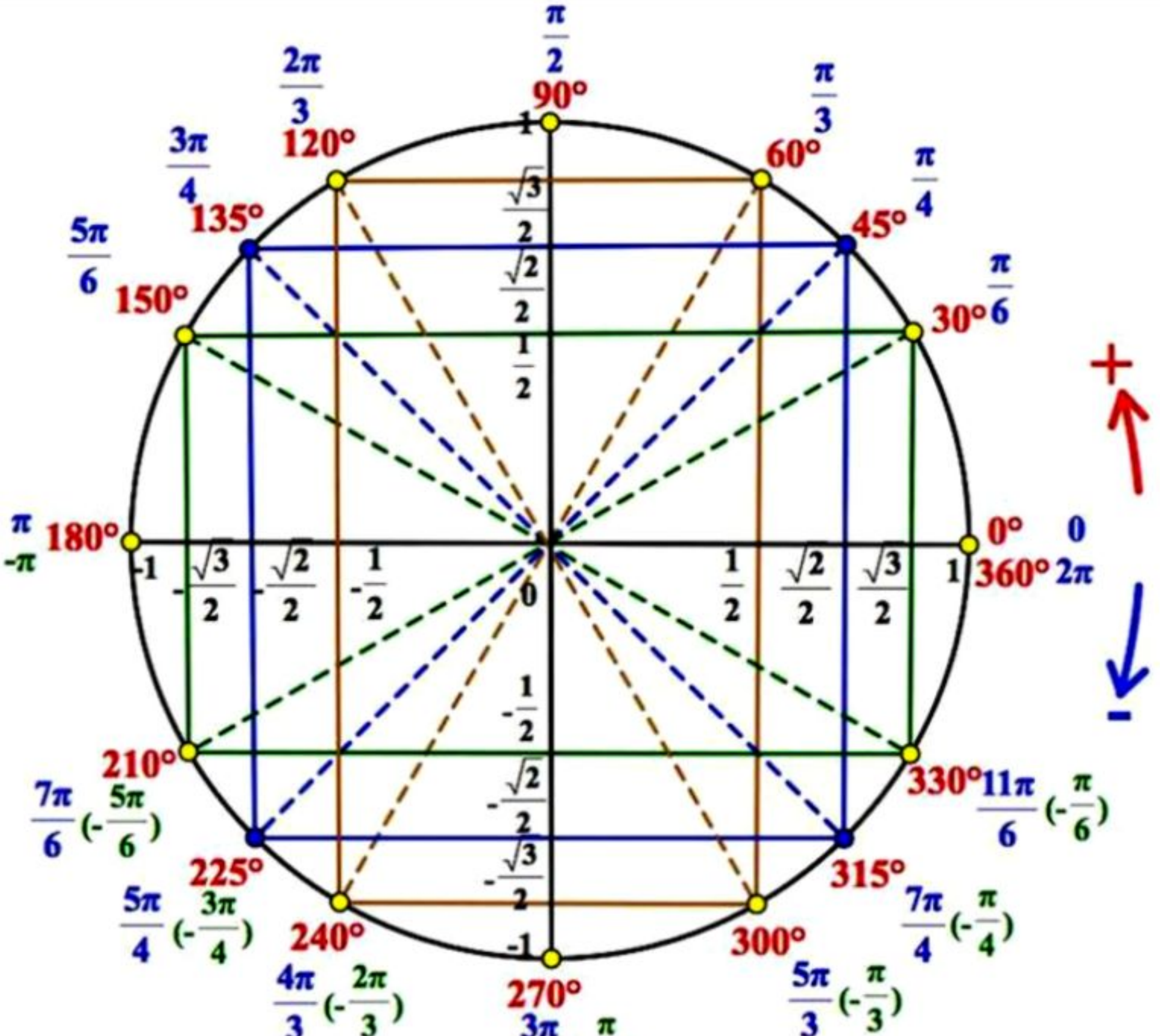
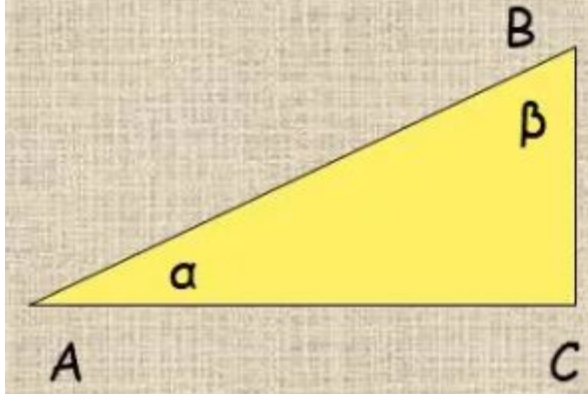


90°
60°
45°
30°
0°
360°
0
2π
120°
135°
150°
180°
π
-π
210°
225°
240°
270°
300°
315°
330°
+
-
π/2
π/3
π/4
π/6
2π/3
3π/4
5π/6
7π/6 (-5π/6)
5π/4 (-3π/4)
4π/3 (-2π/3)
5π/3 (-π/3)
7π/4 (-π/4)
11π/6 (-π/6)
1
-1
0
1/2
√2/2
√3/2
-1/2
-√2/2
-√3/2

Тригонометрическая таблица

градусы	0^0	30^0	45^0	60^0	90^0	120^0	135^0	150^0	180^0	270^0	360^0
радианы	0	$\frac{\text{П}}{6}$	$\frac{\text{П}}{4}$	$\frac{\text{П}}{3}$	$\frac{\text{П}}{2}$	$\frac{2\text{П}}{3}$	$\frac{3\text{П}}{4}$	$\frac{5\text{П}}{6}$	П	$\frac{3\text{П}}{2}$	2П
Sin x	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0
Cos x	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	0	1
tg x	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	–	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	–	0
ctg x	–	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	-1	$-\sqrt{3}$	–	0	–

Урок 42. Синус, косинус и тангенс острого угла прямоугольного треугольника.



$$\sin\alpha = \frac{BC}{AB}$$

$$\cos\alpha = \frac{AC}{AB}$$

$$tg\alpha = \frac{BC}{AC}$$

- Синусом острого угла прямоугольного треугольника называется отношение противолежащего катета к гипотенузе.
- Косинусом острого угла прямоугольного треугольника называется отношение прилежащего катета к гипотенузе.
- Тангенсом острого угла прямоугольного треугольника называется отношение противолежащего катета к прилежащему.
- Тангенс угла равен отношению синуса к косинусу этого угла.

$$\frac{\sin A}{\cos A} = \frac{\frac{BC}{AB}}{\frac{AC}{AB}} = \frac{BC}{AC} = tgA$$

Найти значение выражения **(15—18).**

15. $\boxed{4}$ $\cos\frac{\pi}{2} - \sin\frac{\pi}{2}$.

16. $\boxed{4}$ $\sin(-\pi) - \cos\frac{3}{2}\pi$.

17. $\boxed{4}$ $\cos\frac{\pi}{6} - \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)$.

18. $\boxed{4}$ $\cos(-2\pi) - \sin\frac{\pi}{4}$.

Вычислить **(19—21).**

19. $\boxed{3}$ $\operatorname{ctg}\frac{\pi}{2}$.

20. $\boxed{3}$ $\operatorname{tg} 2\pi$.

21. $\boxed{3}$ $\operatorname{ctg}\frac{\pi}{6}$.

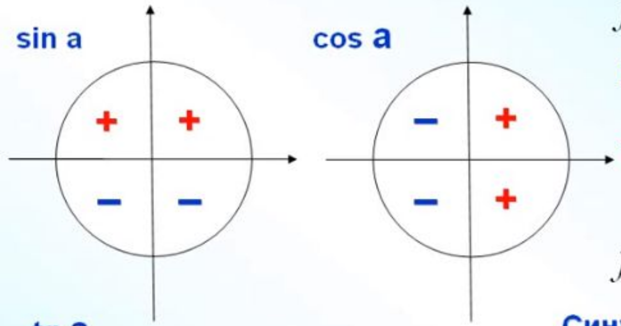
Найти синус, косинус и тангенс числа α **(22—24).**

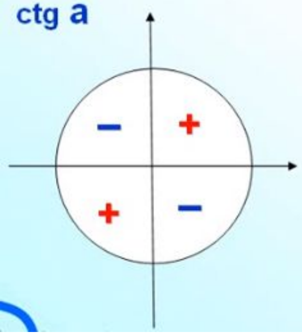
22. $\boxed{5}$ $\alpha = -7\pi$.

23. $\boxed{5}$ $\alpha = \frac{11\pi}{2}$.

24. $\boxed{5}$ $\alpha = -1260°$.

ЗНАКИ тригонометрических функций





$$f(-x) = f(x)$$

Косинус – четная функция

$$\cos(-\alpha) = \cos\alpha$$

$$f(-x) = -f(x)$$

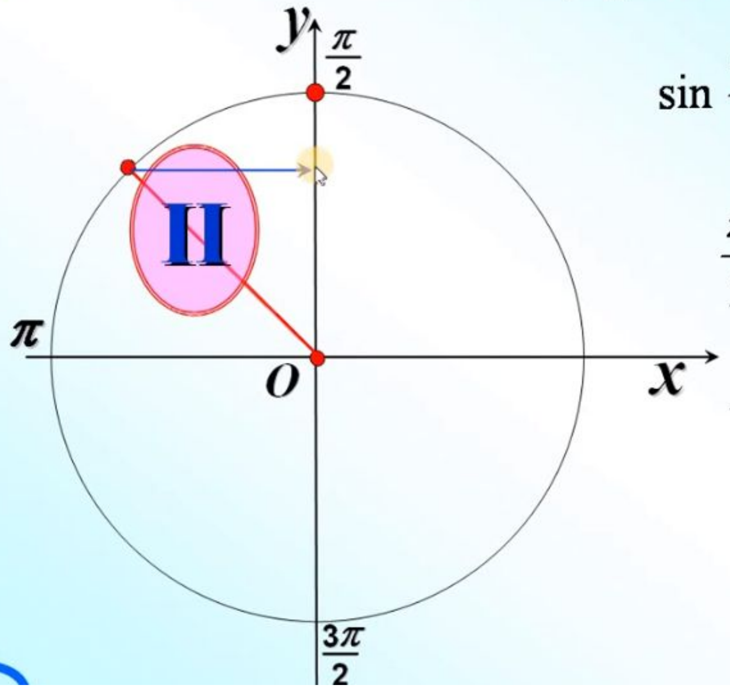
Синус, тангенс и котангенс – нечетные функции

$$\sin(-\alpha) = -\sin\alpha$$

$$tg(-\alpha) = -tg\alpha$$

$$ctg(-\alpha) = -ctg\alpha$$

Определите знак:



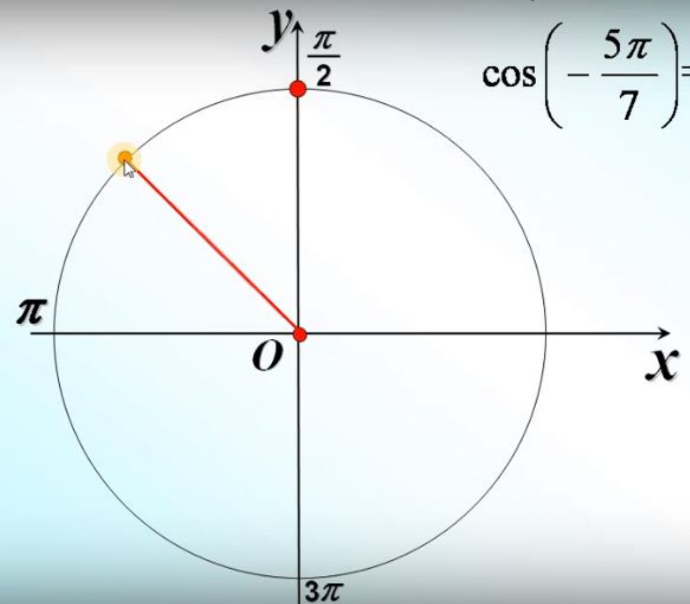
$$\sin\frac{4\pi}{7}$$

$$\frac{\pi}{2}^{\backslash 7} < \frac{4\pi}{7}^{\backslash 2} < \pi$$

$$\frac{7\pi}{14} < \frac{8\pi}{14}$$

косинуса тангенса

Определите знак:

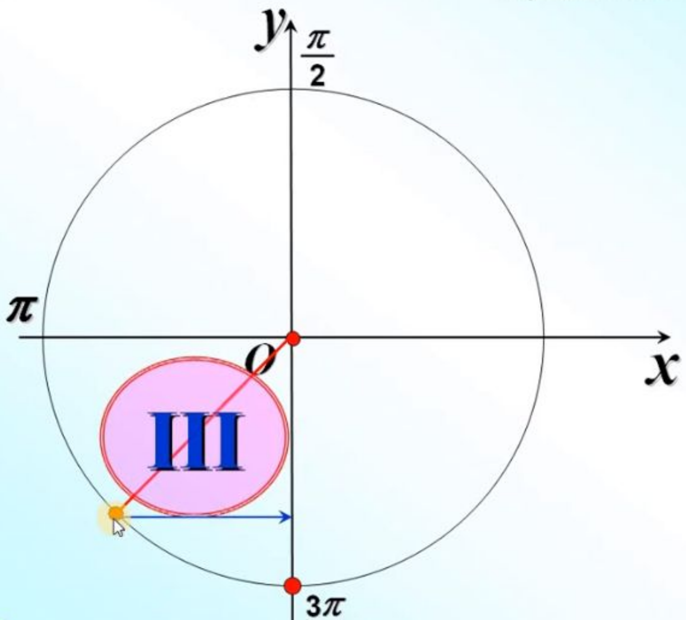


$$\cos\left(-\frac{5\pi}{7}\right) = \cos\frac{5\pi}{7}$$

$$\frac{\pi}{2}^{\backslash 7} < \frac{5\pi}{7}^{\backslash 2} < \pi$$

$$\frac{7\pi}{14} < \frac{10\pi}{14}$$

Определите знак:



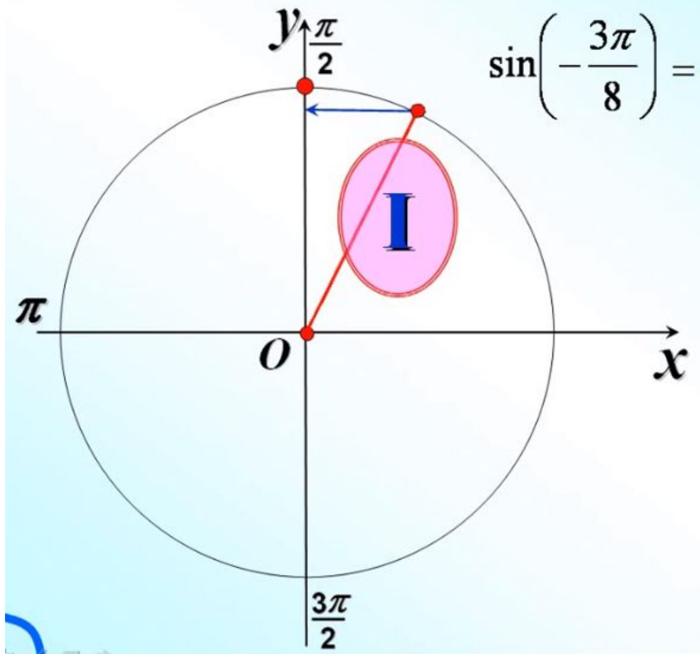
$$\sin\frac{9\pi}{8}$$

$$\pi < \frac{9\pi}{8}^{\backslash 2} < \frac{3\pi}{2}^{\backslash 8}$$

$$\frac{18\pi}{16} < \frac{24\pi}{16}$$

Определите знак:

$$\sin\left(-\frac{3\pi}{8}\right) = -\sin\frac{3\pi}{8}$$

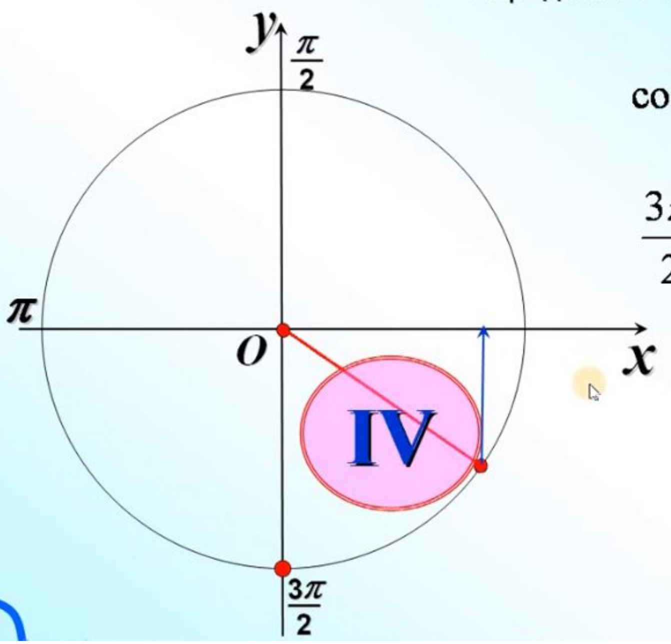


$$\frac{\pi}{2}^{\backslash 4} > \frac{3\pi}{8}^{\backslash 1}$$

$$\frac{4\pi}{8} > \frac{3\pi}{8}$$

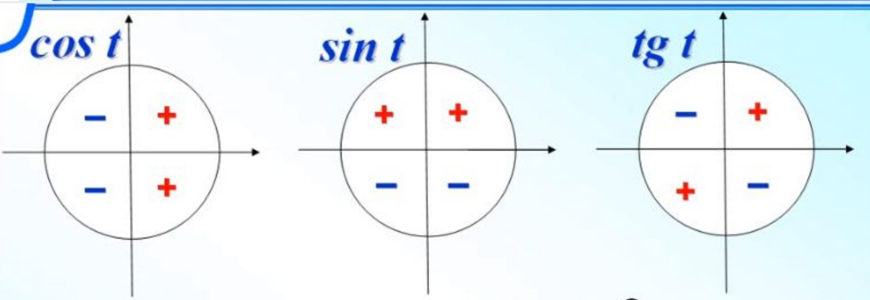
Определите знак:

$$\cos\frac{14\pi}{9} > ($$



$$\frac{3\pi}{2}^{\backslash 9} < \frac{14\pi}{9}^{\backslash 2} < 2\pi$$

$$\frac{27\pi}{18} < \frac{28\pi}{18}$$



Определите знак:

$\cos 3 < 0$ $\quad 3 \cdot 57 = 171^0$

$\sin 5 < 0$ $\quad 5 \cdot 57 = 285^0$

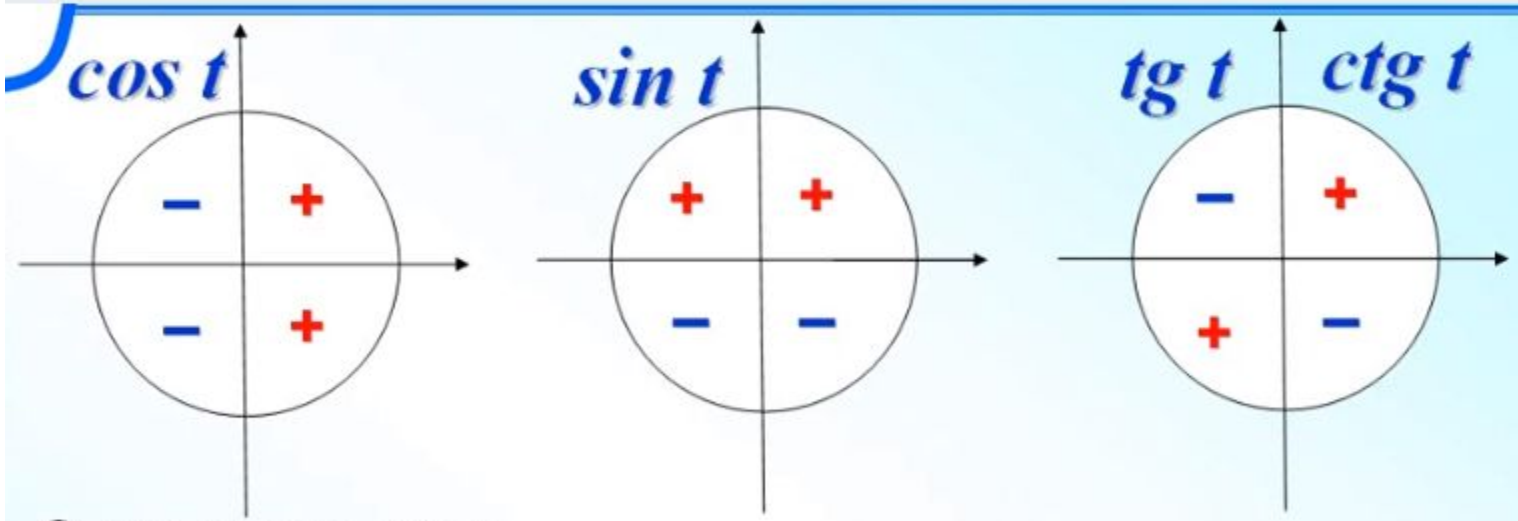
$8 \cdot 57 = 456^0$

$\cos 8 = \cos 456 = \cos(360 + 96) = \cos 96 < 0$

$\cos(-6) = \cos 6 = \cos 342^0 > 0$ $\quad 6 \cdot 57 = 342^0$

$tg(-15) = -tg15 = -tg855^0 = -tg(360 \cdot 2 + 135)$

$= -tg135 > 0$ $\quad -(-)$ $\quad 15 \cdot 57 = 855^0$



Определите знак:

$$\underset{+}{\sin \overset{I\text{ ч.}}{1}} \cdot \underset{-}{\cos \overset{II\text{ ч.}}{2}} < 0;$$

$$\cos 2 \cdot \sin(-3) = -\underset{-}{\cos \overset{II\text{ ч.}}{2}} \cdot \underset{+}{\sin \overset{II\text{ ч.}}{3}} > 0;$$

$$\underset{+}{tg \overset{I\text{ ч.}}{1}} - \underset{-}{\cos \overset{II\text{ ч.}}{2}} > 0;$$

$$\underset{+}{\sin \overset{II\text{ ч.}}{2}} - \underset{-}{ctg \overset{IV\text{ ч.}}{5{,}5}} > 0;$$

$$1 \cdot 57 = 57^0;$$

$$2 \cdot 57 = 114^0$$

$$3 \cdot 57 = 171^0$$

$$5{,}5 \cdot 57 = 313{,}5^0$$

Задания для самостоятельной работы

Вариант I

В какой четверти находится точка A (1—2)?

1. $\boxed{1}$ Обе координаты точки A положительны.

2. $\boxed{1}$ Абсцисса точки A — число положительное, ордината – отрицательное.

В какой четверти находится точка, полученная поворотом точки $P(1;\ 0)$ на угол α (4—8)?

4. $\boxed{2}$ $\alpha = \frac{2\pi}{7}$. 5. $\boxed{2}$ $\alpha = \frac{17\pi}{4}$. 6. $\boxed{2}$ $\alpha = -\frac{\pi}{9}$.

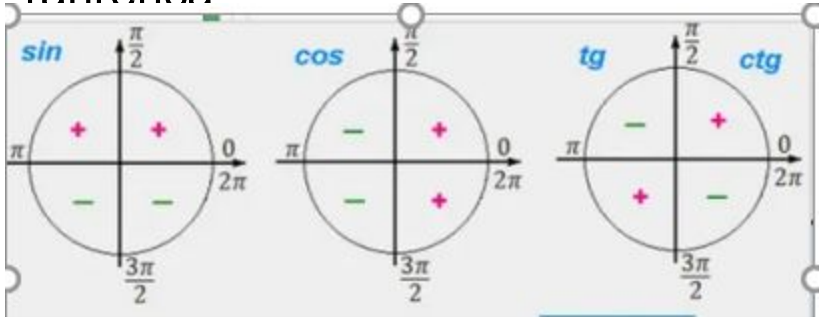
7. $\boxed{3}$ $\alpha = -3{,}4$. 8. $\boxed{3}$ $\alpha = 13{,}6$.

Точка A получена поворотом точки $P(1;\ 0)$ на угол $\alpha - \frac{\pi}{2}$. В какой четверти расположена точка A (9—10)?

9. $\boxed{4}$ $\alpha = \frac{7\pi}{8}$. 10. $\boxed{4}$ $\alpha = \frac{5\pi}{4}$.

11. $\alpha = 398^\circ$.

Знаки синуса косинуса и тангенса



§ 25. Зависимость между синусом, косинусом и тангенсом одного и того же угла

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \Rightarrow \sin\alpha = \pm\sqrt{1 - \cos^2\alpha}$$

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \Rightarrow \cos\alpha = \pm\sqrt{1 - \sin^2\alpha}$$

$$\boxed{\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}}$$

Примеры с решениями

Вычислить $\sin\alpha$ и $\cos\alpha$, если $\operatorname{tg}\alpha = -\frac{4}{3}$ и $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$.

Решение. С помощью формулы (3) находим

$$\cos^2\alpha = \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2\alpha} = \frac{1}{1 + \frac{16}{9}} = \frac{9}{25}.$$

Так как $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$, то $\cos\alpha < 0$, $\sin\alpha > 0$. Поэтому $\cos\alpha = -\sqrt{\frac{9}{25}} = -\frac{3}{5}$, а из равенства (1) следует, что $\sin\alpha = +\sqrt{1 - \cos^2\alpha} = \sqrt{1 - \frac{9}{25}} = \frac{4}{5}$.

Ответ. $\sin\alpha = \frac{4}{5}$, $\cos\alpha = -\frac{3}{5}$.

Упростить выражение $A = \frac{2\sin^2\alpha - 1}{\cos\alpha + \sin\alpha}$.

Решение. С помощью тождества (1) и формулы $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$ получаем

$$A = \frac{2\sin^2\alpha - (\sin^2\alpha + \cos^2\alpha)}{\cos\alpha + \sin\alpha} = \frac{\sin^2\alpha - \cos^2\alpha}{\sin\alpha + \cos\alpha} = \sin\alpha - \cos\alpha.$$

$$\operatorname{tg}\alpha \operatorname{ctg}\alpha = 1,$$

$$1 + \operatorname{tg}^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha},$$

$$1 + \operatorname{ctg}^2\alpha = \frac{1}{\sin^2\alpha}.$$

Упражнения

465 Доказать тождество:

1) $(1-\cos\alpha)(1+\cos\alpha)=\sin^2\alpha$;
2) $(1-\sin\alpha)(1+\sin\alpha)=\cos^2\alpha$;
3) $\frac{\sin^2\alpha}{1-\sin^2\alpha}=\mathrm{tg}^2\,\alpha$;
4) $\frac{\cos^2\alpha}{1-\cos^2\alpha}=\mathrm{ctg}^2\,\alpha$;
5) $\frac{1}{1+\mathrm{tg}^2\,\alpha}+\sin^2\alpha=1$;
6) $\frac{1}{1+\mathrm{ctg}^2\,\alpha}+\cos^2\alpha=1$.

466 Упростить выражение:

1) $\cos\alpha\cdot\mathrm{tg}\,\alpha-2\sin\alpha$;
2) $\cos\alpha-\sin\alpha\cdot\mathrm{ctg}\,\alpha$;
3) $\frac{\sin^2\alpha}{1+\cos\alpha}$;
4) $\frac{\cos^2\alpha}{1-\sin\alpha}$.

Вычислить (1—4).

1. $\boxed{3}$ $\sin\alpha$, если $\cos\alpha=\frac{3}{5}$, $\frac{3\pi}{2}<\alpha<2\pi$.

2. $\boxed{3}$ $\cos\alpha$ и $\mathrm{tg}\,\alpha$, если $\sin\alpha=-\frac{\sqrt{13}}{4}$, $\pi<\alpha<\frac{3\pi}{2}$.

3. $\boxed{5}$ $\sin\alpha$ и $\cos\alpha$, если $\mathrm{tg}\,\alpha=\sqrt{\frac{2}{7}}$, $6\pi<\alpha<\frac{13\pi}{2}$.

4. $\boxed{5}$ $\sin\alpha$ и $\cos\alpha$, если $\mathrm{ctg}\,\alpha=\frac{4}{3}$, $5\pi<\alpha<\frac{11\pi}{2}$.

1) $\frac{\sin^2\alpha-1}{1-\cos^2\alpha}$ при $\alpha=\frac{\pi}{4}$;
2) $\cos^2\alpha+\mathrm{ctg}^2\,\alpha+\sin^2\alpha$ при $\alpha=\frac{\pi}{6}$;
3) $\frac{1}{\cos^2\alpha}-1$ при $\alpha=\frac{\pi}{3}$;
4) $\cos^2\alpha+\mathrm{tg}^2\,\alpha\,\mathrm{ctg}^2\,\alpha+\sin^2\alpha$ при $\alpha=\frac{\pi}{3}$.

468 Доказать тождество:

1) $(1-\sin^2\alpha)(1+\mathrm{tg}^2\,\alpha)=1$;
2) $\sin^2\alpha\,(1+\mathrm{ctg}^2\,\alpha)-\cos^2\alpha=\sin^2\alpha$.

469 Упростить выражение:

1) $(1+\mathrm{tg}^2\,\alpha)\cos^2\alpha-1$;
2) $1-\sin^2\alpha\,(1+\mathrm{ctg}^2\,\alpha)$;
3) $1+\mathrm{tg}^2\,\alpha+\frac{1}{\sin^2\alpha}$;
4) $\frac{1+\mathrm{tg}^2\,\alpha}{1+\mathrm{ctg}^2\,\alpha}$.

470 Доказать тождество:

1) $(1-\cos 2\alpha)(1+\cos 2\alpha)=\sin^2 2\alpha$;
2) $\frac{\sin\alpha-1}{\cos^2\alpha}=-\frac{1}{1+\sin\alpha}$;
3) $\cos^4\alpha-\sin^4\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha$;
4) $(\sin^2\alpha-\cos^2\alpha)^2+2\cos^2\alpha\sin^2\alpha=\sin^4\alpha+\cos^4\alpha$;
5) $\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}+\frac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha}=\frac{2}{\sin\alpha}$;
6) $\frac{\sin\alpha}{1-\cos\alpha}=\frac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha}$;
7) $\frac{1}{1+\mathrm{tg}^2\,\alpha}+\frac{1}{1+\mathrm{ctg}^2\,\alpha}=1$;
8) $\mathrm{tg}^2\,\alpha-\sin^2\alpha=\mathrm{tg}^2\,\alpha\sin^2\alpha$.

471 Найти значение выражения $\sin\alpha\cos\alpha$, если $\sin\alpha-\cos\alpha=0{,}6$.

472 Найти значение выражения $\cos^3\alpha-\sin^3\alpha$, если $\cos\alpha-\sin\alpha=0{,}2$.

473 Известно, что $\mathrm{tg}\,\alpha+\mathrm{ctg}\,\alpha=3$. Найти $\mathrm{tg}^2\,\alpha+\mathrm{ctg}^2\,\alpha$.

Упражнения

475 Вычислить:

1) $\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)+\operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{4}\right)$; 2) $\dfrac{1+\operatorname{tg}^2\left(-\frac{\pi}{6}\right)}{1+\operatorname{ctg}^2\left(-\frac{\pi}{6}\right)}$;

3) $2\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)+\operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{3}\right)+\sin^2\left(-\frac{\pi}{4}\right)$;

4) $\cos(-\pi)+\operatorname{ctg}\left(-\frac{\pi}{2}\right)-\sin\left(-\frac{3}{2}\pi\right)+\operatorname{ctg}\left(-\frac{\pi}{4}\right)$;

5) $\dfrac{3-\sin^2\left(-\frac{\pi}{3}\right)-\cos^2\left(-\frac{\pi}{3}\right)}{2\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)}$;

6) $2\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)+3+7{,}5\operatorname{tg}(-\pi)+\frac{1}{8}\cos\frac{3}{2}\pi$.

476 Упростить выражение:

1) $\operatorname{tg}(-\alpha)\cos\alpha+\sin\alpha$; 2) $\cos\alpha-\operatorname{ctg}\alpha(-\sin\alpha)$;

3) $\dfrac{\cos(-\alpha)+\sin(-\alpha)}{\cos^2\alpha-\sin^2\alpha}$;

4) $\operatorname{tg}(-\alpha)\operatorname{ctg}(-\alpha)+\cos^2(-\alpha)+\sin^2\alpha$.

477 Вычислить:

1) $\dfrac{2-\sin^2\left(-\frac{\pi}{6}\right)+\cos^2\left(-\frac{\pi}{3}\right)}{2\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)+\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)}$;

2) $\sqrt{3}\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)-2\operatorname{ctg}\left(-\frac{\pi}{4}\right)+4\cos\left(-\frac{3}{2}\pi\right)$.

478 Упростить выражение:

1) $\dfrac{\sin^3(-\alpha)+\cos^3(-\alpha)}{1-\sin(-\alpha)\cos(-\alpha)}$; 2) $\dfrac{1-(\sin\alpha+\cos(-\alpha))^2}{-\sin(-\alpha)}$.

ФОРМУЛЫ СЛОЖЕНИЯ

$$[1]\ \sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$$

$$[2]\ \sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$$

$$[3]\ \cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$$

$$[4]\ \cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$$

$$[5]\ tg(\alpha+\beta)=\frac{tg\alpha+tg\beta}{1-tg\alpha\bullet tg\beta}$$

$$[6]\ tg(\alpha-\beta)=\frac{tg\alpha-tg\beta}{1+tg\alpha\bullet tg\beta}$$

$$[7]\ ctg(\alpha+\beta)=\frac{ctg\alpha\bullet ctg\beta-1}{ctg\beta+ctg\alpha}$$

$$[8]\ ctg(\alpha-\beta)=\frac{ctg\alpha\bullet ctg\beta+1}{ctg\beta-ctg\alpha}$$

Вычислить, представив аргумент в виде суммы или разности

6. $\boxed{3}$ $\cos 15°$. **7.** $\boxed{3}$ $\sin 135°$. **8.** $\boxed{3}$ $\operatorname{tg} 105°$.

$\boxed{1}$ $\sin 103°30' \cos 13°30' - \sin 13°30' \cos 103°30'$.

$\boxed{1}$ $\cos 53° \cos 8° + \sin 53° \sin 8°$.

$\boxed{2}$ $\sin \frac{\pi}{12} \cos \frac{\pi}{6} + \cos \frac{\pi}{12} \sin \frac{\pi}{6}$.

$\boxed{2}$ $\cos \frac{\pi}{9} \cos \frac{8\pi}{9} - \sin \frac{\pi}{9} \sin \frac{8\pi}{9}$.

5. $\boxed{2}$ $\dfrac{\operatorname{tg} \frac{4\pi}{9} - \operatorname{tg} \frac{\pi}{9}}{1 + \operatorname{tg} \frac{4\pi}{9} \operatorname{tg} \frac{\pi}{9}}$.

Упражнения

481 С помощью формул сложения вычислить:
1) $\cos 135°$; 2) $\cos 120°$; 3) $\cos 150°$; 4) $\cos 240°$.

482 Вычислить, не пользуясь таблицами:
1) $\cos 57°30' \cos 27°30' + \sin 57°30' \sin 27°30'$;
2) $\cos 19°30' \cos 25°30' - \sin 19°30' \sin 25°30'$;
3) $\cos \frac{7\pi}{9} \cos \frac{11\pi}{9} - \sin \frac{7\pi}{9} \sin \frac{11\pi}{9}$;
4) $\cos \frac{8\pi}{7} \cos \frac{\pi}{7} + \sin \frac{8\pi}{7} \sin \frac{\pi}{7}$.

483 Вычислить:
1) $\cos\left(\frac{\pi}{3}+\alpha\right)$, если $\sin\alpha = \frac{1}{\sqrt{3}}$ и $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$;
2) $\cos\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)$, если $\cos\alpha = -\frac{1}{3}$ и $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$.

484 Упростить выражение:
1) $\cos 3\alpha \cos\alpha - \sin\alpha \sin 3\alpha$;
2) $\cos 5\beta \cos 2\beta + \sin 5\beta \sin 2\beta$;

3) $\cos\left(\frac{\pi}{7}+\alpha\right)\cos\left(\frac{5\pi}{14}-\alpha\right) - \sin\left(\frac{\pi}{7}+\alpha\right)\sin\left(\frac{5\pi}{14}-\alpha\right)$;
4) $\cos\left(\frac{7\pi}{5}+\alpha\right)\cos\left(\frac{2\pi}{5}+\alpha\right) + \sin\left(\frac{7\pi}{5}+\alpha\right)\sin\left(\frac{2\pi}{5}+\alpha\right)$.

485 Найти значение выражения:
1) $\sin 73° \cos 17° + \cos 73° \sin 17°$;
2) $\sin 73° \cos 13° - \cos 73° \sin 13°$;
3) $\sin \frac{5\pi}{12} \cos \frac{\pi}{12} + \sin \frac{\pi}{12} \cos \frac{5\pi}{12}$;
4) $\sin \frac{7\pi}{12} \cos \frac{\pi}{12} - \sin \frac{\pi}{12} \cos \frac{7\pi}{12}$.

486 Вычислить:
1) $\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{6}\right)$, если $\cos\alpha = -\frac{3}{5}$ и $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$;
2) $\sin\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)$, если $\sin\alpha = \frac{\sqrt{2}}{3}$ и $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$.

487 Упростить выражение:
1) $\sin(\alpha+\beta) + \sin(-\alpha)\cos(-\beta)$;
2) $\cos(-\alpha)\sin(-\beta) - \sin(\alpha-\beta)$;
3) $\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\sin\left(\frac{\pi}{2}-\beta\right) - \sin(\alpha-\beta)$;
4) $\sin(\alpha+\beta) + \sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\sin(-\beta)$.

488 Вычислить $\cos(\alpha+\beta)$ и $\cos(\alpha-\beta)$, если $\sin\alpha = -\frac{3}{5}$, $\frac{3}{2}\pi < \alpha < 2\pi$, и $\sin\beta = \frac{8}{17}$, $0 < \beta < \frac{\pi}{2}$.

491 Упростить выражение:

1) $\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)$;

2) $\cos\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)+\frac{1}{2}\sin^2\alpha$;

3) $\cos 3\alpha+\sin\alpha\sin 2\alpha$;

4) $\cos 2\alpha-\cos\alpha\cos 3\alpha$.

493 Вычислить:

1) $\frac{\operatorname{tg}29^\circ+\operatorname{tg}31^\circ}{1-\operatorname{tg}29^\circ\operatorname{tg}31^\circ}$;

2) $\frac{\operatorname{tg}\frac{7\pi}{16}-\operatorname{tg}\frac{3\pi}{16}}{1+\operatorname{tg}\frac{7\pi}{16}\operatorname{tg}\frac{3\pi}{16}}$;

3) $\frac{1+\operatorname{tg}10^\circ\operatorname{tg}55^\circ}{\operatorname{tg}55^\circ-\operatorname{tg}10^\circ}$;

4) $\frac{1-\operatorname{tg}13^\circ\operatorname{tg}17^\circ}{\operatorname{tg}17^\circ+\operatorname{tg}13^\circ}$.

494 Вычислить:

1) $\operatorname{tg}(\alpha+\beta)$, если $\operatorname{tg}\alpha=-\frac{3}{4}$ и $\operatorname{tg}\beta=2{,}4$;

2) $\operatorname{ctg}(\alpha-\beta)$, если $\operatorname{ctg}\alpha=\frac{4}{3}$ и $\operatorname{ctg}\beta=-1$.

§ 29 Синус, косинус и тангенс двойного угла

Выведем формулы синуса и косинуса двойного угла, используя формулы сложения.

1. $\sin 2\alpha = \sin(\alpha + \alpha) = \sin\alpha\cos\alpha + \sin\alpha\cos\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$. Итак,

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha. \qquad (1)$$

Задача 1 Вычислить $\sin 2\alpha$, если $\sin\alpha = -0{,}6$ и $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$.

▶ По формуле (1) находим
$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha = 2\cdot(-0{,}6)\cdot\cos\alpha = -1{,}2\cos\alpha$.
Так как $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$, то $\cos\alpha < 0$, и поэтому

$$\cos\alpha = -\sqrt{1-\sin^2\alpha} = -\sqrt{1-0{,}36} = -0{,}8.$$

Следовательно, $\sin 2\alpha = -1{,}2\cdot(-0{,}8) = 0{,}96$. ◁

2. $\cos 2\alpha = \cos(\alpha+\alpha) = \cos\alpha\cos\alpha - \sin\alpha\sin\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$. Итак,

$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha. \qquad (2)$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha. \qquad (2)$$

Задача 2 Вычислить $\cos 2\alpha$, если $\cos\alpha = 0{,}3$.

▶ Используя формулу (2) и основное тригонометрическое тождество, получаем
$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = \cos^2\alpha - (1-\cos^2\alpha) = 2\cos^2\alpha - 1 = 2\cdot(0{,}3)^2 - 1 = -0{,}82$. ◁

Задача 3 Упростить выражение $\frac{\sin\alpha\cos\alpha}{1-2\sin^2\alpha}$.

▶ $\frac{\sin\alpha\cos\alpha}{1-2\sin^2\alpha} = \frac{2\sin\alpha\cos\alpha}{2(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha-2\sin^2\alpha)} = \frac{\sin 2\alpha}{2(\cos^2\alpha-\sin^2\alpha)} = \frac{\sin 2\alpha}{2\cos 2\alpha} = \frac{1}{2}\operatorname{tg} 2\alpha$. ◁

Задача 4 Вычислить $\operatorname{tg} 2\alpha$, если $\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{2}$.

▶ Полагая в формуле $\operatorname{tg}(\alpha+\beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}$ (см. § 28) $\beta = \alpha$, получаем

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}. \qquad (3)$$

Если $\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{2}$, то по формуле (3) находим

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2\cdot\frac{1}{2}}{1-\left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{4}{3}. \quad ◁$$

Упражнения

Выразить синус, косинус или тангенс, используя формулы двойного угла (498—499).

498 1) $\sin 48°$; 2) $\cos 164°$; 3) $\operatorname{tg} 92°$; 4) $\sin \frac{4\pi}{3}$; 5) $\cos \frac{5\pi}{3}$.

499 1) $\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)$; 2) $\sin\left(\frac{\pi}{4}+\beta\right)$; 3) $\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)$;

4) $\cos\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)$; 5) $\sin \alpha$; 6) $\cos \alpha$.

Вычислить, не используя калькулятор (500—502).

500 1) $2 \sin 15° \cdot \cos 15°$; 2) $\cos^2 15° - \sin^2 15°$;

3) $\frac{2 \operatorname{tg} 15°}{1-\operatorname{tg}^2 15°}$; 4) $(\cos 75° - \sin 75°)^2$.

501 1) $2 \sin \frac{\pi}{8} \cdot \cos \frac{\pi}{8}$; 2) $\cos^2 \frac{\pi}{8} - \sin^2 \frac{\pi}{8}$;

3) $\frac{2 \operatorname{tg} \frac{\pi}{8}}{1-\operatorname{tg}^2 \frac{\pi}{8}}$; 4) $\frac{\sqrt{2}}{2} - \left(\cos \frac{\pi}{8} + \sin \frac{\pi}{8}\right)^2$.

502 1) $2 \sin 75° \cdot \cos 75°$; 2) $\cos^2 75° - \sin^2 75°$;

3) $\frac{6 \operatorname{tg} 75°}{1-\operatorname{tg}^2 75°}$; 4) $\frac{\operatorname{tg}^2 22°30' - 1}{\operatorname{tg} 22°30'}$.

503 Вычислить $\sin 2\alpha$, если:

1) $\sin \alpha = \frac{3}{5}$ и $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$; 2) $\cos \alpha = -\frac{4}{5}$ и $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$.

504 Вычислить $\cos 2\alpha$, если:

1) $\cos \alpha = \frac{4}{5}$; 2) $\sin \alpha = -\frac{3}{5}$.

505 Вычислить $\operatorname{tg} 2\alpha$, если $\operatorname{tg} \alpha = 0{,}5$.

Упростить выражение (506—507).

506 1) $2 \cos 40° \cdot \cos 50°$; 2) $2 \sin 25° \cdot \sin 65°$;
3) $\sin 2\alpha + (\sin \alpha - \cos \alpha)^2$; 4) $\cos 4\alpha + \sin^2 2\alpha$.

507 1) $\frac{\sin 2\alpha}{(\sin\alpha + \cos\alpha)^2 - 1}$; 2) $\frac{1+\cos 2\alpha}{1-\cos 2\alpha}$.

508 Доказать тождество:

1) $\sin 2\alpha = (\sin \alpha + \cos \alpha)^2 - 1$;
2) $(\sin \alpha - \cos \alpha)^2 = 1 - \sin 2\alpha$;
3) $\cos^4 \alpha - \sin^4 \alpha = \cos 2\alpha$; 4) $2 \cos^2 \alpha - \cos 2\alpha = 1$.

509 Вычислить $\sin 2\alpha$, если:

1) $\sin \alpha + \cos \alpha = \frac{1}{2}$; 2) $\sin \alpha - \cos \alpha = -\frac{1}{3}$.

510 Доказать тождество:

1) $\frac{\cos 2\alpha}{\sin\alpha \cos\alpha + \sin^2\alpha} = \operatorname{ctg}\alpha - 1$; 2) $\frac{\sin 2\alpha - 2\cos\alpha}{\sin\alpha - \sin^2\alpha} = -2\operatorname{ctg}\alpha$;

3) $\operatorname{tg}\alpha\,(1+\cos 2\alpha) = \sin 2\alpha$; 4) $\frac{1-\cos 2\alpha + \sin 2\alpha}{1+\cos 2\alpha + \sin 2\alpha}\cdot\operatorname{ctg}\alpha = 1$;

5) $\frac{(1-2\cos^2\alpha)(2\sin^2\alpha - 1)}{4\sin^2\alpha\cos^2\alpha} = \operatorname{ctg}^2 2\alpha$;

6) $1-2\sin^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right) = \sin\alpha$; 7) $\frac{\sin\alpha + \sin 2\alpha}{1+\cos\alpha + \cos 2\alpha} = \operatorname{tg}\alpha$.

511 Доказать тождество

$$\frac{\sin^2\alpha}{\cos\alpha\,(1+\operatorname{ctg}\alpha)} - \frac{\cos^2\alpha}{\sin\alpha\,(1+\operatorname{tg}\alpha)} = \frac{2\sqrt{2}\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)}{\sin 2\alpha}.$$

Задания для самостоятельной работы

Вариант I

Доказать тождество (1—7).

1. $\boxed{2}$ $\sin^2\alpha - \cos^2\alpha = 1 - 2\cos^2\alpha$.
2. $\boxed{2}$ $\cos^4\alpha + \sin^2\alpha\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$.
3. $\boxed{3}$ $\dfrac{\sin^4\alpha - \cos^4\alpha}{\sin\alpha - \cos\alpha} = \sin\alpha + \cos\alpha$.
4. $\boxed{3}$ $\dfrac{\sin\alpha + \operatorname{tg}\alpha}{1 + \cos\alpha} = \operatorname{tg}\alpha$.

5. Упростите выражения:

а) $\sin\alpha \cdot \cos\alpha \cdot \operatorname{ctg}\alpha$;

б) $\operatorname{tg} x \cdot \operatorname{ctg} x - \cos^2 x$;

6 Вычислите:

Найдите значение $tg\alpha$, если $\sin\alpha = -\dfrac{3}{5}$, $\dfrac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$;

7 $2\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) + 3 + 7{,}5\operatorname{tg}(-\pi) + \frac{1}{8}\cos\frac{3}{2}\pi$.

Задания для самостоятельной работы

Вариант I

Доказать тождество (1—7).

1. $\boxed{2}$ $\sin^2\alpha - \cos^2\alpha = 1 - 2\cos^2\alpha$.
2. $\boxed{2}$ $\cos^4\alpha + \sin^2\alpha\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$.
3. $\boxed{3}$ $\dfrac{\sin^4\alpha - \cos^4\alpha}{\sin\alpha - \cos\alpha} = \sin\alpha + \cos\alpha$.
4. $\boxed{3}$ $\dfrac{\sin\alpha + \operatorname{tg}\alpha}{1 + \cos\alpha} = \operatorname{tg}\alpha$.
5. $\boxed{3}$ $\dfrac{\sin^2\alpha - \cos^2\alpha}{\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{ctg}\alpha} = \sin\alpha\cos\alpha$.
6. $\boxed{5}$ $\dfrac{\sin^4\alpha + \sin^2\alpha\cos^2\alpha}{\cos^2\alpha} = \dfrac{1}{\cos^2\alpha} - 1$.
7. $\boxed{6}$ $\sqrt{\dfrac{1+\cos\alpha}{1-\cos\alpha}} - \sqrt{\dfrac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}} = 2\operatorname{tg}\alpha$ для $0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2}$.

Найти значение выражения (8—10).

8. $\boxed{6}$ $\sin\alpha + \cos\alpha$, если $\sin\alpha\cos\alpha = 0{,}2$.

Доказать тождество (19—20).

20. $\boxed{7}$ $\dfrac{\sqrt{2}\cos\alpha - 2\cos\left(\dfrac{\pi}{4} - \alpha\right)}{2\sin\left(\dfrac{\pi}{6} + \alpha\right) - \sqrt{3}\sin\alpha} = -\sqrt{2}\operatorname{tg}\alpha$.

Упростить выражение (13—17).

13. $\boxed{3}$ $\dfrac{\sin(\alpha - \beta)}{\cos\alpha\cos\beta} + \operatorname{tg}\beta$.

510 Доказать тождество:

1) $\frac{\cos 2\alpha}{\sin\alpha \cos\alpha + \sin^2\alpha} = \operatorname{ctg}\alpha - 1$; 2) $\frac{\sin 2\alpha - 2\cos\alpha}{\sin\alpha - \sin^2\alpha} = -2\operatorname{ctg}\alpha$;

3) $\operatorname{tg}\alpha\,(1 + \cos 2\alpha) = \sin 2\alpha$; 4) $\frac{1 - \cos 2\alpha + \sin 2\alpha}{1 + \cos 2\alpha + \sin 2\alpha} \cdot \operatorname{ctg}\alpha = 1$;

5) $\frac{(1 - 2\cos^2\alpha)(2\sin^2\alpha - 1)}{4\sin^2\alpha\cos^2\alpha} = \operatorname{ctg}^2 2\alpha$;

6) $1 - 2\sin^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}\right) = \sin\alpha$; 7) $\frac{\sin\alpha + \sin 2\alpha}{1 + \cos\alpha + \cos 2\alpha} = \operatorname{tg}\alpha$.

511 Доказать тождество

$$\frac{\sin^2\alpha}{\cos\alpha\,(1 + \operatorname{ctg}\alpha)} - \frac{\cos^2\alpha}{\sin\alpha\,(1 + \operatorname{tg}\alpha)} = \frac{2\sqrt{2}\sin\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right)}{\sin 2\alpha}.$$

§ 30. Синус, косинус и тангенс половинного угла

Справочные сведения

$$\cos^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1+\cos\alpha}{2}, \qquad (1) \qquad \sin^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1-\cos\alpha}{2}, \qquad (2)$$

$$\mathrm{tg}^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}, \qquad (3) \qquad \sin\alpha=\frac{2\,\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}}{1+\mathrm{tg}^2\frac{\alpha}{2}}, \qquad (4)$$

$$\cos\alpha=\frac{1-\mathrm{tg}^2\frac{\alpha}{2}}{1+\mathrm{tg}^2\frac{\alpha}{2}}, \qquad (5) \qquad \mathrm{tg}\,\alpha=\frac{2\,\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}}{1-\mathrm{tg}^2\frac{\alpha}{2}}. \qquad (6)$$

Замечание. Формулы (3) — (6) справедливы для тех значений аргументов, при которых их левые и правые части имеют смысл.

$$1+\cos\alpha=2\cos^2\frac{\alpha}{2},$$

$$1-\cos\alpha=2\sin^2\frac{\alpha}{2}.$$

Вычислить $\mathrm{tg}\,\frac{\alpha}{2}$, если $\cos\alpha=0{,}8$ и $\pi<\alpha<2\pi$.

▶ По формуле (7) имеем

$$\mathrm{tg}^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}=\frac{1-0{,}8}{1+0{,}8}=\frac{0{,}2}{1{,}8}=\frac{1}{9}.$$

По условию $\pi<\alpha<2\pi$, поэтому $\frac{\pi}{2}<\frac{\alpha}{2}<\pi$ и $\mathrm{tg}\,\frac{\alpha}{2}<0$.

Следовательно, $\mathrm{tg}\,\frac{\alpha}{2}=-\sqrt{\frac{1}{9}}=-\frac{1}{3}$. ◁

Примеры с решениями

Вычислить $\mathrm{tg}\,15°$ без помощи таблиц и микрокалькулятора.

Решение. Так как $\mathrm{tg}\,15°=\mathrm{tg}\left(\frac{30°}{2}\right)$, то при вычислении применим формулу (3):

$$\mathrm{tg}^2 15°=\frac{1-\cos 30°}{1+\cos 30°}=\frac{1-\frac{\sqrt{3}}{2}}{1+\frac{\sqrt{3}}{2}}=\frac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}=\frac{(2-\sqrt{3})(2-\sqrt{3})}{(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})}=(2-\sqrt{3})^2.$$

$$\mathrm{tg}\,15°=2-\sqrt{3}.$$

Ответ. $2-\sqrt{3}$.

Выполнить понижение степени (1—8).

1. $\boxed{1}$ $\sin^2 30°$.
2. $\boxed{1}$ $\cos^2 27°$.
3. $\boxed{1}$ $\mathrm{tg}^2 75°$.
4. $\boxed{1}$ $\sin^2\beta$.
5. $\boxed{1}$ $\cos^2\frac{x}{4}$.
6. $\boxed{3}$ $\mathrm{tg}^2\frac{\alpha}{4}$.
7. $\boxed{3}$ $\cos^2 3\alpha$.
8. $\boxed{3}$ $\sin^2\frac{\pi}{14}$.

Вычислить (9—10).

9. $\boxed{6}$ $\cos\frac{\pi}{12}$.
10. $\boxed{6}$ $\mathrm{tg}\,\frac{\pi}{8}$.

Упражнения

513 Выразить квадрат синуса (косинуса) заданного угла через косинус угла, в два раза большего:

1) $\sin^2 15°$; 2) $\cos^2 \frac{1}{4}$; 3) $\cos^2\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)$; 4) $\sin^2\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)$.

514 Найти числовое значение выражения:

1) $2\cos^2\frac{\pi}{8}-1$; 2) $1-2\sin^2\frac{\pi}{12}$;

3) $\frac{\sqrt{3}}{2}+2\sin^2 15°$; 4) $-\frac{\sqrt{3}}{2}+2\cos^2 15°$.

515 Пусть $\cos\alpha = 0{,}6$ и $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$. Вычислить:

1) $\sin\frac{\alpha}{2}$; 2) $\cos\frac{\alpha}{2}$; 3) $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$; 4) $\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}$.

516 Пусть $\sin\alpha = \frac{3}{5}$ и $\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$. Вычислить:

1) $\sin\frac{\alpha}{2}$; 2) $\cos\frac{\alpha}{2}$; 3) $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$; 4) $\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}$.

517 Вычислить:

1) $\sin 15°$; 2) $\cos 15°$; 3) $\operatorname{tg} 22°30'$; 4) $\operatorname{ctg} 22°30'$.

518 Упростить выражение:

1) $\frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}$; 2) $\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}$; 3) $\frac{1-\cos 2\alpha+\sin 2\alpha}{1+\cos 2\alpha+\sin 2\alpha}$;

4) $\frac{1+\cos 4\alpha}{\sin 4\alpha}$; 5) $\frac{1+\cos 2\alpha+\sin 2\alpha}{\sin\alpha+\cos\alpha}$;

6) $(1-\cos 2\alpha)\operatorname{ctg}\alpha$.

Доказать тождество (519—520).

519 1) $2\cos^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)=1+\sin\alpha$; 2) $2\sin^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)=1-\sin\alpha$;

3) $\frac{3-4\cos 2\alpha+\cos 4\alpha}{3+4\cos 2\alpha+\cos 4\alpha}=\operatorname{tg}^4\alpha$; 4) $\frac{1+\sin 2\alpha+\cos 2\alpha}{1+\sin 2\alpha-\cos 2\alpha}=\operatorname{ctg}\alpha$.

520 1) $\frac{1-\cos 2\alpha}{\sin 2\alpha}\cdot\operatorname{ctg}\alpha=1$; 2) $\frac{\sin 2\alpha}{1+\cos 2\alpha}=\operatorname{tg}\alpha$;

3) $\frac{1-2\sin^2\alpha}{1+\sin 2\alpha}=\frac{1-\operatorname{tg}\alpha}{1+\operatorname{tg}\alpha}$; 4) $\frac{1+\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha}=\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)$.

§ 31 Формулы приведения

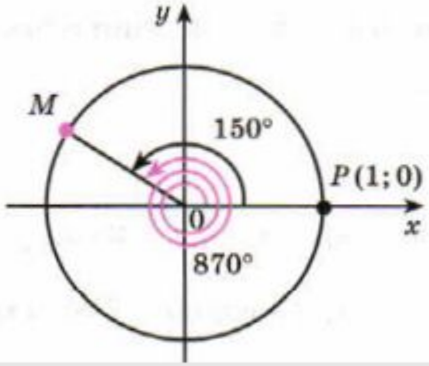
Таблицы значений синуса, косинуса, тангенса и котангенса составляются для углов от 0° до 90° (или от 0 до $\frac{\pi}{2}$). Это объясняется тем, что их значения для остальных углов сводятся к значениям для острых углов.

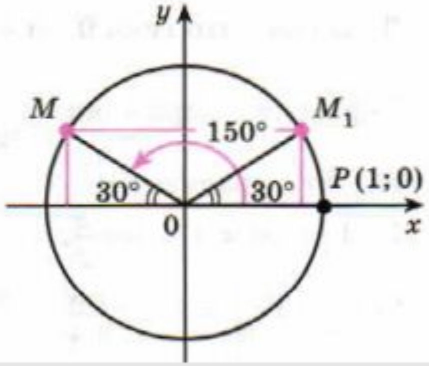
Задача Вычислить $\sin 870°$ и $\cos 870°$.

▶ Заметим, что $870° = 2 \cdot 360° + 150°$. Следовательно, при повороте точки $P\,(1;\,0)$ вокруг начала координат на 870° точка совершит два полных оборота и ещё повернётся на угол 150°, т. е. получится та же самая точка M, что и при повороте на 150° (рис. 66). Поэтому $\sin 870° = \sin 150°$, $\cos 870° = \cos 150°$.

Построим точку M_1, симметричную точке M относительно оси OY (рис. 67). Ординаты точек M и M_1 одинаковы, а абсциссы различаются только знаком. Поэтому $\sin 150° = \sin 30° = \frac{1}{2}$, $\cos 150° = -\cos 30° = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Ответ $\sin 870° = \frac{1}{2}$, $\cos 870° = -\frac{\sqrt{3}}{2}$. ◁





При решении задачи 1 использовались равенства

$$\sin(2 \cdot 360° + 150°) = \sin 150°, \quad \cos(2 \cdot 360° + 150°) = \cos 150°, \qquad (1)$$

$$\sin(180° - 30°) = \sin 30°, \quad \cos(180° - 30°) = -\cos 30°. \qquad (2)$$

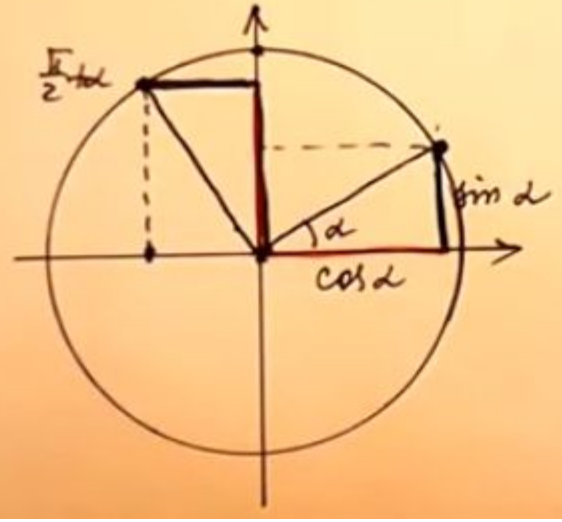
Формулы приведения запоминать необязательно. Для того чтобы записать любую из них, можно руководствоваться следующими правилами:

1) В правой части формулы ставится тот знак, который имеет левая часть при условии $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$.

2) Если в левой части угол равен $\frac{\pi}{2} \pm \alpha$ или $\frac{3\pi}{2} \pm \alpha$, то синус заменяется на косинус, косинус — на синус, тангенс — на котангенс, котангенс — на тангенс. Если угол равен $\pi \pm \alpha$, то замены не происходит.

Формулы приведения тригонометрических функций

α	$\frac{\pi}{2}-\alpha$ $90^0-\alpha$	$\frac{\pi}{2}+\alpha$ $90^0+\alpha$	$\pi-\alpha$ $180^0-\alpha$	$\pi+\alpha$ $180^0+\alpha$	$\frac{3\pi}{2}-\alpha$ $270^0-\alpha$	$\frac{3\pi}{2}+\alpha$ $270^0+\alpha$	$2\pi-\alpha$ $360^0-\alpha$	$2\pi+\alpha$ $360^0+\alpha$
sinα	cosα	cosα	sinα	-sinα	-cosα	-cosα	-sinα	sinα
cosα	sinα	-sinα	-cosα	-cosα	-sinα	sinα	cosα	cosα
tgα	ctgα	-ctgα	-tgα	tgα	ctgα	-ctgα	-tgα	tgα
ctgα	tgα	-tgα	-ctgα	ctgα	tgα	-tgα	-ctgα	ctgα



$\frac{\pi}{2}+\alpha$

$\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=-\sin\alpha$

$\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=+\cos\alpha$

$tg\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=\frac{\cos\alpha}{-\sin\alpha}=-ctg\alpha$

$ctg\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=-tg\alpha$

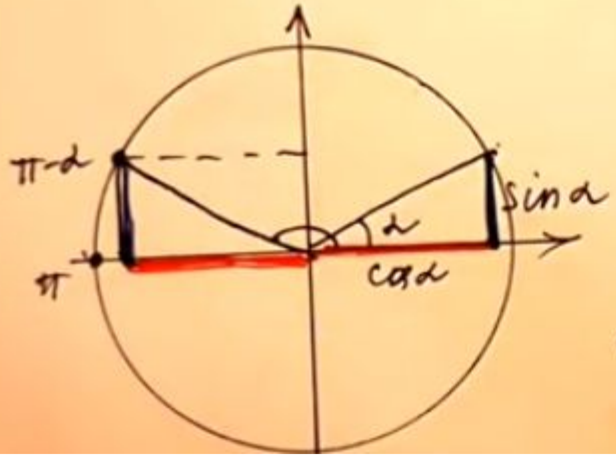
Вычислить $\cos\frac{15\pi}{4}$.

$\cos\frac{15\pi}{4}=\cos\left(4\pi-\frac{\pi}{4}\right)=\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)=\cos\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Вычислить: 1) $tg\frac{11\pi}{3}$; 2) $tg\frac{13\pi}{4}$.

▶ 1) $tg\frac{11\pi}{3}=tg\left(4\pi-\frac{\pi}{3}\right)=tg\left(-\frac{\pi}{3}\right)=-tg\frac{\pi}{3}=-\sqrt{3}$.

2) $tg\frac{13\pi}{4}=tg\left(3\pi+\frac{\pi}{4}\right)=tg\frac{\pi}{4}=1$. ◁



$\pi-\alpha$

$\cos(\pi-\alpha)=-\cos\alpha$

$\cancel{\cos(\pi-\alpha)}=$

$\sin(\pi-\alpha)=\sin\alpha$

$tg(\pi-\alpha)=\frac{\sin\alpha}{-\cos\alpha}=-tg\alpha$

$ctg(\pi-\alpha)=-\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}=-ctg\alpha$

524 Найти значение острого угла α, если:

1) $\cos 75^\circ = \cos(90^\circ - \alpha)$; 2) $\sin 150^\circ = \sin(90^\circ + \alpha)$;
3) $\sin 150^\circ = \sin(180^\circ - \alpha)$; 4) $\cos 310^\circ = \cos(270^\circ + \alpha)$;
5) $\sin \frac{5}{4}\pi = \sin(\pi + \alpha)$; 6) $\operatorname{tg}\frac{\pi}{5} = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$;
7) $\cos\frac{7\pi}{4} = \cos\left(\frac{3}{2}\pi + \alpha\right)$; 8) $\operatorname{ctg}\frac{11}{6}\pi = \operatorname{ctg}(2\pi - \alpha)$.

Вычислить с помощью формулы приведения (525—526).

525 1) $\cos 150^\circ$; 2) $\sin 135^\circ$; 3) $\operatorname{ctg} 135^\circ$; 4) $\cos 120^\circ$;
5) $\cos 225^\circ$; 6) $\sin 210^\circ$; 7) $\operatorname{ctg} 240^\circ$; 8) $\sin 315^\circ$.

526 1) $\operatorname{tg}\frac{5\pi}{4}$; 2) $\sin\frac{7\pi}{6}$; 3) $\cos\frac{5\pi}{3}$; 4) $\operatorname{ctg}\frac{5\pi}{3}$;
5) $\sin\left(-\frac{13\pi}{6}\right)$; 6) $\cos\left(-\frac{7\pi}{3}\right)$; 7) $\operatorname{tg}\left(-\frac{2\pi}{3}\right)$; 8) $\operatorname{ctg}\left(-\frac{7\pi}{4}\right)$.

Упростить выражение (527—528).

527 1) $\dfrac{\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) - \operatorname{tg}(\pi + \alpha) + \sin\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right)}{\cos(\pi + \alpha)}$;

2) $\dfrac{\sin(\pi - \alpha) + \cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) + \operatorname{ctg}(\pi - \alpha)}{\operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right)}$.

528 1) $\dfrac{\sin\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right)}{\operatorname{ctg}(2\pi - \alpha)} \cdot \dfrac{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)}{\sin(\pi + \alpha)}$;

2) $\dfrac{\sin^2(\pi + \alpha) + \sin^2\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)}{\cos\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right)} \cdot \operatorname{ctg}\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right)$.

529 Вычислить:

1) $\cos 750^\circ$; 2) $\sin 1140^\circ$; 3) $\operatorname{tg} 405^\circ$; 4) $\cos 840^\circ$;
5) $\sin\frac{47\pi}{6}$; 6) $\operatorname{tg}\frac{25\pi}{4}$; 7) $\operatorname{ctg}\frac{27\pi}{4}$; 8) $\cos\frac{21\pi}{4}$.

530 Найти значение выражения:

1) $\cos 630^\circ - \sin 1470^\circ - \operatorname{ctg} 1125^\circ$;
2) $\operatorname{tg} 1800^\circ - \sin 495^\circ + \cos 945^\circ$;
3) $3\cos 3660^\circ + \sin(-1560^\circ) + \cos(-450^\circ)$;
4) $\cos 4455^\circ - \cos(-945^\circ) + \operatorname{tg} 1035^\circ - \operatorname{ctg}(-1500^\circ)$.

531 Вычислить:

1) $\cos\frac{23\pi}{4} - \sin\frac{15\pi}{4} - \operatorname{ctg}\left(-\frac{11\pi}{2}\right)$;
2) $\sin\frac{25\pi}{3} - \cos\left(-\frac{17\pi}{2}\right) - \operatorname{tg}\frac{10\pi}{3}$;
3) $\sin(-7\pi) - 2\cos\frac{31\pi}{3} - \operatorname{tg}\frac{7\pi}{4}$;
4) $\cos(-9\pi) + 2\sin\left(-\frac{49\pi}{6}\right) - \operatorname{ctg}\left(-\frac{21\pi}{4}\right)$.

Доказать тождество (532—533).

532 1) $\sin\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right) - \cos\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right) = 0$;

2) $\cos\left(\frac{\pi}{6} - \alpha\right) - \sin\left(\frac{\pi}{3} + \alpha\right) = 0$;

3) $\dfrac{\sin\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right)}{\operatorname{tg}(\pi + \alpha)} \cdot \dfrac{\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)}{\operatorname{tg}\left(\alpha - \frac{3\pi}{2}\right)} = -\sin\alpha$.

Формулы суммы и разности синусов (косинусов)

$$\sin x + \sin y = 2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}$$

$$\sin x - \sin y = 2\sin\frac{x-y}{2}\cos\frac{x+y}{2}$$

$$\cos x + \cos y = 2\cos\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}$$

$$\cos x - \cos y = -2\sin\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}$$

$$tgx + tgy = \frac{\sin(x+y)}{\cos x \cdot \cos y}$$

$$tgx - tgy = \frac{\sin(x-y)}{\cos x \cdot \cos y}$$

Преобразование произведения синусов и косинусов в сумму (разность):

$$\sin\alpha\cos\beta = \frac{\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)}{2}, \qquad (5)$$

$$\cos\alpha\cos\beta = \frac{\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)}{2}, \qquad (6)$$

$$\sin\alpha\sin\beta = \frac{\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)}{2}. \qquad (7)$$

Задача 2 Вычислить $\sin 75° + \cos 75°$.

▶ $\sin 75° + \cos 75° = \sin 75° + \sin 15° =$

$= 2\sin\frac{75°+15°}{2}\cos\frac{75°-15°}{2} = 2\sin 45°\cos 30° =$

$= 2\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{6}}{2}$. ◁

Задача 3 Преобразовать в произведение $2\sin\alpha + \sqrt{3}$.

▶ $2\sin\alpha + \sqrt{3} = 2\left(\sin\alpha + \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2\left(\sin\alpha + \sin\frac{\pi}{3}\right) =$

$= 4\sin\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{\pi}{6}\right)\cos\left(\frac{\alpha}{2}-\frac{\pi}{6}\right)$. ◁

Упражнения

537 Упростить выражение:

1) $\sin\left(\frac{\pi}{3}+\alpha\right)+\sin\left(\frac{\pi}{3}-\alpha\right)$; 2) $\cos\left(\frac{\pi}{4}-\beta\right)-\cos\left(\frac{\pi}{4}+\beta\right)$;

3) $\sin^2\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)-\sin^2\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)$; 4) $\cos^2\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)-\cos^2\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)$.

538 Вычислить:

1) $\cos 105° + \cos 75°$; 2) $\sin 105° - \sin 75°$;

3) $\cos\frac{11\pi}{12}+\cos\frac{5\pi}{12}$; 4) $\cos\frac{11\pi}{12}-\cos\frac{5\pi}{12}$;

5) $\sin\frac{7\pi}{12}-\sin\frac{\pi}{12}$; 6) $\sin 105° + \sin 165°$.

539 Преобразовать в произведение:

1) $1 + 2\sin\alpha$; 2) $1 - 2\sin\alpha$; 3) $1 + 2\cos\alpha$; 4) $1 + \sin\alpha$.

540 Доказать тождество:

1) $\frac{\sin\alpha + \sin 3\alpha}{\cos\alpha + \cos 3\alpha} = \operatorname{tg} 2\alpha$; 2) $\frac{\sin 2\alpha + \sin 4\alpha}{\cos 2\alpha - \cos 4\alpha} = \operatorname{ctg}\alpha$.

541 Упростить выражение:

1) $\frac{2(\cos\alpha + \cos 3\alpha)}{2\sin 2\alpha + \sin 4\alpha}$; 2) $\frac{1+\sin\alpha - \cos 2\alpha - \sin 3\alpha}{2\sin^2\alpha + \sin\alpha - 1}$.

542 Доказать тождество:

1) $\cos^4\alpha - \sin^4\alpha + \sin 2\alpha = \sqrt{2}\cos\left(2\alpha - \frac{\pi}{4}\right)$;

2) $\cos\alpha + \cos\left(\frac{2\pi}{3}+\alpha\right)+\cos\left(\frac{2\pi}{3}-\alpha\right) = 0$;

3) $\frac{\sin 2\alpha + \sin 5\alpha - \sin 3\alpha}{\cos\alpha + 1 - 2\sin^2 2\alpha} = 2\sin\alpha$.

Вычислить без таблиц:

1) $\sin\frac{\pi}{12}\cos\frac{5\pi}{12}$; 2) $\operatorname{tg}\frac{\pi}{6}\operatorname{tg}\frac{\pi}{8}\operatorname{tg}\frac{3\pi}{8}\operatorname{tg}\frac{7\pi}{16}$.

Самостоятельная работа

Вычислить с помощью формул приведения (1—2).

1. $\boxed{2}$ $\sin 225^\circ + \cos 330^\circ + \operatorname{ctg} 510^\circ$.

2. $\boxed{3}$ $\sin \frac{17\pi}{6} + \cos \frac{14\pi}{3} - \operatorname{tg} \frac{13\pi}{4}$.

3. $\boxed{4}$ **Определить знак числового выражения**

$$\frac{\sin 300^\circ \operatorname{tg} 200^\circ \cos 100^\circ}{\cos 2}.$$

Преобразовать в произведение (13—22).

13. $\boxed{3}$ $\frac{\cos 20^\circ - \sin 20^\circ}{\sin 65^\circ + \cos 65^\circ}$.

14. $\boxed{5}$ $\sin 10^\circ + 2 \sin 5^\circ \cos 15^\circ + \cos 50^\circ$.

15. $\boxed{2}$ $\cos\alpha + \cos 3\alpha$.

16. $\boxed{2}$ $\sin\alpha + \cos\alpha$.

17. $\boxed{5}$ $1 - \sqrt{2}\cos\alpha$.

18. $\boxed{5}$ $\operatorname{tg}\alpha + \sqrt{3}$.

Упростить выражение:

1) $\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)$;

2) $\dfrac{\cos(\pi - \alpha) + \cos\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right)}{1 + 2\cos(-\alpha)\sin(-\alpha)}$.

Вариант I

1. Вычислить:

1) $\cos 765°$; 2) $\sin\frac{19\pi}{6}$.

2. Вычислить $\sin\alpha$, если $\cos\alpha = \frac{5}{13}$ и $-6\pi < \alpha < -5\pi$.

3. Упростить выражение:

1) $\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)$; 2) $\dfrac{\cos(\pi-\alpha)+\cos\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)}{1+2\cos(-\alpha)\sin(-\alpha)}$.

---

4. Решить уравнение:

1) $2\cos\frac{x}{2} = 1+\cos x$;

2) $\sin\left(\frac{\pi}{2}-3x\right)\cos 2x - 1 = \sin 3x\cos\left(\frac{3\pi}{2}-2x\right)$.

5. Доказать тождество $\cos 4\alpha + 1 = \frac{1}{2}\sin 4\alpha(\operatorname{ctg}\alpha - \operatorname{tg}\alpha)$.

Вариант II

1. Вычислить:

1) $\sin 765°$; 2) $\cos\frac{19\pi}{6}$.

2. Вычислить $\cos\alpha$, если $\sin\alpha = 0{,}3$ и $-\frac{7\pi}{2} < \alpha < -\frac{5\pi}{2}$.

3. Упростить выражение:

1) $\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)$; 2) $\dfrac{\cos\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)+\cos(\pi+\alpha)}{2\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{2}\right)\cos(-\alpha)+1}$.

---

4. Решить уравнение:

1) $2\sin\frac{x}{2} = 1-\cos x$;

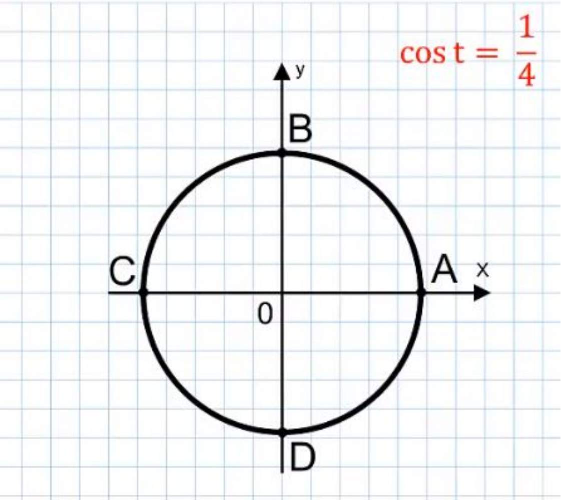
2) $\cos\left(\frac{3\pi}{2}+x\right)\cos 3x - \cos(\pi-x)\sin 3x = -1$.

5. Доказать тождество $(\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{ctg}\alpha)(1-\cos 4\alpha) = 4\sin 2\alpha$.

Тригонометрическое уравнение — уравнение, содержащее неизвестное под знаком тригонометрической функции.

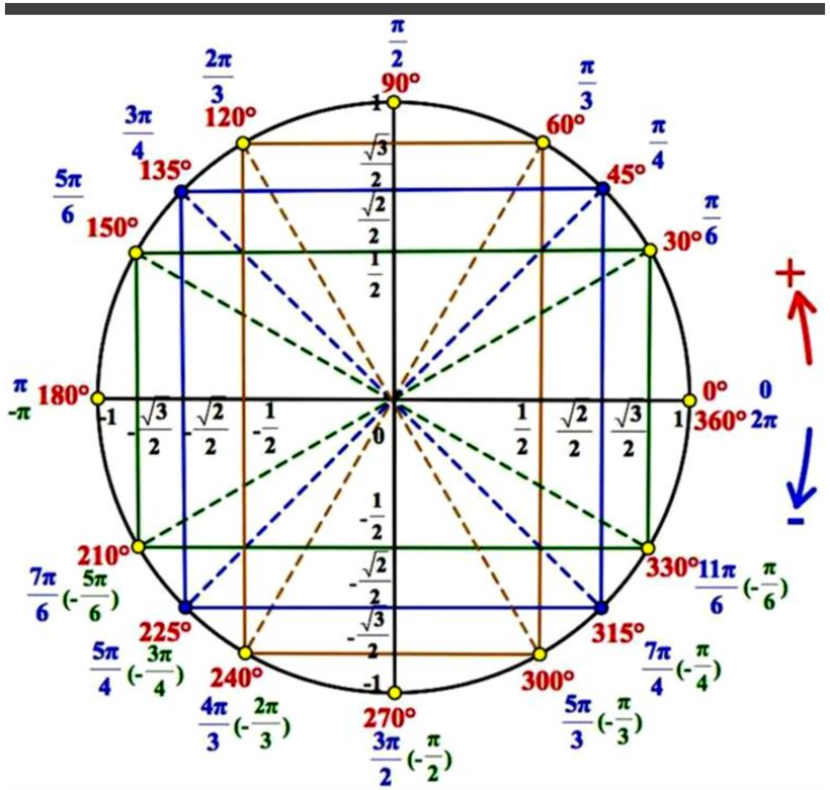
Уравнения вида $sin\ x = a, cos\ x = a, tg\ x = a, ctg\ x = a$ называются **простейшими тригонометрическими уравнениями.**

Уравнение $cos\ x = a$



Число $\frac{\pi}{3}$ называют арккосинусом числа $\frac{1}{2}$ и записывают

$$\arccos\frac{1}{2} = \frac{\pi}{3}$$



Что же такое $arccos\ a$? Арккосинус в переводе с латинского означает «дуга и косинус». Это обратная функция.

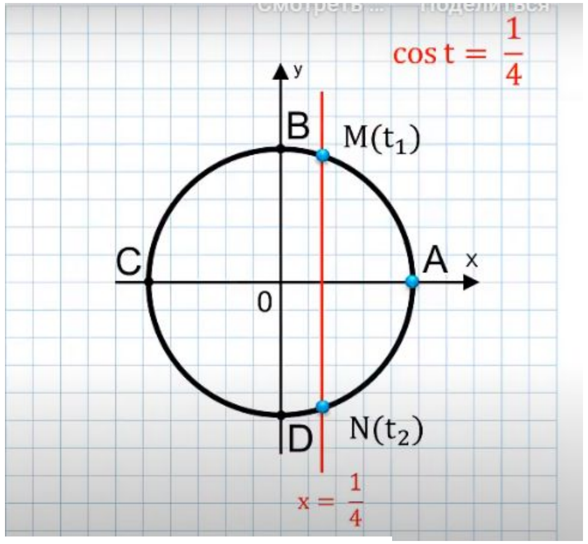
Пусть $|a| \leq 1$, $\arccos a$ — такое число из отрезка $[0\,;\,\pi]$, косинус которого равен a.

Говоря иначе:

$\arccos a = x \Rightarrow \cos x = a, |a| \leq 1, x \in [0; \pi]$.

$$\cos x = a$$

корни уравнения выражаются формулой $x = \pm \arccos a + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$.



Частные случаи:

1. $\cos x = 0 \Rightarrow x = \dfrac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$;
2. $\cos x = 1 \Rightarrow x = 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$;
3. $\cos x = -1 \Rightarrow x = \pi + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$.

$$t_1 = \arccos\frac{1}{4};$$

$$t_2 = -\arccos\frac{1}{4};$$

$$t = \arccos\frac{1}{4} + 2\pi k;$$

$$t = -\arccos\frac{1}{4} + 2\pi k;$$

Если $\cos\dfrac{\pi}{4} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$, то $\arccos\dfrac{\sqrt{2}}{2} = \dfrac{\pi}{4}$.

$$t = \pm\arccos\frac{1}{4} + 2\pi k.$$

Пример 1. Вычислить $\arccos\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Решение.

$\arccos\frac{\sqrt{3}}{2} = t; \quad \Longrightarrow \quad \cos t = \frac{\sqrt{3}}{2}, t \in [0;\ \pi];$

$\cos t = \frac{\sqrt{3}}{2}; \quad t = \frac{\pi}{6}; \quad \cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2};$

Пример 3. Вычислить $\cos t = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Решение.

$t = \pm\arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + 2\pi k;$

$\arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \pi - \text{arcos}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4};$

$t = \pm\frac{3\pi}{4} + 2\pi k;$

Упражнения

Вычислить (**568—569**).

568 1) $\arccos 0$; 2) $\arccos 1$; 3) $\arccos \frac{\sqrt{2}}{2}$;

4) $\arccos \frac{1}{2}$; 5) $\arccos \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$; 6) $\arccos \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

569 1) $2 \arccos 0 + 3 \arccos 1$; 2) $3 \arccos (-1) - 2 \arccos 0$;

3) $12 \arccos \frac{\sqrt{3}}{2} - 3 \arccos \left(-\frac{1}{2}\right)$;

4) $4 \arccos \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + 6 \arccos \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

Решить уравнение (**571—573**).

571 1) $\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$; 2) $\cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$; 3) $\cos x = -\frac{1}{\sqrt{2}}$.

572 1) $\cos x = \frac{3}{4}$; 2) $\cos x = -0{,}3$; 3) $\cos x = -\frac{\sqrt{3}}{3}$.

573 1) $\cos 4x = 1$; 2) $\cos 2x = -1$; 3) $\sqrt{2} \cos \frac{x}{4} = -1$;

4) $2 \cos \frac{x}{3} = \sqrt{3}$; 5) $\cos \left(x + \frac{\pi}{3}\right) = 0$; 6) $\cos \left(2x - \frac{\pi}{4}\right) = 0$.

574 1) $\cos x \cos 3x = \sin 3x \sin x$;

2) $\cos 2x \cos x + \sin 2x \sin x = 0$.

575 Выяснить, имеет ли смысл выражение:

1) $\arccos (\sqrt{6} - 3)$; 2) $\arccos (\sqrt{7} - 2)$; 3) $\arccos (2 - \sqrt{10})$;

4) $\arccos (1 - \sqrt{5})$; 5) $\operatorname{tg} \left(3 \arccos \frac{1}{2}\right)$.

576 Решить уравнение:

1) $\cos^2 2x = 1 + \sin^2 2x$; 2) $4 \cos^2 x = 3$;

3) $2 \cos^2 x = 1 + 2 \sin^2 x$; 4) $2\sqrt{2} \cos^2 x = 1 + \sqrt{2}$;

5) $(1 + \cos x)(3 - 2 \cos x) = 0$;

6) $(1 - \cos x)(4 + 3 \cos 2x) = 0$;

7) $(1 + 2 \cos x)(1 - 3 \cos x) = 0$;

8) $(1 - 2 \cos x)(2 + 3 \cos x) = 0$.

580 Доказать, что при всех значениях a, таких, что $-1 \leqslant a \leqslant 1$, выполняется равенство $\cos(\arccos a) = a$. Вычислить:

1) $\cos (\arccos 0{,}2)$; 2) $\cos \left(\arccos \left(-\frac{2}{3}\right)\right)$;

3) $\cos\left(\pi+\arccos\frac{3}{4}\right)$; 4) $\sin\left(\frac{\pi}{2}+\arccos\frac{1}{3}\right)$;

5) $\sin\left(\arccos\frac{4}{5}\right)$; 6) $\operatorname{tg}\left(\arccos\frac{3}{\sqrt{10}}\right)$.

581 Доказать, что $\arccos(\cos\alpha)=\alpha$ при $0\leqslant\alpha\leqslant\pi$. Вычислить:

1) $5\arccos\left(\cos\frac{\pi}{10}\right)$; 2) $3\arccos(\cos 2)$;

3) $\arccos\left(\cos\frac{8\pi}{7}\right)$; 4) $\arccos(\cos 4)$.

582 Вычислить:

1) $\sin\left(\arccos\frac{1}{3}+\arccos\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)$; 2) $\cos\left(\arccos\frac{4}{5}-\arccos\frac{3}{5}\right)$.