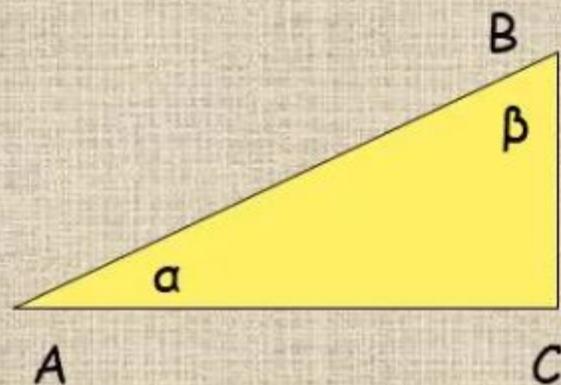


# Тригонометрическая таблица

градусы	$0^{\circ}$	$30^{\circ}$	$45^{\circ}$	$60^{\circ}$	$90^{\circ}$	$120^{\circ}$	$135^{\circ}$	$150^{\circ}$	$180^{\circ}$	$270^{\circ}$	$360^{\circ}$
радианы	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	$\pi$	$\frac{3\pi}{2}$	$2\pi$
Sin x	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0
Cos x	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	0	1
tg x	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	-	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	-	0
ctg x	-	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	-1	$-\sqrt{3}$	-	0	-

## Урок 42. Синус, косинус и тангенс острого угла прямоугольного треугольника.



$$\sin \alpha = \frac{BC}{AB}$$

$$\cos \alpha = \frac{AC}{AB}$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{BC}{AC}$$

- Синусом острого угла прямоугольного треугольника называется отношение противолежащего катета к гипотенузе.
- Косинусом острого угла прямоугольного треугольника называется отношение прилежащего катета к гипотенузе.
- Тангенсом острого угла прямоугольного треугольника называется отношение противолежащего катета к прилежащему.
- Тангенс угла равен отношению синуса к косинусу этого угла.

$$\frac{\sin A}{\cos A} = \frac{\frac{BC}{AB}}{\frac{AC}{AB}} = \frac{BC}{AC} = \operatorname{tg} A$$



Найти значение выражения (15—18).

15.  $\boxed{4} \cos \frac{\pi}{2} - \sin \frac{\pi}{2}.$

16.  $\boxed{4} \sin(-\pi) - \cos \frac{3}{2} \pi.$

17.  $\boxed{4} \cos \frac{\pi}{6} - \sin \left(-\frac{\pi}{2}\right).$

18.  $\boxed{4} \cos(-2\pi) - \sin \frac{\pi}{4}.$

Вычислить (19—21).

19.  $\boxed{3} \operatorname{ctg} \frac{\pi}{2}.$

20.  $\boxed{3} \operatorname{tg} 2\pi.$

21.  $\boxed{3} \operatorname{ctg} \frac{\pi}{6}.$

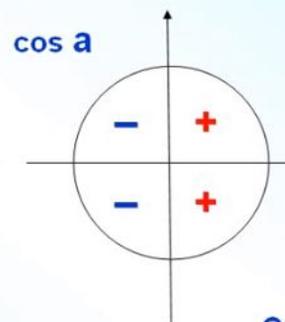
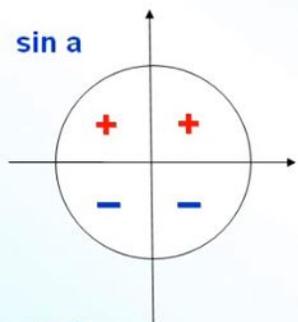
Найти синус, косинус и тангенс числа  $\alpha$  (22—24).

22.  $\boxed{5} \alpha = -7\pi.$

23.  $\boxed{5} \alpha = \frac{11\pi}{2}.$

24.  $\boxed{5} \alpha = -1260^\circ.$

## ЗНАКИ тригонометрических функций



$$f(-x) = f(x)$$

Косинус – четная функция

$$\checkmark \cos(-\alpha) = \cos \alpha$$

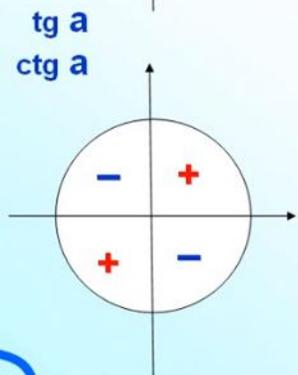
$$f(-x) = -f(x)$$

Синус, тангенс и котангенс – нечетные функции

$$\checkmark \sin(-\alpha) = -\sin \alpha$$

$$\checkmark \operatorname{tg}(-\alpha) = -\operatorname{tg} \alpha$$

$$\checkmark \operatorname{ctg}(-\alpha) = -\operatorname{ctg} \alpha$$

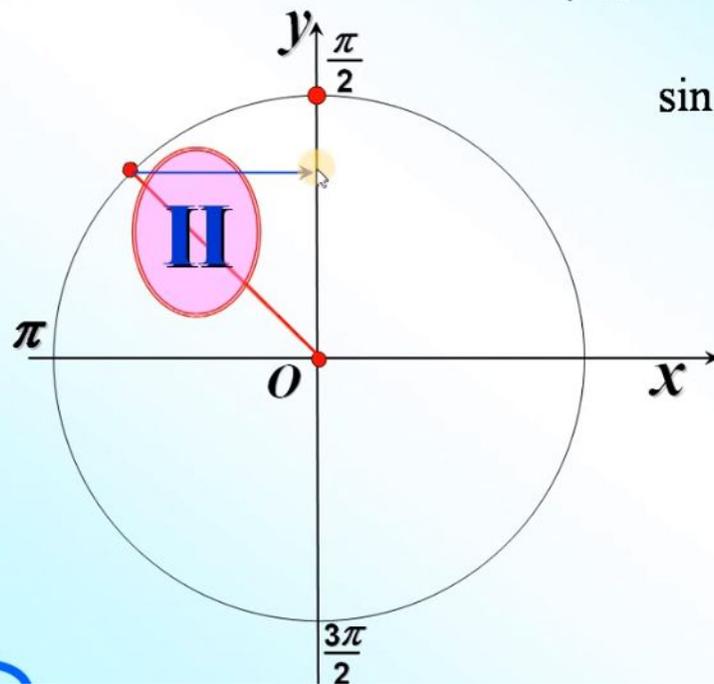


Определите знак:

$$\sin \frac{4\pi}{7}$$

$$\frac{\pi}{2} < \frac{4\pi}{7} < \pi$$

$$\frac{7\pi}{14} < \frac{8\pi}{14}$$



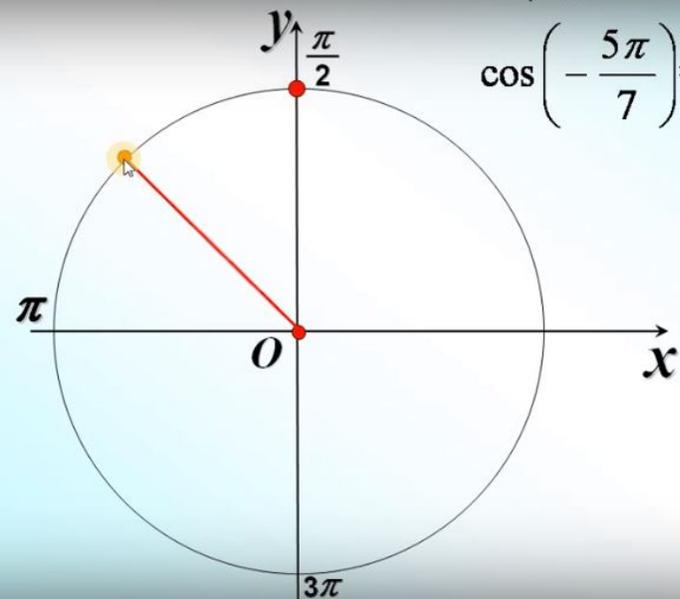
косинуса тангенса

Определите знак:

$$\cos \left( -\frac{5\pi}{7} \right) = \cos \frac{5\pi}{7}$$

$$\frac{\pi}{2} < \frac{5\pi}{7} < \pi$$

$$\frac{7\pi}{14} < \frac{10\pi}{14}$$

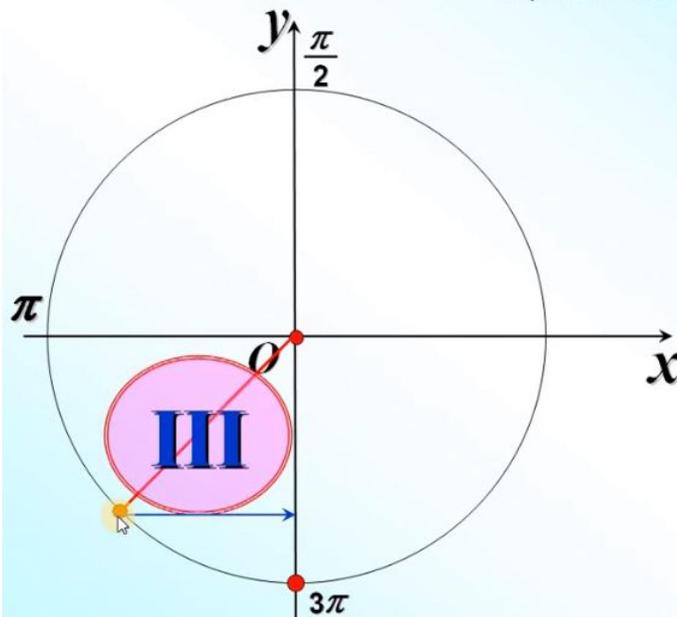


Определите знак:

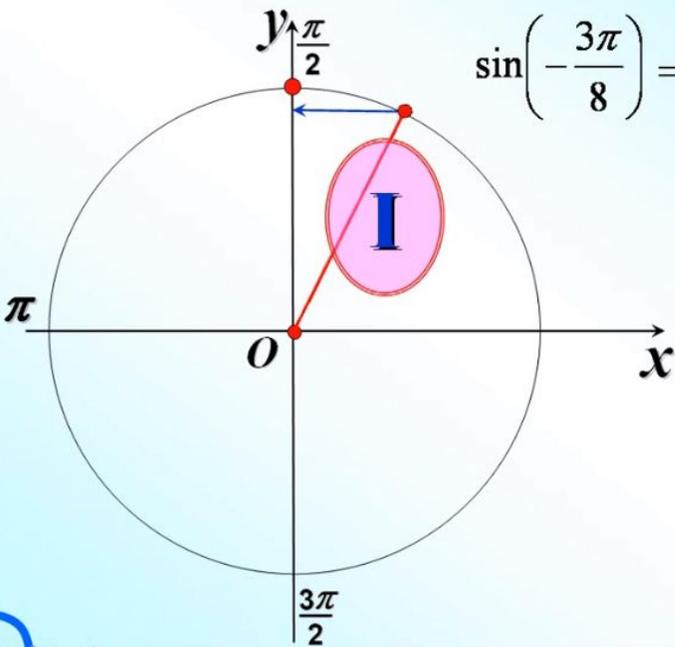
$$\sin \frac{9\pi}{8}$$

$$\pi < \frac{9\pi}{8} < \frac{3\pi}{2}$$

$$\frac{18\pi}{16} < \frac{24\pi}{16}$$



Определите знак:

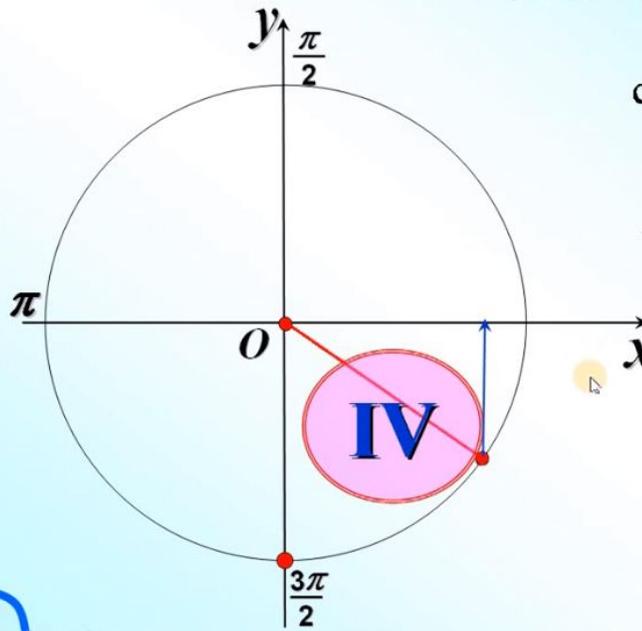


$$\sin\left(-\frac{3\pi}{8}\right) = -\sin\frac{3\pi}{8}$$

$$\frac{\pi^4}{2} > \frac{3\pi^1}{8}$$

$$\frac{4\pi}{8} > \frac{3\pi}{8}$$

Определите знак:

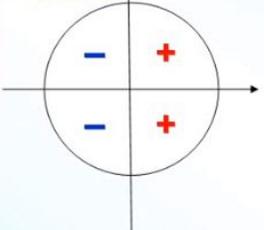


$$\cos\frac{14\pi}{9} > 0$$

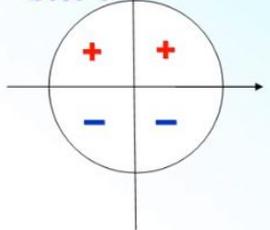
$$\frac{3\pi^9}{2} < \frac{14\pi^2}{9} < 2\pi$$

$$\frac{27\pi}{18} < \frac{28\pi}{18}$$

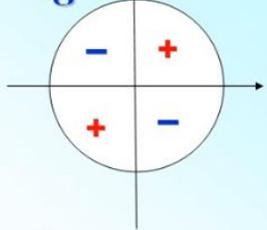
$\cos t$



$\sin t$



$\operatorname{tg} t$



$$\cos 3 < 0$$

$$3 \cdot 57 = 171^\circ$$

Определите знак:

$$\sin 5 < 0$$

$$5 \cdot 57 = 285^\circ$$

$$8 \cdot 57 = 456^\circ$$

$$\cos 8 = \cos 456 = \cos(360 + 96) = \cos 96 < 0$$

$$\cos(-6) = \cos 6 = \cos 342^\circ > 0$$

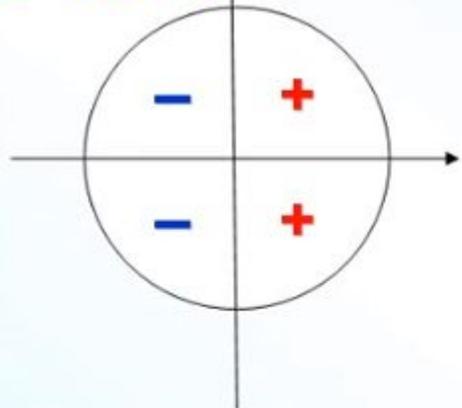
$$6 \cdot 57 = 342^\circ$$

$$\operatorname{tg}(-15) = -\operatorname{tg}15 = -\operatorname{tg}855^\circ = -\operatorname{tg}(360 \cdot 2 + 135)$$

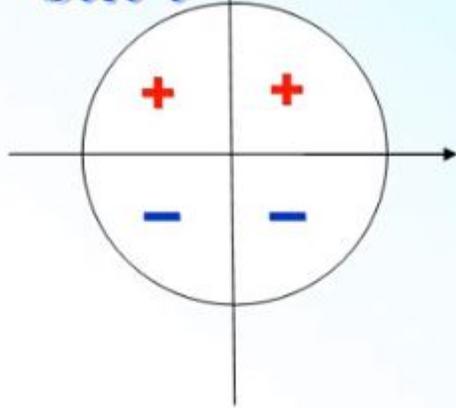
$$= -(-) > 0$$

$$15 \cdot 57 = 855^\circ$$

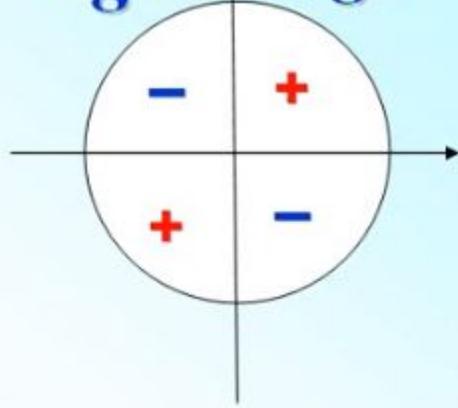
$\cos t$



$\sin t$



$\operatorname{tg} t$     $\operatorname{ctg} t$



Определите знак:

$$\overset{I \text{ ч.}}{\sin 1} \cdot \overset{II \text{ ч.}}{\cos 2} < 0;$$

+                      -

$$\cos 2 \cdot \sin(-3) = -\overset{II \text{ ч.}}{\cos 2} \cdot \overset{II \text{ ч.}}{\sin 3} > 0;$$

-                      +

$$\overset{I \text{ ч.}}{\operatorname{tg} 1} - \overset{II \text{ ч.}}{\cos 2} > 0;$$

+                      -

$$\overset{II \text{ ч.}}{\sin 2} - \overset{IV \text{ ч.}}{\operatorname{ctg} 5,5} > 0;$$

+                      -

$$1 \cdot 57 = 57^{\circ};$$

$$2 \cdot 57 = 114^{\circ}$$

$$3 \cdot 57 = 171^{\circ}$$

$$5,5 \cdot 57 = 313,5^{\circ}$$

## Задания для самостоятельной работы

### Вариант I

В какой четверти находится точка  $A$  (1—2)?

1.  Обе координаты точки  $A$  положительны.
2.  Абсцисса точки  $A$  — число положительное, ордината — отрицательное.

В какой четверти находится точка, полученная поворотом точки  $P(1; 0)$  на угол  $\alpha$  (4—8)?

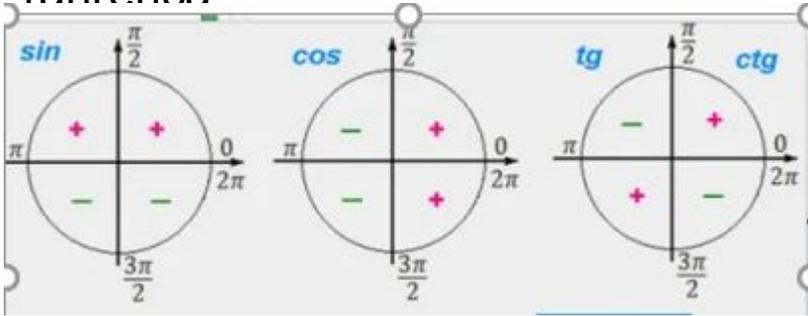
4.   $\alpha = \frac{2\pi}{7}$ .
5.   $\alpha = \frac{17\pi}{4}$ .
6.   $\alpha = -\frac{\pi}{9}$ .
7.   $\alpha = -3,4$ .
8.   $\alpha = 13,6$ .

Точка  $A$  получена поворотом точки  $P(1; 0)$  на угол  $\alpha - \frac{\pi}{2}$ . В какой четверти расположена точка  $A$  (9—10)?

9.   $\alpha = \frac{7\pi}{8}$ .
10.   $\alpha = \frac{5\pi}{4}$ .

11.  $\alpha = 398^\circ$ .

## Знаки синуса косинуса и тангенса



### Примеры с решениями

Вычислить  $\sin \alpha$  и  $\cos \alpha$ , если  $\operatorname{tg} \alpha = -\frac{4}{3}$  и  $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ .

Решение. С помощью формулы (3) находим

$$\cos^2 \alpha = \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha} = \frac{1}{1 + \frac{16}{9}} = \frac{9}{25}.$$

Так как  $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ , то  $\cos \alpha < 0$ ,  $\sin \alpha > 0$ . Поэтому  $\cos \alpha = -\sqrt{\frac{9}{25}} = -\frac{3}{5}$ , а из равенства (1) следует, что  $\sin \alpha = +\sqrt{1 - \cos^2 \alpha} = \sqrt{1 - \frac{9}{25}} = \frac{4}{5}$ .  
 Ответ.  $\sin \alpha = \frac{4}{5}$ ,  $\cos \alpha = -\frac{3}{5}$ .

Упростить выражение  $A = \frac{2 \sin^2 \alpha - 1}{\cos \alpha + \sin \alpha}$ .

Решение. С помощью тождества (1) и формулы  $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$  получаем

$$A = \frac{2 \sin^2 \alpha - (\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha)}{\cos \alpha + \sin \alpha} = \frac{\sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha}{\sin \alpha + \cos \alpha} = \sin \alpha - \cos \alpha.$$

## § 25. Зависимость между синусом, косинусом и тангенсом одного и того же угла

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \Rightarrow \sin \alpha = \pm \sqrt{1 - \cos^2 \alpha}$$

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \Rightarrow \cos \alpha = \pm \sqrt{1 - \sin^2 \alpha}$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$$

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \alpha \operatorname{ctg} \alpha &= 1, \\ 1 + \operatorname{tg}^2 \alpha &= \frac{1}{\cos^2 \alpha}, \\ 1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha &= \frac{1}{\sin^2 \alpha}. \end{aligned}$$

### Упражнения

465 Доказать тождество:

1)  $(1 - \cos \alpha)(1 + \cos \alpha) = \sin^2 \alpha$ ;

2)  $(1 - \sin \alpha)(1 + \sin \alpha) = \cos^2 \alpha$ ;

3)  $\frac{\sin^2 \alpha}{1 - \sin^2 \alpha} = \operatorname{tg}^2 \alpha$ ;

4)  $\frac{\cos^2 \alpha}{1 - \cos^2 \alpha} = \operatorname{ctg}^2 \alpha$ ;

5)  $\frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha} + \sin^2 \alpha = 1$ ;

6)  $\frac{1}{1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha} + \cos^2 \alpha = 1$ .

466 Упростить выражение:

1)  $\cos \alpha \cdot \operatorname{tg} \alpha - 2 \sin \alpha$ ;

2)  $\cos \alpha - \sin \alpha \cdot \operatorname{ctg} \alpha$ ;

3)  $\frac{\sin^2 \alpha}{1 + \cos \alpha}$ ;

4)  $\frac{\cos^2 \alpha}{1 - \sin \alpha}$ .

140

Вычислить (1—4).

1. [3]  $\sin \alpha$ , если  $\cos \alpha = \frac{3}{5}$ ,  $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$ .

2. [3]  $\cos \alpha$  и  $\operatorname{tg} \alpha$ , если  $\sin \alpha = -\frac{\sqrt{13}}{4}$ ,  $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$ .

3. [5]  $\sin \alpha$  и  $\cos \alpha$ , если  $\operatorname{tg} \alpha = \sqrt{\frac{2}{7}}$ ,  $6\pi < \alpha < \frac{13\pi}{2}$ .

4. [5]  $\sin \alpha$  и  $\cos \alpha$ , если  $\operatorname{ctg} \alpha = \frac{4}{3}$ ,  $5\pi < \alpha < \frac{11\pi}{2}$ .

1)  $\frac{\sin \alpha}{1 - \cos^2 \alpha}$  при  $\alpha = \frac{\pi}{4}$ ;

2)  $\cos^2 \alpha + \operatorname{ctg}^2 \alpha + \sin^2 \alpha$  при  $\alpha = \frac{\pi}{6}$ ;

3)  $\frac{1}{\cos^2 \alpha} - 1$  при  $\alpha = \frac{\pi}{3}$ ;

4)  $\cos^2 \alpha + \operatorname{tg}^2 \alpha \operatorname{ctg}^2 \alpha + \sin^2 \alpha$  при  $\alpha = \frac{\pi}{3}$ .

468 Доказать тождество:

1)  $(1 - \sin^2 \alpha)(1 + \operatorname{tg}^2 \alpha) = 1$ ;

2)  $\sin^2 \alpha(1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha) - \cos^2 \alpha = \sin^2 \alpha$ .

469 Упростить выражение:

1)  $(1 + \operatorname{tg}^2 \alpha) \cos^2 \alpha - 1$ ;

2)  $1 - \sin^2 \alpha(1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha)$ ;

3)  $1 + \operatorname{tg}^2 \alpha + \frac{1}{\sin^2 \alpha}$ ;

4)  $\frac{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}{1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha}$ .

470 Доказать тождество:

1)  $(1 - \cos 2\alpha)(1 + \cos 2\alpha) = \sin^2 2\alpha$ ;

2)  $\frac{\sin \alpha - 1}{\cos^2 \alpha} = -\frac{1}{1 + \sin \alpha}$ ;

3)  $\cos^4 \alpha - \sin^4 \alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$ ;

4)  $(\sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha)^2 + 2 \cos^2 \alpha \sin^2 \alpha = \sin^4 \alpha + \cos^4 \alpha$ ;

5)  $\frac{\sin \alpha}{1 + \cos \alpha} + \frac{1 + \cos \alpha}{\sin \alpha} = \frac{2}{\sin \alpha}$ ;

6)  $\frac{\sin \alpha}{1 - \cos \alpha} = \frac{1 + \cos \alpha}{\sin \alpha}$ ;

7)  $\frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha} + \frac{1}{1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha} = 1$ ;

8)  $\operatorname{tg}^2 \alpha - \sin^2 \alpha = \operatorname{tg}^2 \alpha \sin^2 \alpha$ .

471 Найти значение выражения  $\sin \alpha \cos \alpha$ , если  $\sin \alpha - \cos \alpha = 0,6$ .

472 Найти значение выражения  $\cos^3 \alpha - \sin^3 \alpha$ , если  $\cos \alpha - \sin \alpha = 0,2$ .

473 Известно, что  $\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{ctg} \alpha = 3$ . Найти  $\operatorname{tg}^2 \alpha + \operatorname{ctg}^2 \alpha$ .

475 Вычислить:

$$1) \cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) \sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) + \operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{4}\right); \quad 2) \frac{1 + \operatorname{tg}^2\left(-\frac{\pi}{6}\right)}{1 + \operatorname{ctg}^2\left(-\frac{\pi}{6}\right)};$$

$$3) 2 \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) \cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + \operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{3}\right) + \sin^2\left(-\frac{\pi}{4}\right);$$

$$4) \cos(-\pi) + \operatorname{ctg}\left(-\frac{\pi}{2}\right) - \sin\left(-\frac{3}{2}\pi\right) + \operatorname{ctg}\left(-\frac{\pi}{4}\right);$$

$$5) \frac{3 - \sin^2\left(-\frac{\pi}{3}\right) - \cos^2\left(-\frac{\pi}{3}\right)}{2 \cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)};$$

$$6) 2 \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) + 3 + 7,5 \operatorname{tg}(-\pi) + \frac{1}{8} \cos \frac{3}{2} \pi.$$

476 Упростить выражение:

$$1) \operatorname{tg}(-\alpha) \cos \alpha + \sin \alpha; \quad 2) \cos \alpha - \operatorname{ctg} \alpha (-\sin \alpha);$$

$$3) \frac{\cos(-\alpha) + \sin(-\alpha)}{\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha};$$

$$4) \operatorname{tg}(-\alpha) \operatorname{ctg}(-\alpha) + \cos^2(-\alpha) + \sin^2 \alpha.$$

477 Вычислить:

$$1) \frac{2 - \sin^2\left(-\frac{\pi}{6}\right) + \cos^2\left(-\frac{\pi}{3}\right)}{2 \cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)};$$

$$2) \sqrt{3} \sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) - 2 \operatorname{ctg}\left(-\frac{\pi}{4}\right) + 4 \cos\left(-\frac{3}{2}\pi\right).$$

478 Упростить выражение:

$$1) \frac{\sin^3(-\alpha) + \cos^3(-\alpha)}{1 - \sin(-\alpha) \cos(-\alpha)}; \quad 2) \frac{1 - (\sin \alpha + \cos(-\alpha))^2}{-\sin(-\alpha)}.$$

## ФОРМУЛЫ СЛОЖЕНИЯ

$$[1] \sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$$

$$[2] \sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta$$

$$[3] \cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$$

$$[4] \cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta$$

$$[5] \operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta}{1 - \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta}$$

$$[6] \operatorname{tg}(\alpha - \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta}{1 + \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta}$$

$$[7] \operatorname{ctg}(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{ctg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \beta - 1}{\operatorname{ctg} \beta + \operatorname{ctg} \alpha}$$

$$[8] \operatorname{ctg}(\alpha - \beta) = \frac{\operatorname{ctg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \beta + 1}{\operatorname{ctg} \beta - \operatorname{ctg} \alpha}$$

---

Вычислить, представив аргумент в виде суммы или разности

6.  $\boxed{3}$   $\cos 15^\circ$ .      7.  $\boxed{3}$   $\sin 135^\circ$ .      8.  $\boxed{3}$   $\operatorname{tg} 105^\circ$ .

$\boxed{1}$   $\sin 103^\circ 30' \cos 13^\circ 30' - \sin 13^\circ 30' \cos 103^\circ 30'$ .

$\boxed{1}$   $\cos 53^\circ \cos 8^\circ + \sin 53^\circ \sin 8^\circ$ .

$\boxed{2}$   $\sin \frac{\pi}{12} \cos \frac{\pi}{6} + \cos \frac{\pi}{12} \sin \frac{\pi}{6}$ .

$\boxed{2}$   $\cos \frac{\pi}{9} \cos \frac{8\pi}{9} - \sin \frac{\pi}{9} \sin \frac{8\pi}{9}$ .

5.  $\boxed{2}$   $\frac{\operatorname{tg} \frac{4\pi}{9} - \operatorname{tg} \frac{\pi}{9}}{1 + \operatorname{tg} \frac{4\pi}{9} \operatorname{tg} \frac{\pi}{9}}$ .

### Упражнения

**481** С помощью формул сложения вычислить:

- 1)  $\cos 135^\circ$ ; 2)  $\cos 120^\circ$ ; 3)  $\cos 150^\circ$ ; 4)  $\cos 240^\circ$ .

**482** Вычислить, не пользуясь таблицами:

1)  $\cos 57^\circ 30' \cos 27^\circ 30' + \sin 57^\circ 30' \sin 27^\circ 30'$ ;

2)  $\cos 19^\circ 30' \cos 25^\circ 30' - \sin 19^\circ 30' \sin 25^\circ 30'$ ;

3)  $\cos \frac{7\pi}{9} \cos \frac{11\pi}{9} - \sin \frac{7\pi}{9} \sin \frac{11\pi}{9}$ ;

4)  $\cos \frac{8\pi}{7} \cos \frac{\pi}{7} + \sin \frac{8\pi}{7} \sin \frac{\pi}{7}$ .

**483** Вычислить:

1)  $\cos \left( \frac{\pi}{3} + \alpha \right)$ , если  $\sin \alpha = \frac{1}{\sqrt{3}}$  и  $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ ;

2)  $\cos \left( \alpha - \frac{\pi}{4} \right)$ , если  $\cos \alpha = -\frac{1}{3}$  и  $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ .

**484** Упростить выражение:

1)  $\cos 3\alpha \cos \alpha - \sin \alpha \sin 3\alpha$ ;

2)  $\cos 5\beta \cos 2\beta + \sin 5\beta \sin 2\beta$ .

3)  $\cos \left( \frac{\pi}{7} + \alpha \right) \cos \left( \frac{5\pi}{14} - \alpha \right) - \sin \left( \frac{\pi}{7} + \alpha \right) \sin \left( \frac{5\pi}{14} - \alpha \right)$ ;

4)  $\cos \left( \frac{7\pi}{5} + \alpha \right) \cos \left( \frac{2\pi}{5} + \alpha \right) + \sin \left( \frac{7\pi}{5} + \alpha \right) \sin \left( \frac{2\pi}{5} + \alpha \right)$ .

**485** Найти значение выражения:

1)  $\sin 73^\circ \cos 17^\circ + \cos 73^\circ \sin 17^\circ$ ;

2)  $\sin 73^\circ \cos 13^\circ - \cos 73^\circ \sin 13^\circ$ ;

3)  $\sin \frac{5\pi}{12} \cos \frac{\pi}{12} + \sin \frac{\pi}{12} \cos \frac{5\pi}{12}$ ;

4)  $\sin \frac{7\pi}{12} \cos \frac{\pi}{12} - \sin \frac{\pi}{12} \cos \frac{7\pi}{12}$ .

**486** Вычислить:

1)  $\sin \left( \alpha + \frac{\pi}{6} \right)$ , если  $\cos \alpha = -\frac{3}{5}$  и  $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$ ;

2)  $\sin \left( \frac{\pi}{4} - \alpha \right)$ , если  $\sin \alpha = \frac{\sqrt{2}}{3}$  и  $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ .

**487** Упростить выражение:

1)  $\sin (\alpha + \beta) + \sin (-\alpha) \cos (-\beta)$ ;

2)  $\cos (-\alpha) \sin (-\beta) - \sin (\alpha - \beta)$ ;

3)  $\cos \left( \frac{\pi}{2} - \alpha \right) \sin \left( \frac{\pi}{2} - \beta \right) - \sin (\alpha - \beta)$ ;

4)  $\sin (\alpha + \beta) + \sin \left( \frac{\pi}{2} - \alpha \right) \sin (-\beta)$ .

**488** Вычислить  $\cos (\alpha + \beta)$  и  $\cos (\alpha - \beta)$ , если  $\sin \alpha = -\frac{3}{5}$ ,

$\frac{3}{2} \pi < \alpha < 2\pi$ , и  $\sin \beta = \frac{8}{17}$ ,  $0 < \beta < \frac{\pi}{2}$ .

491 Упростить выражение:

1)  $\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)$ ;

2)  $\cos\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right) \cos\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right) + \frac{1}{2} \sin^2 \alpha$ ;

3)  $\cos 3\alpha + \sin \alpha \sin 2\alpha$ ;

4)  $\cos 2\alpha - \cos \alpha \cos 3\alpha$ .

493 Вычислить:

1)  $\frac{\operatorname{tg} 29^\circ + \operatorname{tg} 31^\circ}{1 - \operatorname{tg} 29^\circ \operatorname{tg} 31^\circ}$ ;

2)  $\frac{\operatorname{tg} \frac{7\pi}{16} - \operatorname{tg} \frac{3\pi}{16}}{1 + \operatorname{tg} \frac{7\pi}{16} \operatorname{tg} \frac{3\pi}{16}}$ ;

3)  $\frac{1 + \operatorname{tg} 10^\circ \operatorname{tg} 55^\circ}{\operatorname{tg} 55^\circ - \operatorname{tg} 10^\circ}$ ;

4)  $\frac{1 - \operatorname{tg} 13^\circ \operatorname{tg} 17^\circ}{\operatorname{tg} 17^\circ + \operatorname{tg} 13^\circ}$ .

494 Вычислить:

1)  $\operatorname{tg}(\alpha + \beta)$ , если  $\operatorname{tg} \alpha = -\frac{3}{4}$  и  $\operatorname{tg} \beta = 2,4$ ;

2)  $\operatorname{ctg}(\alpha - \beta)$ , если  $\operatorname{ctg} \alpha = \frac{4}{3}$  и  $\operatorname{ctg} \beta = -1$ .

Выведем формулы синуса и косинуса двойного угла, используя формулы сложения.

1.  $\sin 2\alpha = \sin(\alpha + \alpha) = \sin \alpha \cos \alpha + \sin \alpha \cos \alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$ . Итак,

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha. \quad (1)$$

**Задача 1** Вычислить  $\sin 2\alpha$ , если  $\sin \alpha = -0,6$  и  $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$ .

► По формуле (1) находим  $\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha = 2 \cdot (-0,6) \cdot \cos \alpha = -1,2 \cos \alpha$ .  
Так как  $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$ , то  $\cos \alpha < 0$ , и поэтому

$$\cos \alpha = -\sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = -\sqrt{1 - 0,36} = -0,8.$$

Следовательно,  $\sin 2\alpha = -1,2 \cdot (-0,8) = 0,96$ . ◁

2.  $\cos 2\alpha = \cos(\alpha + \alpha) = \cos \alpha \cos \alpha - \sin \alpha \sin \alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$ . Итак,

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha. \quad (2)$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha. \quad (2)$$

**Задача 2** Вычислить  $\cos 2\alpha$ , если  $\cos \alpha = 0,3$ .

► Используя формулу (2) и основное тригонометрическое тождество, получаем  $\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = \cos^2 \alpha - (1 - \cos^2 \alpha) = 2 \cos^2 \alpha - 1 = 2 \cdot (0,3)^2 - 1 = -0,82$ . ◁

**Задача 3** Упростить выражение  $\frac{\sin \alpha \cos \alpha}{1 - 2 \sin^2 \alpha}$ .

$$\begin{aligned} \frac{\sin \alpha \cos \alpha}{1 - 2 \sin^2 \alpha} &= \frac{2 \sin \alpha \cos \alpha}{2(\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha - 2 \sin^2 \alpha)} = \\ &= \frac{\sin 2\alpha}{2(\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha)} = \frac{\sin 2\alpha}{2 \cos 2\alpha} = \frac{1}{2} \operatorname{tg} 2\alpha. \quad \triangleleft \end{aligned}$$

**Задача 4** Вычислить  $\operatorname{tg} 2\alpha$ , если  $\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{2}$ .

► Полагая в формуле  $\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta}{1 - \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta}$  (см. § 28)  $\beta = \alpha$ , получаем

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}. \quad (3)$$

Если  $\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{2}$ , то по формуле (3) находим

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2 \cdot \frac{1}{2}}{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{4}{3}. \quad \triangleleft$$

### Упражнения

Выразить синус, косинус или тангенс, используя формулы двойного угла (498—499).

498 1)  $\sin 48^\circ$ ; 2)  $\cos 164^\circ$ ; 3)  $\operatorname{tg} 92^\circ$ ; 4)  $\sin \frac{4\pi}{3}$ ; 5)  $\cos \frac{5\pi}{3}$ .

499 1)  $\sin \left( \frac{\pi}{2} + \alpha \right)$ ; 2)  $\sin \left( \frac{\pi}{4} + \beta \right)$ ; 3)  $\cos \left( \frac{\pi}{2} - \alpha \right)$ ;

4)  $\cos \left( \frac{3\pi}{2} + \alpha \right)$ ; 5)  $\sin \alpha$ ; 6)  $\cos \alpha$ .

Вычислить, не используя калькулятор (500—502).

500 1)  $2 \sin 15^\circ \cdot \cos 15^\circ$ ; 2)  $\cos^2 15^\circ - \sin^2 15^\circ$ ;

3)  $\frac{2 \operatorname{tg} 15^\circ}{1 - \operatorname{tg}^2 15^\circ}$ ; 4)  $(\cos 75^\circ - \sin 75^\circ)^2$ .

501 1)  $2 \sin \frac{\pi}{8} \cdot \cos \frac{\pi}{8}$ ; 2)  $\cos^2 \frac{\pi}{8} - \sin^2 \frac{\pi}{8}$ ;

3)  $\frac{2 \operatorname{tg} \frac{\pi}{8}}{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\pi}{8}}$ ; 4)  $\frac{\sqrt{2}}{2} - \left( \cos \frac{\pi}{8} + \sin \frac{\pi}{8} \right)^2$ .

502 1)  $2 \sin 75^\circ \cdot \cos 75^\circ$ ; 2)  $\cos^2 75^\circ - \sin^2 75^\circ$ ;

3)  $\frac{6 \operatorname{tg} 75^\circ}{1 - \operatorname{tg}^2 75^\circ}$ ; 4)  $\frac{\operatorname{tg}^2 22^\circ 30' - 1}{\operatorname{tg} 22^\circ 30'}$ .

503 Вычислить  $\sin 2\alpha$ , если:

1)  $\sin \alpha = \frac{3}{5}$  и  $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ ; 2)  $\cos \alpha = -\frac{4}{5}$  и  $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$ .

504 Вычислить  $\cos 2\alpha$ , если:

1)  $\cos \alpha = \frac{4}{5}$ ; 2)  $\sin \alpha = -\frac{3}{5}$ .

505 Вычислить  $\operatorname{tg} 2\alpha$ , если  $\operatorname{tg} \alpha = 0,5$ .

Упростить выражение (506—507).

506 1)  $2 \cos 40^\circ \cdot \cos 50^\circ$ ; 2)  $2 \sin 25^\circ \cdot \sin 65^\circ$ ;

3)  $\sin 2\alpha + (\sin \alpha - \cos \alpha)^2$ ; 4)  $\cos 4\alpha + \sin^2 2\alpha$ .

507 1)  $\frac{\sin 2\alpha}{(\sin \alpha + \cos \alpha)^2 - 1}$ ; 2)  $\frac{1 + \cos 2\alpha}{1 - \cos 2\alpha}$ .

508 Доказать тождество:

1)  $\sin 2\alpha = (\sin \alpha + \cos \alpha)^2 - 1$ ;

2)  $(\sin \alpha - \cos \alpha)^2 = 1 - \sin 2\alpha$ ;

3)  $\cos^4 \alpha - \sin^4 \alpha = \cos 2\alpha$ ;

4)  $2 \cos^2 \alpha - \cos 2\alpha = 1$ .

509 Вычислить  $\sin 2\alpha$ , если:

1)  $\sin \alpha + \cos \alpha = \frac{1}{2}$ ; 2)  $\sin \alpha - \cos \alpha = -\frac{1}{3}$ .

510 Доказать тождество:

$$1) \frac{\cos 2\alpha}{\sin \alpha \cos \alpha + \sin^2 \alpha} = \operatorname{ctg} \alpha - 1; \quad 2) \frac{\sin 2\alpha - 2 \cos \alpha}{\sin \alpha - \sin^2 \alpha} = -2 \operatorname{ctg} \alpha;$$

$$3) \operatorname{tg} \alpha (1 + \cos 2\alpha) = \sin 2\alpha; \quad 4) \frac{1 - \cos 2\alpha + \sin 2\alpha}{1 + \cos 2\alpha + \sin 2\alpha} \cdot \operatorname{ctg} \alpha = 1;$$

$$5) \frac{(1 - 2 \cos^2 \alpha)(2 \sin^2 \alpha - 1)}{4 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha} = \operatorname{ctg}^2 2\alpha;$$

$$6) 1 - 2 \sin^2 \left( \frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2} \right) = \sin \alpha; \quad 7) \frac{\sin \alpha + \sin 2\alpha}{1 + \cos \alpha + \cos 2\alpha} = \operatorname{tg} \alpha.$$

511 Доказать тождество

$$\frac{\sin^2 \alpha}{\cos \alpha (1 + \operatorname{ctg} \alpha)} - \frac{\cos^2 \alpha}{\sin \alpha (1 + \operatorname{tg} \alpha)} = \frac{2\sqrt{2} \sin \left( \alpha - \frac{\pi}{4} \right)}{\sin 2\alpha}.$$

## Задания для самостоятельной работы

### Вариант I

Доказать тождество (1—7).

1.  $\boxed{2}$   $\sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha = 1 - 2 \cos^2 \alpha.$

2.  $\boxed{2}$   $\cos^4 \alpha + \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1.$

3.  $\boxed{3}$   $\frac{\sin^4 \alpha - \cos^4 \alpha}{\sin \alpha - \cos \alpha} = \sin \alpha + \cos \alpha.$

4.  $\boxed{3}$   $\frac{\sin \alpha + \operatorname{tg} \alpha}{1 + \cos \alpha} = \operatorname{tg} \alpha.$

5. Упростите выражения:

а)  $\sin \alpha \cdot \cos \alpha \cdot \operatorname{ctg} \alpha;$

б)  $\operatorname{tg} x \cdot \operatorname{ctg} x - \cos^2 x;$

6 вычислите:

Найдите значение  $\operatorname{tg} \alpha$ , если  $\sin \alpha = -\frac{3}{5}, \frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$ ;

7  $2 \sin \left(-\frac{\pi}{6}\right) + 3 + 7,5 \operatorname{tg}(-\pi) + \frac{1}{8} \cos \frac{3}{2} \pi.$

## Задания для самостоятельной работы

### Вариант I

Доказать тождество (1—7).

1. [2]  $\sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha = 1 - 2 \cos^2 \alpha.$

2. [2]  $\cos^4 \alpha + \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1.$

3. [3]  $\frac{\sin^4 \alpha - \cos^4 \alpha}{\sin \alpha - \cos \alpha} = \sin \alpha + \cos \alpha.$

4. [3]  $\frac{\sin \alpha + \operatorname{tg} \alpha}{1 + \cos \alpha} = \operatorname{tg} \alpha.$       5. [3]  $\frac{\sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha}{\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{ctg} \alpha} = \sin \alpha \cos \alpha.$

6. [5]  $\frac{\sin^4 \alpha + \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} = \frac{1}{\cos^2 \alpha} - 1.$

7. [6]  $\sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{1 - \cos \alpha}} - \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha}} = 2 \operatorname{tg} \alpha$  для  $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}.$

Найти значение выражения (8—10).

8. [6]  $\sin \alpha + \cos \alpha$ , если  $\sin \alpha \cos \alpha = 0,2.$

Доказать тождество (19—20).

20. [7]  $\frac{\sqrt{2} \cos \alpha - 2 \cos\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right)}{2 \sin\left(\frac{\pi}{6} + \alpha\right) - \sqrt{3} \sin \alpha} = -\sqrt{2} \operatorname{tg} \alpha.$

Упростить выражение (13—17).

13. [3]  $\frac{\sin(\alpha - \beta)}{\cos \alpha \cos \beta} + \operatorname{tg} \beta.$

510 Доказать тождество:

$$1) \frac{\cos 2\alpha}{\sin \alpha \cos \alpha + \sin^2 \alpha} = \operatorname{ctg} \alpha - 1; \quad 2) \frac{\sin 2\alpha - 2 \cos \alpha}{\sin \alpha - \sin^2 \alpha} = -2 \operatorname{ctg} \alpha;$$

$$3) \operatorname{tg} \alpha (1 + \cos 2\alpha) = \sin 2\alpha; \quad 4) \frac{1 - \cos 2\alpha + \sin 2\alpha}{1 + \cos 2\alpha + \sin 2\alpha} \cdot \operatorname{ctg} \alpha = 1;$$

$$5) \frac{(1 - 2 \cos^2 \alpha)(2 \sin^2 \alpha - 1)}{4 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha} = \operatorname{ctg}^2 2\alpha;$$

$$6) 1 - 2 \sin^2 \left( \frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2} \right) = \sin \alpha; \quad 7) \frac{\sin \alpha + \sin 2\alpha}{1 + \cos \alpha + \cos 2\alpha} = \operatorname{tg} \alpha.$$

511 Доказать тождество

$$\frac{\sin^2 \alpha}{\cos \alpha (1 + \operatorname{ctg} \alpha)} - \frac{\cos^2 \alpha}{\sin \alpha (1 + \operatorname{tg} \alpha)} = \frac{2\sqrt{2} \sin \left( \alpha - \frac{\pi}{4} \right)}{\sin 2\alpha}.$$

## § 30. Синус, косинус и тангенс половинного угла

### Справочные сведения

$$\cos^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1 + \cos \alpha}{2}, \quad (1) \quad \sin^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1 - \cos \alpha}{2}, \quad (2)$$

$$\operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha}, \quad (3) \quad \sin \alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}, \quad (4)$$

$$\cos \alpha = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}, \quad (5) \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}. \quad (6)$$

**З а м е ч а н и е.** Формулы (3) — (6) справедливы для тех значений аргументов, при которых их левые и правые части имеют смысл.

$$1 + \cos \alpha = 2 \cos^2 \frac{\alpha}{2},$$

$$1 - \cos \alpha = 2 \sin^2 \frac{\alpha}{2}.$$

Вычислить  $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$ , если  $\cos \alpha = 0,8$  и  $\pi < \alpha < 2\pi$ .

► По формуле (7) имеем

$$\operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha} = \frac{1 - 0,8}{1 + 0,8} = \frac{0,2}{1,8} = \frac{1}{9}.$$

По условию  $\pi < \alpha < 2\pi$ , поэтому  $\frac{\pi}{2} < \frac{\alpha}{2} < \pi$  и  $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} < 0$ .

Следовательно,  $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = -\sqrt{\frac{1}{9}} = -\frac{1}{3}$ . ◀

### Примеры с решениями

Вычислить  $\operatorname{tg} 15^\circ$  без помощи таблиц и микрокалькулятора.

**Решение.** Так как  $\operatorname{tg} 15^\circ = \operatorname{tg} \left( \frac{30^\circ}{2} \right)$ , то при вычислении применим формулу (3):

$$\operatorname{tg}^2 15^\circ = \frac{1 - \cos 30^\circ}{1 + \cos 30^\circ} = \frac{1 - \frac{\sqrt{3}}{2}}{1 + \frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{2 - \sqrt{3}}{2 + \sqrt{3}} = \frac{(2 - \sqrt{3})(2 - \sqrt{3})}{(2 + \sqrt{3})(2 - \sqrt{3})} = (2 - \sqrt{3})^2.$$

$$\operatorname{tg} 15^\circ = 2 - \sqrt{3}.$$

**О т в е т.**  $2 - \sqrt{3}$ .

Выполнить понижение степени (1—8).

1.  $\boxed{1}$   $\sin^2 30^\circ$ .      2.  $\boxed{1}$   $\cos^2 27^\circ$ .      3.  $\boxed{1}$   $\operatorname{tg}^2 75^\circ$ .

4.  $\boxed{1}$   $\sin^2 \beta$ .      5.  $\boxed{1}$   $\cos^2 \frac{x}{4}$ .      6.  $\boxed{3}$   $\operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{4}$ .

7.  $\boxed{3}$   $\cos^2 3\alpha$ .      8.  $\boxed{3}$   $\sin^2 \frac{\pi}{14}$ .

Вычислить (9—10).

9.  $\boxed{6}$   $\cos \frac{\pi}{12}$ .      10.  $\boxed{6}$   $\operatorname{tg} \frac{\pi}{8}$ .

### Упражнения

**513** Выразить квадрат синуса (косинуса) заданного угла через косинус угла, в два раза большего:

1)  $\sin^2 15^\circ$ ; 2)  $\cos^2 \frac{1}{4}$ ; 3)  $\cos^2 \left( \frac{\pi}{4} - \alpha \right)$ ; 4)  $\sin^2 \left( \frac{\pi}{4} + \alpha \right)$ .

**514** Найти числовое значение выражения:

1)  $2 \cos^2 \frac{\pi}{8} - 1$ ; 2)  $1 - 2 \sin^2 \frac{\pi}{12}$ ;  
3)  $\frac{\sqrt{3}}{2} + 2 \sin^2 15^\circ$ ; 4)  $-\frac{\sqrt{3}}{2} + 2 \cos^2 15^\circ$ .

**515** Пусть  $\cos \alpha = 0,6$  и  $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ . Вычислить:

1)  $\sin \frac{\alpha}{2}$ ; 2)  $\cos \frac{\alpha}{2}$ ; 3)  $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$ ; 4)  $\operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2}$ .

**516** Пусть  $\sin \alpha = \frac{3}{5}$  и  $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ . Вычислить:

1)  $\sin \frac{\alpha}{2}$ ; 2)  $\cos \frac{\alpha}{2}$ ; 3)  $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$ ; 4)  $\operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2}$ .

**517** Вычислить:

1)  $\sin 15^\circ$ ; 2)  $\cos 15^\circ$ ; 3)  $\operatorname{tg} 22^\circ 30'$ ; 4)  $\operatorname{ctg} 22^\circ 30'$ .

**518** Упростить выражение:

1)  $\frac{1 - \cos \alpha}{\sin \alpha}$ ; 2)  $\frac{\sin \alpha}{1 + \cos \alpha}$ ; 3)  $\frac{1 - \cos 2\alpha + \sin 2\alpha}{1 + \cos 2\alpha + \sin 2\alpha}$ ;  
4)  $\frac{1 + \cos 4\alpha}{\sin 4\alpha}$ ; 5)  $\frac{1 + \cos 2\alpha + \sin 2\alpha}{\sin \alpha + \cos \alpha}$ ;  
6)  $(1 - \cos 2\alpha) \operatorname{ctg} \alpha$ .

Доказать тождество (519—520).

**519** 1)  $2 \cos^2 \left( \frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2} \right) = 1 + \sin \alpha$ ; 2)  $2 \sin^2 \left( \frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2} \right) = 1 - \sin \alpha$ ;

3)  $\frac{3 - 4 \cos 2\alpha + \cos 4\alpha}{3 + 4 \cos 2\alpha + \cos 4\alpha} = \operatorname{tg}^4 \alpha$ ; 4)  $\frac{1 + \sin 2\alpha + \cos 2\alpha}{1 + \sin 2\alpha - \cos 2\alpha} = \operatorname{ctg} \alpha$ .

**520** 1)  $\frac{1 - \cos 2\alpha}{\sin 2\alpha} \cdot \operatorname{ctg} \alpha = 1$ ;

2)  $\frac{\sin 2\alpha}{1 + \cos 2\alpha} = \operatorname{tg} \alpha$ ;

3)  $\frac{1 - 2 \sin^2 \alpha}{1 + \sin 2\alpha} = \frac{1 - \operatorname{tg} \alpha}{1 + \operatorname{tg} \alpha}$ ;

4)  $\frac{1 + \sin 2\alpha}{\cos 2\alpha} = \operatorname{tg} \left( \frac{\pi}{4} + \alpha \right)$ .

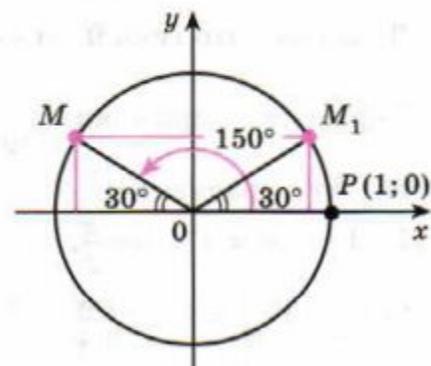
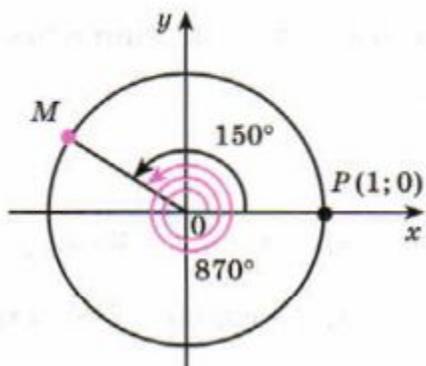
Таблицы значений синуса, косинуса, тангенса и котангенса составляются для углов от  $0^\circ$  до  $90^\circ$  (или от 0 до  $\frac{\pi}{2}$ ). Это объясняется тем, что их значения для остальных углов сводятся к значениям для острых углов.

**Задача** Вычислить  $\sin 870^\circ$  и  $\cos 870^\circ$ .

▶ Заметим, что  $870^\circ = 2 \cdot 360^\circ + 150^\circ$ . Следовательно, при повороте точки  $P(1; 0)$  вокруг начала координат на  $870^\circ$  точка совершит два полных оборота и ещё повернётся на угол  $150^\circ$ , т. е. получится та же самая точка  $M$ , что и при повороте на  $150^\circ$  (рис. 66). Поэтому  $\sin 870^\circ = \sin 150^\circ$ ,  $\cos 870^\circ = \cos 150^\circ$ .

Построим точку  $M_1$ , симметричную точке  $M$  относительно оси  $OY$  (рис. 67). Ординаты точек  $M$  и  $M_1$  одинаковы, а абсциссы различаются только знаком. Поэтому  $\sin 150^\circ = \sin 30^\circ = \frac{1}{2}$ ,  $\cos 150^\circ = -\cos 30^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ .

**Ответ**  $\sin 870^\circ = \frac{1}{2}$ ,  $\cos 870^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ . ◁



При решении задачи 1 использовались равенства

$$\begin{aligned} \sin(2 \cdot 360^\circ + 150^\circ) &= \sin 150^\circ, \\ \cos(2 \cdot 360^\circ + 150^\circ) &= \cos 150^\circ, \end{aligned} \quad (1)$$

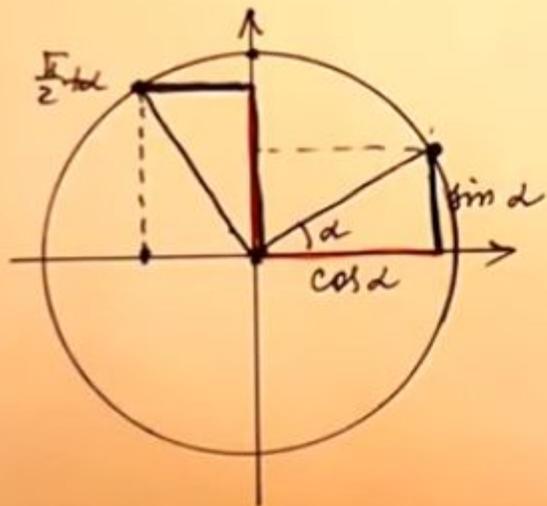
$$\begin{aligned} \sin(180^\circ - 30^\circ) &= \sin 30^\circ, \\ \cos(180^\circ - 30^\circ) &= -\cos 30^\circ. \end{aligned} \quad (2)$$

Формулы приведения запоминать необязательно. Для того чтобы записать любую из них, можно руководствоваться следующими правилами:

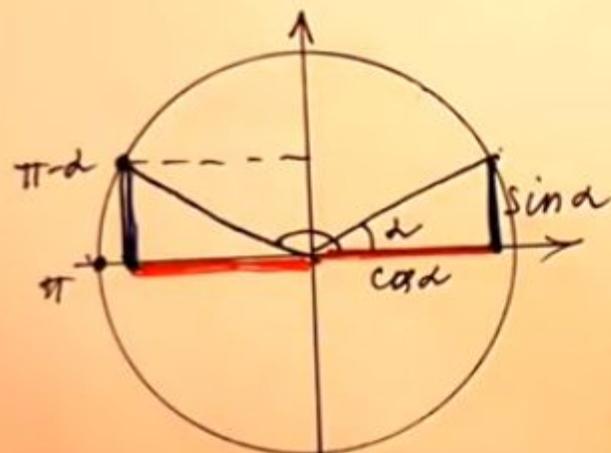
- 1) В правой части формулы ставится тот знак, который имеет левая часть при условии  $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ .
- 2) Если в левой части угол равен  $\frac{\pi}{2} \pm \alpha$  или  $\frac{3\pi}{2} \pm \alpha$ , то синус заменяется на косинус, косинус — на синус, тангенс — на котангенс, котангенс — на тангенс. Если угол равен  $\pi \pm \alpha$ , то замены не происходит.

# Формулы приведения тригонометрических функций

$\alpha$	$\frac{\pi}{2} - \alpha$ $90^\circ - \alpha$	$\frac{\pi}{2} + \alpha$ $90^\circ + \alpha$	$\pi - \alpha$ $180^\circ - \alpha$	$\pi + \alpha$ $180^\circ + \alpha$	$\frac{3\pi}{2} - \alpha$ $270^\circ - \alpha$	$\frac{3\pi}{2} + \alpha$ $270^\circ + \alpha$	$2\pi - \alpha$ $360^\circ - \alpha$	$2\pi + \alpha$ $360^\circ + \alpha$
$\sin \alpha$	$\cos \alpha$	$\cos \alpha$	$\sin \alpha$	$-\sin \alpha$	$-\cos \alpha$	$-\cos \alpha$	$-\sin \alpha$	$\sin \alpha$
$\cos \alpha$	$\sin \alpha$	$-\sin \alpha$	$-\cos \alpha$	$-\cos \alpha$	$-\sin \alpha$	$\sin \alpha$	$\cos \alpha$	$\cos \alpha$
$\operatorname{tg} \alpha$	$\operatorname{ctg} \alpha$	$-\operatorname{ctg} \alpha$	$-\operatorname{tg} \alpha$	$\operatorname{tg} \alpha$	$\operatorname{ctg} \alpha$	$-\operatorname{ctg} \alpha$	$-\operatorname{tg} \alpha$	$\operatorname{tg} \alpha$
$\operatorname{ctg} \alpha$	$\operatorname{tg} \alpha$	$-\operatorname{tg} \alpha$	$-\operatorname{ctg} \alpha$	$\operatorname{ctg} \alpha$	$\operatorname{tg} \alpha$	$-\operatorname{tg} \alpha$	$-\operatorname{ctg} \alpha$	$\operatorname{ctg} \alpha$



$$\begin{aligned} \cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) &= -\sin \alpha \\ \sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) &= +\cos \alpha \\ \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) &= \frac{\cos \alpha}{-\sin \alpha} = -\operatorname{ctg} \alpha \\ \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) &= -\operatorname{tg} \alpha \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} \cos(\pi - \alpha) &= -\cos \alpha \\ \sin(\pi - \alpha) &= \sin \alpha \\ \operatorname{tg}(\pi - \alpha) &= \frac{\sin \alpha}{-\cos \alpha} = -\operatorname{tg} \alpha \\ \operatorname{ctg}(\pi - \alpha) &= -\frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = -\operatorname{ctg} \alpha \end{aligned}$$

Вычислить  $\cos \frac{15\pi}{4}$ .

$$\cos \frac{15\pi}{4} = \cos \left(4\pi - \frac{\pi}{4}\right) = \cos \left(-\frac{\pi}{4}\right) = \cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Вычислить: 1)  $\operatorname{tg} \frac{11\pi}{3}$ ; 2)  $\operatorname{tg} \frac{13\pi}{4}$ .

- 1)  $\operatorname{tg} \frac{11\pi}{3} = \operatorname{tg} \left(4\pi - \frac{\pi}{3}\right) = \operatorname{tg} \left(-\frac{\pi}{3}\right) = -\operatorname{tg} \frac{\pi}{3} = -\sqrt{3}.$
- 2)  $\operatorname{tg} \frac{13\pi}{4} = \operatorname{tg} \left(3\pi + \frac{\pi}{4}\right) = \operatorname{tg} \frac{\pi}{4} = 1. \triangleleft$

524 Найти значение острого угла  $\alpha$ , если:

- 1)  $\cos 75^\circ = \cos (90^\circ - \alpha)$ ;      2)  $\sin 150^\circ = \sin (90^\circ + \alpha)$ ;  
3)  $\sin 150^\circ = \sin (180^\circ - \alpha)$ ;      4)  $\cos 310^\circ = \cos (270^\circ + \alpha)$ ;  
5)  $\sin \frac{5}{4} \pi = \sin (\pi + \alpha)$ ;      6)  $\operatorname{tg} \frac{\pi}{5} = \operatorname{tg} \left( \frac{\pi}{2} - \alpha \right)$ ;  
7)  $\cos \frac{7\pi}{4} = \cos \left( \frac{3}{2} \pi + \alpha \right)$ ;      8)  $\operatorname{ctg} \frac{11}{6} \pi = \operatorname{ctg} (2\pi - \alpha)$ .

Вычислить с помощью формулы приведения (525—526).

- 525 1)  $\cos 150^\circ$ ;    2)  $\sin 135^\circ$ ;    3)  $\operatorname{ctg} 135^\circ$ ;    4)  $\cos 120^\circ$ ;  
5)  $\cos 225^\circ$ ;    6)  $\sin 210^\circ$ ;    7)  $\operatorname{ctg} 240^\circ$ ;    8)  $\sin 315^\circ$ .
- 526 1)  $\operatorname{tg} \frac{5\pi}{4}$ ;    2)  $\sin \frac{7\pi}{6}$ ;    3)  $\cos \frac{5\pi}{3}$ ;    4)  $\operatorname{ctg} \frac{5\pi}{3}$ ;  
5)  $\sin \left( -\frac{13\pi}{6} \right)$ ;    6)  $\cos \left( -\frac{7\pi}{3} \right)$ ;    7)  $\operatorname{tg} \left( -\frac{2\pi}{3} \right)$ ;    8)  $\operatorname{ctg} \left( -\frac{7\pi}{4} \right)$ .

531 Вычислить:

- 1)  $\cos \frac{23\pi}{4} - \sin \frac{15\pi}{4} - \operatorname{ctg} \left( -\frac{11\pi}{2} \right)$ ;  
2)  $\sin \frac{25\pi}{3} - \cos \left( -\frac{17\pi}{2} \right) - \operatorname{tg} \frac{10\pi}{3}$ ;  
3)  $\sin (-7\pi) - 2 \cos \frac{31\pi}{3} - \operatorname{tg} \frac{7\pi}{4}$ ;  
4)  $\cos (-9\pi) + 2 \sin \left( -\frac{49\pi}{6} \right) - \operatorname{ctg} \left( -\frac{21\pi}{4} \right)$ .

Доказать тождество (532—533).

- 532 1)  $\sin \left( \frac{\pi}{4} + \alpha \right) - \cos \left( \frac{\pi}{4} - \alpha \right) = 0$ ;  
2)  $\cos \left( \frac{\pi}{6} - \alpha \right) - \sin \left( \frac{\pi}{3} + \alpha \right) = 0$ ;  
3)  $\frac{\sin \left( \frac{3\pi}{2} - \alpha \right)}{\operatorname{tg} (\pi + \alpha)} \cdot \frac{\operatorname{ctg} \left( \frac{\pi}{2} + \alpha \right)}{\operatorname{tg} \left( \alpha - \frac{3\pi}{2} \right)} = -\sin \alpha$ .

Упростить выражение (527—528).

- 527 1)  $\frac{\operatorname{ctg} \left( \frac{\pi}{2} - \alpha \right) - \operatorname{tg} (\pi + \alpha) + \sin \left( \frac{3\pi}{2} - \alpha \right)}{\cos (\pi + \alpha)}$ ;  
2)  $\frac{\sin (\pi - \alpha) + \cos \left( \frac{\pi}{2} + \alpha \right) + \operatorname{ctg} (\pi - \alpha)}{\operatorname{tg} \left( \frac{3\pi}{2} - \alpha \right)}$ .
- 528 1)  $\frac{\sin \left( \frac{3\pi}{2} + \alpha \right)}{\operatorname{ctg} (2\pi - \alpha)} \cdot \frac{\operatorname{tg} \left( \frac{\pi}{2} + \alpha \right)}{\sin (\pi + \alpha)}$ ;  
2)  $\frac{\sin^2 (\pi + \alpha) + \sin^2 \left( \frac{\pi}{2} + \alpha \right)}{\cos \left( \frac{3\pi}{2} + \alpha \right)} \cdot \operatorname{ctg} \left( \frac{3\pi}{2} - \alpha \right)$ .

529 Вычислить:

- 1)  $\cos 750^\circ$ ;    2)  $\sin 1140^\circ$ ;    3)  $\operatorname{tg} 405^\circ$ ;    4)  $\cos 840^\circ$ ;  
5)  $\sin \frac{47\pi}{6}$ ;    6)  $\operatorname{tg} \frac{25\pi}{4}$ ;    7)  $\operatorname{ctg} \frac{27\pi}{4}$ ;    8)  $\cos \frac{21\pi}{4}$ .

530 Найти значение выражения:

- 1)  $\cos 630^\circ - \sin 1470^\circ - \operatorname{ctg} 1125^\circ$ ;  
2)  $\operatorname{tg} 1800^\circ - \sin 495^\circ + \cos 945^\circ$ ;  
3)  $3 \cos 3660^\circ + \sin (-1560^\circ) + \cos (-450^\circ)$ ;  
4)  $\cos 4455^\circ - \cos (-945^\circ) + \operatorname{tg} 1035^\circ - \operatorname{ctg} (-1500^\circ)$ .

# Формулы суммы и разности СИНУСОВ (КОСИНУСОВ)

$$\sin x + \sin y = 2 \sin \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2}$$

$$\sin x - \sin y = 2 \sin \frac{x-y}{2} \cos \frac{x+y}{2}$$

$$\cos x + \cos y = 2 \cos \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2}$$

$$\cos x - \cos y = -2 \sin \frac{x+y}{2} \sin \frac{x-y}{2}$$

$$\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y = \frac{\sin(x+y)}{\cos x \cdot \cos y}$$

$$\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} y = \frac{\sin(x-y)}{\cos x \cdot \cos y}$$

Преобразование произведения синусов и косинусов в сумму  
(разность):

$$\sin \alpha \cos \beta = \frac{\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)}{2}, \quad (5)$$

$$\cos \alpha \cos \beta = \frac{\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)}{2}, \quad (6)$$

$$\sin \alpha \sin \beta = \frac{\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)}{2}. \quad (7)$$

**Задача 2** Вычислить  $\sin 75^\circ + \cos 75^\circ$ .

$$\begin{aligned} \blacktriangleright \sin 75^\circ + \cos 75^\circ &= \sin 75^\circ + \sin 15^\circ = \\ &= 2 \sin \frac{75^\circ + 15^\circ}{2} \cos \frac{75^\circ - 15^\circ}{2} = 2 \sin 45^\circ \cos 30^\circ = \\ &= 2 \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{6}}{2}. \quad \triangleleft \end{aligned}$$

**Задача 3** Преобразовать в произведение  $2 \sin \alpha + \sqrt{3}$ .

$$\begin{aligned} \blacktriangleright 2 \sin \alpha + \sqrt{3} &= 2 \left( \sin \alpha + \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = 2 \left( \sin \alpha + \sin \frac{\pi}{3} \right) = \\ &= 4 \sin \left( \frac{\alpha + \frac{\pi}{6}}{2} \right) \cos \left( \frac{\alpha - \frac{\pi}{6}}{2} \right). \quad \triangleleft \end{aligned}$$

### Упражнения

**537** Упростить выражение:

$$\begin{aligned} 1) \sin \left( \frac{\pi}{3} + \alpha \right) + \sin \left( \frac{\pi}{3} - \alpha \right); & \quad 2) \cos \left( \frac{\pi}{4} - \beta \right) - \cos \left( \frac{\pi}{4} + \beta \right); \\ 3) \sin^2 \left( \frac{\pi}{4} + \alpha \right) - \sin^2 \left( \frac{\pi}{4} - \alpha \right); & \quad 4) \cos^2 \left( \alpha - \frac{\pi}{4} \right) - \cos^2 \left( \alpha + \frac{\pi}{4} \right). \end{aligned}$$

**538** Вычислить:

$$\begin{aligned} 1) \cos 105^\circ + \cos 75^\circ; & \quad 2) \sin 105^\circ - \sin 75^\circ; \\ 3) \cos \frac{11\pi}{12} + \cos \frac{5\pi}{12}; & \quad 4) \cos \frac{11\pi}{12} - \cos \frac{5\pi}{12}; \\ 5) \sin \frac{7\pi}{12} - \sin \frac{\pi}{12}; & \quad 6) \sin 105^\circ + \sin 165^\circ. \end{aligned}$$

**539** Преобразовать в произведение:

$$1) 1 + 2 \sin \alpha; \quad 2) 1 - 2 \sin \alpha; \quad 3) 1 + 2 \cos \alpha; \quad 4) 1 + \sin \alpha.$$

**540** Доказать тождество:

$$1) \frac{\sin \alpha + \sin 3\alpha}{\cos \alpha + \cos 3\alpha} = \operatorname{tg} 2\alpha; \quad 2) \frac{\sin 2\alpha + \sin 4\alpha}{\cos 2\alpha - \cos 4\alpha} = \operatorname{ctg} \alpha.$$

**541** Упростить выражение:

$$1) \frac{2(\cos \alpha + \cos 3\alpha)}{2 \sin 2\alpha + \sin 4\alpha}; \quad 2) \frac{1 + \sin \alpha - \cos 2\alpha - \sin 3\alpha}{2 \sin^2 \alpha + \sin \alpha - 1}.$$

**542** Доказать тождество:

$$\begin{aligned} 1) \cos^4 \alpha - \sin^4 \alpha + \sin 2\alpha &= \sqrt{2} \cos \left( 2\alpha - \frac{\pi}{4} \right); \\ 2) \cos \alpha + \cos \left( \frac{2\pi}{3} + \alpha \right) + \cos \left( \frac{2\pi}{3} - \alpha \right) &= 0; \\ 3) \frac{\sin 2\alpha + \sin 5\alpha - \sin 3\alpha}{\cos \alpha + 1 - 2 \sin^2 2\alpha} &= 2 \sin \alpha. \end{aligned}$$

Вычислить без таблиц:

$$1) \sin \frac{\pi}{12} \cos \frac{5\pi}{12}; \quad 2) \operatorname{tg} \frac{\pi}{6} \operatorname{tg} \frac{\pi}{8} \operatorname{tg} \frac{3\pi}{8} \operatorname{tg} \frac{7\pi}{16}.$$

## Самостоятельная работа

Вычислить с помощью формул приведения (1—2).

1. [2]  $\sin 225^\circ + \cos 330^\circ + \operatorname{ctg} 510^\circ$ .

2. [3]  $\sin \frac{17\pi}{6} + \cos \frac{14\pi}{3} - \operatorname{tg} \frac{13\pi}{4}$ .

3. [4] Определить знак числового выражения

$$\frac{\sin 300^\circ \operatorname{tg} 200^\circ \cos 100^\circ}{\cos 2}$$

Преобразовать в произведение (13—22).

13. [3]  $\frac{\cos 20^\circ - \sin 20^\circ}{\sin 65^\circ + \cos 65^\circ}$ .

14. [5]  $\sin 10^\circ + 2 \sin 5^\circ \cos 15^\circ + \cos 50^\circ$ .

15. [2]  $\cos \alpha + \cos 3\alpha$ .      16. [2]  $\sin \alpha + \cos \alpha$ .

17. [5]  $1 - \sqrt{2} \cos \alpha$ .      18. [5]  $\operatorname{tg} \alpha + \sqrt{3}$ .

Упростить выражение:

1)  $\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)$ ;

2)  $\frac{\cos(\pi - \alpha) + \cos\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right)}{1 + 2 \cos(-\alpha) \sin(-\alpha)}$ .

### Вариант I

1. Вычислить:

1)  $\cos 765^\circ$ ;      2)  $\sin \frac{19\pi}{6}$ .

2. Вычислить  $\sin \alpha$ , если  $\cos \alpha = \frac{5}{13}$  и  $-6\pi < \alpha < -5\pi$ .

3. Упростить выражение:

1)  $\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)$ ;      2)  $\frac{\cos(\pi - \alpha) + \cos\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right)}{1 + 2\cos(-\alpha)\sin(-\alpha)}$ .

---

---

4. Решить уравнение:

1)  $2\cos \frac{x}{2} = 1 + \cos x$ ;

2)  $\sin\left(\frac{\pi}{2} - 3x\right)\cos 2x - 1 = \sin 3x \cos\left(\frac{3\pi}{2} - 2x\right)$ .

5. Доказать тождество  $\cos 4\alpha + 1 = \frac{1}{2} \sin 4\alpha (\operatorname{ctg} \alpha - \operatorname{tg} \alpha)$ .

### Вариант II

1. Вычислить:

1)  $\sin 765^\circ$ ;      2)  $\cos \frac{19\pi}{6}$ .

2. Вычислить  $\cos \alpha$ , если  $\sin \alpha = 0,3$  и  $-\frac{7\pi}{2} < \alpha < -\frac{5\pi}{2}$ .

3. Упростить выражение:

1)  $\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)$ ;      2)  $\frac{\cos\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) + \cos(\pi + \alpha)}{2\sin\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right)\cos(-\alpha) + 1}$ .

---

---

4. Решить уравнение:

1)  $2\sin \frac{x}{2} = 1 - \cos x$ ;

2)  $\cos\left(\frac{3\pi}{2} + x\right)\cos 3x - \cos(\pi - x)\sin 3x = -1$ .

5. Доказать тождество  $(\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{ctg} \alpha)(1 - \cos 4\alpha) = 4 \sin 2\alpha$ .



Пусть  $|a| \leq 1$ ,  $\arccos a$  — такое число из отрезка  $[0; \pi]$ , косинус которого равен  $a$ .

$$\cos x = a$$

Говоря иначе:

$$\arccos a = x \Rightarrow \cos x = a, |a| \leq 1, x \in [0; \pi].$$

корни уравнения выражаются формулой  $x = \pm \arccos a + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$ .

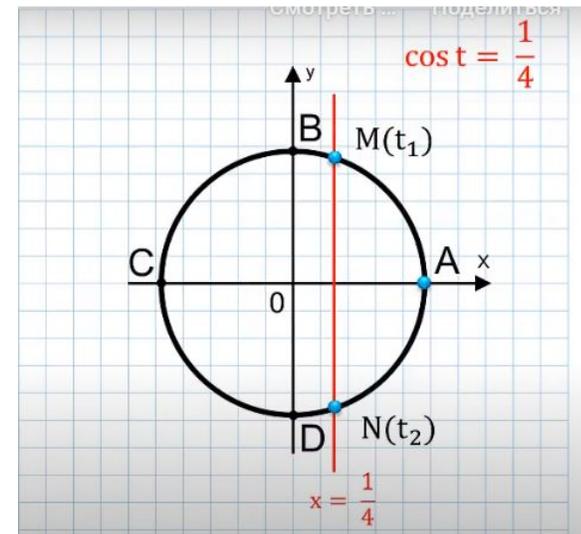
Частные случаи:

1.  $\cos x = 0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z};$

2.  $\cos x = 1 \Rightarrow x = 2\pi k, k \in \mathbb{Z};$

3.  $\cos x = -1 \Rightarrow x = \pi + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}.$

Если  $\cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ , то  $\arccos \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\pi}{4}$ .



$$t_1 = \arccos \frac{1}{4};$$

$$t_2 = -\arccos \frac{1}{4};$$

$$t = \arccos \frac{1}{4} + 2\pi k;$$

$$t = -\arccos \frac{1}{4} + 2\pi k;$$

$$t = \pm \arccos \frac{1}{4} + 2\pi k.$$

Пример 1. Вычислить  $\arccos \frac{\sqrt{3}}{2}$ .

---

Решение.

$$\arccos \frac{\sqrt{3}}{2} = t; \Rightarrow \cos t = \frac{\sqrt{3}}{2}, t \in [0; \pi];$$

$$\cos t = \frac{\sqrt{3}}{2}; \quad t = \frac{\pi}{6}; \quad \cos \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2};$$

Пример 3. Вычислить  $\cos t = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ .

---

Решение.

$$t = \pm \arccos \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + 2\pi k;$$

$$\arccos \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \pi - \arccos \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4};$$

$$t = \pm \frac{3\pi}{4} + 2\pi k;$$

Вычислить (568—569).

- 568 1)  $\arccos 0$ ;      2)  $\arccos 1$ ;      3)  $\arccos \frac{\sqrt{2}}{2}$ ;  
 4)  $\arccos \frac{1}{2}$ ;      5)  $\arccos \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ ;      6)  $\arccos \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ .
- 569 1)  $2 \arccos 0 + 3 \arccos 1$ ;      2)  $3 \arccos (-1) - 2 \arccos 0$ ;  
 3)  $12 \arccos \frac{\sqrt{3}}{2} - 3 \arccos \left(-\frac{1}{2}\right)$ ;  
 4)  $4 \arccos \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + 6 \arccos \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ .

171

Решить уравнение (571—573).

- 571 1)  $\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ;      2)  $\cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ ;      3)  $\cos x = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ ;  
 572 1)  $\cos x = \frac{3}{4}$ ;      2)  $\cos x = -0,3$ ;      3)  $\cos x = -\frac{\sqrt{3}}{3}$ ;  
 573 1)  $\cos 4x = 1$ ;      2)  $\cos 2x = -1$ ;      3)  $\sqrt{2} \cos \frac{x}{4} = -1$ ;  
 4)  $2 \cos \frac{x}{3} = \sqrt{3}$ ;      5)  $\cos \left(x + \frac{\pi}{3}\right) = 0$ ;      6)  $\cos \left(2x - \frac{\pi}{4}\right) = 0$ .
- 574 1)  $\cos x \cos 3x = \sin 3x \sin x$ ;  
 2)  $\cos 2x \cos x + \sin 2x \sin x = 0$ .
- 575 Выяснить, имеет ли смысл выражение:  
 1)  $\arccos(\sqrt{6} - 3)$ ;      2)  $\arccos(\sqrt{7} - 2)$ ;      3)  $\arccos(2 - \sqrt{10})$ ;  
 4)  $\arccos(1 - \sqrt{5})$ ;      5)  $\operatorname{tg} \left(3 \arccos \frac{1}{2}\right)$ .
- 576 Решить уравнение:  
 1)  $\cos^2 2x = 1 + \sin^2 2x$ ;      2)  $4 \cos^2 x = 3$ ;  
 3)  $2 \cos^2 x = 1 + 2 \sin^2 x$ ;      4)  $2\sqrt{2} \cos^2 x = 1 + \sqrt{2}$ ;  
 5)  $(1 + \cos x)(3 - 2 \cos x) = 0$ ;  
 6)  $(1 - \cos x)(4 + 3 \cos 2x) = 0$ ;  
 7)  $(1 + 2 \cos x)(1 - 3 \cos x) = 0$ ;  
 8)  $(1 - 2 \cos x)(2 + 3 \cos x) = 0$ .

580 Доказать, что при всех значениях  $a$ , таких, что  $-1 \leq a \leq 1$ , выполняется равенство  $\cos(\arccos a) = a$ . Вычислить:

- 1)  $\cos(\arccos 0,2)$ ;      2)  $\cos \left(\arccos \left(-\frac{2}{3}\right)\right)$ ;

172

$$3) \cos\left(\pi + \arccos \frac{3}{4}\right); \quad 4) \sin\left(\frac{\pi}{2} + \arccos \frac{1}{3}\right);$$

$$5) \sin\left(\arccos \frac{4}{5}\right); \quad 6) \operatorname{tg}\left(\arccos \frac{3}{\sqrt{10}}\right).$$

**581** Доказать, что  $\arccos(\cos \alpha) = \alpha$  при  $0 \leq \alpha \leq \pi$ . Вычислить:

$$1) 5 \arccos\left(\cos \frac{\pi}{10}\right); \quad 2) 3 \arccos(\cos 2);$$

$$3) \arccos\left(\cos \frac{8\pi}{7}\right); \quad 4) \arccos(\cos 4).$$

**582** Вычислить:

$$1) \sin\left(\arccos \frac{1}{3} + \arccos \frac{2\sqrt{2}}{3}\right); \quad 2) \cos\left(\arccos \frac{4}{5} - \arccos \frac{3}{5}\right).$$