Секрет обучения заключается в уважении к ученику (Ральф Эмерсон).

Линейная алгебра

Лекция 3

Агаев Рафиг Пашаевич

(доктор физико-математических наук)

План лекции 3

Определитель и его свойства (продолжение)

Применение определителей

Невырожденные матрицы

Решение сист. лин. уравнений с помощью обратной матрицы для невырожденного случая

Снова о ранге матрицы

Правило (формула) Крамера

Одна геометрическая интерпретация

- Рассмотрим геометрическую интерпретацию определителей второго порядка:

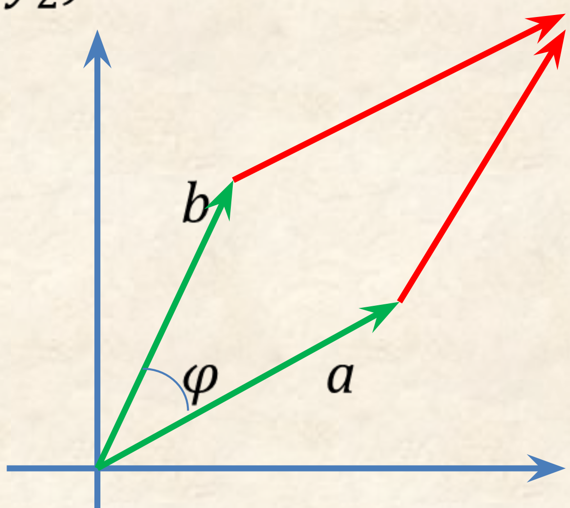
$$\det A = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} = x_1 y_2 - y_1 x_2.$$

Рассмотрим два вектора: $a = (x_1, y_1)$; $b = (x_2, y_2)$

Площадь S параллелограмма равна

$$S = |a||b| \sin\varphi = |a||b|\sqrt{1 - \cos^2\varphi} = |a||b|\sqrt{1 - \frac{(a,b)^2}{|a|^2|b|^2}}.$$

$$S^2 = |a|^2|b|^2 - (a,b)^2 =$$
$$= (x_1^2 + y_1^2)(x_2^2 + y_2^2) - (x_1^2 x_2^2 + y_1^2 y_2^2 + 2x_1 y_1 x_2 y_2) =$$
$$= x_1^2 x_2^2 + x_1^2 y_2^2 + x_1^2 y_2^2 + y_1^2 x_2^2 -$$
$$-x_1^2 x_2^2 - y_1^2 y_2^2 - 2x_1 y_1 x_2 y_2 = (x_1 y_2 - y_1 x_2)^2 =$$
$$= |\det A|^2.$$



Доказали, что $|S| = |x_1 y_2 - y_1 x_2| = |\det A|$

Все-таки, для чего нужен определитель?

- Определитель играет ключевую роль при вычислении обратных матриц (для невырожденных матриц) и решении системы линейных уравнений.

Известно, что уравнение $ax = b$ при $a \neq 0$ имеет единственное решение: $x = a^{-1}b$;

А теперь рассмотрим систему линейных уравнений (СЛУ)

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n. \end{cases}$$

Эту систему можно записать в матричной форме

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b},$$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11}\, a_{12} \cdots a_{1n} \\ a_{21}\, a_{22} \cdots a_{2n} \\ \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\ a_{n1}\, a_{n2} \cdots a_{nn} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{bmatrix}.$$

Определитель и обратная матрица

- Возникает вопрос? Какое решение СЛУ соответствует решению $x = a^{-1}b$.

Определение 1. Квадратная матрица A называется обратимой, если существует матрица X, такая, что $XA = AX = I$. Матрицу X обозначают через A^{-1}, т.е. $A^{-1}A = AA^{-1} = I$.

Замечание. Если A^{-1} – обратная к A, то A тоже обратная к A^{-1} и поэтому определение 1 можно заменить на следующее: матрица A называется обратимой, если существует матрица X, такая, что $XA = I$.

Определение 2. Квадратная матрица A называется невырожденной (или неособенной) , если она имеет обратную матрицу. В противном случае матрицу называют вырожденной (или особенной).

Определение 2'. (эквивалентное определение невырожденности). Квадратная матрица A называется невырожденной , если в вектор **0** переводится только **0**, т.е. из A ·**x**=**0** следует **x**=**0**. В противном случае матрица называется вырожденной (или сингулярной).

Теорема 1. Если матрица A обратимая (имеет обратную матрицу), то ее обратная матрица A^{-1} единственная.

Доказательство. Пусть наоборот, матрица A обратима и X и Y – ее обратные матрицы, т.е. $XA = AX = I$ и $AY = YA = I$. Тогда $X = XI = XAY = IY = Y$.

Определитель и обратная матрица

• Вернемся к нашей системе:

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b}. \qquad (1)$$

Вспомним уравнения $ax = b$: если имеет смысл a^{-1} $(a \neq 0)$, то уравнение имеет единственное решение: $x = a^{-1}b$.

Если матрица A коэффициентов системы (1) обратимая, то решение - единственное и однозначно определяется как:

$$\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b}. \qquad (2)$$

Вопрос? Имеет ли каждая квадратная матрица обратную матрицу? Если нет, то в каком случае она есть, или ее нет!

Рассмотрим систему (к вычислению A^{-1} мы еще вернемся)

$$\begin{cases} u + 2v = 4 \\ u + 3v = 5. \end{cases}$$

Здесь, $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$, $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \end{bmatrix}$,

$$\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}. \qquad (3)$$

Определитель и обратная матрица

- А теперь рассмотрим систему

$$\begin{cases} u + 2v = 4 \\ 2u + 4v = 8. \end{cases} \qquad (4)$$

Здесь, $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$.

Вопрос? Имеет ли данная матрица A обратную? Пусть

$$B = A^{-1} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}.$$

Тогда должно быть

$$BA = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_{11} + 2b_{12} & 2b_{11} + 4b_{12} \\ b_{21} + 2b_{22} & 2b_{21} + 4b_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \text{ т.е.}$$

$$\begin{cases} b_{11} + 2b_{12} = 1 \\ 2b_{11} + 4b_{12} = 0 \\ b_{21} + 2b_{22} = 0 \\ 2b_{21} + 4b_{22} = 1. \end{cases}$$

Поскольку первые 2 уравнения, третье и четвертое уравнения несовместны, такой матрицы $B = A^{-1}$ не может быть.

Матрица A системы (4) имеет ранг меньше его порядка и для нее нет обратной матрицы.

Определитель и обратная матрица

Рассмотрим квадратную матрицу A. Заменим ее элементы на их алгебраические дополнения и затем перейдем к транспонированной матрице $B = \left[b_{ij}\right]$. Последняя определяется соотношениями

$$b_{ij} = (-1)^{i+j} \det M_{ji} \qquad (1)$$

Матрицу $B = \left[b_{ij}\right]$ обозначают $\operatorname{adj} A$ и называют **присоединенной** матрицей для A.

Внимание! b_{ij} равно $(-1)^{i+j} \det M_{ji}$, а не $(-1)^{i+j} \det M_{ij}$.

Вспомним разложение Лапласа, т.е. формулу

$$\det A = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det M_{ij} =.$$

Правая сторона есть произведение i-й строки A на j-й столбец матрицы $\operatorname{adj} A = B$:

$$a_{i1}(-1)^{i+1} \det M_{i1} + a_{i2}(-1)^{i+2} \det M_{i2} + \ldots + a_{in}(-1)^{i+n} \det M_{in} = \det A$$

или же с учетом (1)

$$(a_{i1}\ \ a_{i2}\ \ \ldots a_{in})\,(b_{1i}\ \ b_{2i} \ldots b_{ni})^{\mathrm{T}} = \det A. \qquad (2)$$

Определитель и обратная матрица

С другой стороны, мы уже знаем, что

$$\text{если } j \neq i, \text{ то} \quad (a_{j1} \ a_{j2} \ \dots a_{jn})(b_{1i} \ b_{2i} \dots b_{ni})^{\mathrm{T}} = 0. \qquad (3).$$

Потому, что это определитель матрицы с двумя одинаковыми строками. (3) – определитель матрицы, где *i*-я строка заменена на *j*-ю.

Из (2) и (3) мы получим

$$A \cdot B = A \cdot (\operatorname{adj} A) = I \cdot \det A,$$

или же

$$A \cdot B \frac{1}{\det A} = A \cdot (\operatorname{adj} A) \cdot \frac{1}{\det A} = I. \qquad (4)$$

Получается, что $(\operatorname{adj} A)\frac{1}{\det A}$ является обратной к матрице A.

Поскольку обратная матрица единственная, имеет место

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot (\operatorname{adj} A) \qquad (5).$$

Формулой (5) вычисляют обратную матрицу к матрице A.

Замечание. Из (4) следует, что $\det B = (\det A)^{n-1}$

Определитель и обратная матрица

- **Пример 1.** Пусть $A = \begin{pmatrix} 7 & 4 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$. Вычислим обратную матрицу A^{-1}.

1) Для каждого элемента матрицы вычислим его алгебраическое дополнение:

$M_{11} = (-1)^{1+1} \cdot 3 = 3;\ M_{12} = (-1)^{1+2} \cdot 5 = -5;$

$M_{21}(-1)^{2+1} \cdot 4 = -4; M_{22} = (-1)^{2+2} \cdot 7 = 7;$

2) Строим матрицу $B = \operatorname{adj} A = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ -5 & 7 \end{pmatrix}$.

3) Далее вычисляем $\det A = \begin{vmatrix} 7 & 4 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} = 7 \cdot 3 - 5 \cdot 4 = 1.$

4) Результат: $A^{-1} = \frac{\operatorname{adj} A}{\det A} = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ -5 & 7 \end{pmatrix}$.

Пример 2. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \end{pmatrix}, \quad A^{-1} = \frac{1}{12}\begin{pmatrix} -2 & 6 & 2 \\ 3 & -3 & 3 \\ 7 & -3 & -1 \end{pmatrix}.$

Определитель и обратная матрица

- Вычисляем определитель.

$$\det(A) = (1\cdot(-1)\cdot(-1) + 2\cdot 3\cdot 2 + 0\cdot 1\cdot 1 - 1\cdot(-1)\cdot 2 - 2\cdot 0\cdot(-1) - 3\cdot 1 \cdot 1) = 1 + 12 + 0 + 2 - 0 - 3 = 12.$$

$\det A \neq 0,$ значить, матрица обратима.

2) Определяем алгебраические дополнения всех элементов матрицы A.

$A_{11} = (-1)^{1+1}\det\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 3 & -1\end{pmatrix} = \mathbf{-2}$; $A_{12} = (-1)^{1+2}\det\begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix} = \mathbf{3}$;

$A_{13} = (-1)^{1+3}\det\begin{pmatrix}2 & -1\\ 1 & 3\end{pmatrix} = \mathbf{7}$; $A_{21} = (-1)^{2+1}\det\begin{pmatrix}0 & 2\\ 3 & -1\end{pmatrix} = \mathbf{6}$;

$A_{22} = (-1)^{2+2}\det\begin{pmatrix}1 & 2\\ 1 & -1\end{pmatrix} = \mathbf{-3}$; $A_{23} = (-1)^{2+3}\det\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 3\end{pmatrix} = \mathbf{-3}$;

$A_{31} = (-1)^{3+1}\det\begin{pmatrix}0 & 2\\ -1 & 1\end{pmatrix} = \mathbf{2}$; $A_{32} = (-1)^{3+2}\det\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 1\end{pmatrix} = \mathbf{3}$;

$A_{33} = (-1)^{3+3}\det\begin{pmatrix}1 & 0\\ 2 & -1\end{pmatrix} = \mathbf{-1}$;

Итак, $A^{-1} = \frac{1}{\det A}(\operatorname{adj} A) = \frac{1}{12}\begin{pmatrix}-2 & 3 & 7\\ 6 & -3 & -3\\ 2 & 3 & -1\end{pmatrix}^{\mathrm{T}} = \frac{1}{12}\begin{pmatrix}-2 & 6 & 2\\ 3 & -3 & 3\\ 7 & -3 & -1\end{pmatrix}.$

Определитель и обратная матрица

- **Пример 3.** С помощью обратной матрицы решить след. систему уравнений.

$x + 2z = 7;$

$2x - y + z = 3;$

$x + 3y - z = 4.$

Данную систему можно представить в матричной форме

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b},$$

где матрицы А - из примера 2:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 7 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

$$\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b} = \frac{1}{12}\begin{bmatrix} -2 & 6 & 2 \\ 3 & -3 & 3 \\ 7 & -3 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 7 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Определитель и обратная матрица

Следующие условия эквивалентны для матрицы A порядка n

- Матрица A порядка n невырожденная;
- Существует обратная матрица A^{-1};
- $\operatorname{rank} A = n$;
- Строки матрицы линейно независимы;
- Столбцы матрицы линейно независимы;
- $\det A \neq 0$;
- Система линейн. уравнений $Ax = b$ совместна для любого вектора b;
- Если система линейных уравнений $Ax = b$ совместна, то она имеет единственное решение $x = A^{-1}b$;
- Система лин. уравнений $Ax = 0$ имеет единственное решение $x = 0$;
- Число 0 **не является** собственным значением матрицы A.
- Размерность нуль-пространства матрицы A равна 0;
- Размерность области значений матрицы A равна n;

Определитель и обратная матрица

- Теорема 2. Если $\det A=0$, то матрица вырожденная, т.е. не имеет обратную матрицу.

Доказательство. Пусть $\det A=0$. Покажем, что матрица не обратима. Пусть наоборот, $\det A=0$, но матрица имеет обратную матрицу. Тогда
$AA^{-1} = I \Longrightarrow \det AA^{-1} = 1 \Longrightarrow \det A \det A^{-1} = 1 \Rightarrow 0 \det A^{-1} = 1.$

Очевидно, что Теорема 2 верна и в другую сторону тоже.

Определитель и обратная матрица

- Пример невырожденной матрицы.

Матрица $A = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$ поворачивает любой вектор на α градусов против часовой стрелки, и при этом сохраняет его длину.

$\det A = \cos^2\alpha + \sin^2 x = 1.$

Значит, матрица A невырожденная. Ее обратная матрица равна

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}.$$

A^{-1} поворачивает любой вектор на α градусов по часовой стрелки, и при этом сохраняет его длину.

Определитель и обратная матрица

Определение 4. Из элементов, взятых из k строк и k столбцов, любой матрицы (не обязательно квадратной) составим квадратную подматрицу порядка k. Определитель такой квадратной подматрицы называют минором k-го порядка.

Если подматрица составлена из строк и столбцов с одинаковыми номерами (например, из строк с номерами $\{1, 5, 7, 8\}$, столбцов с номерами $\{1, 5, 7, 8\}$), то минор такой подматрицы называют главным.

Лемма 1. Для любой матрицы если все миноры k-го порядка равны нулю, тогда все миноры порядка больше k также равны нулю.

Доказательство леммы очевидно и непосредственно следует из разложения определителя по формуле Лапласа. Поскольку любой определитель порядка k+1 согласно формуле разложения по Лапласа вычисляется с помощью определителей (миноров) k-го порядка.

Определитель и обратная матрица

- Теорема 2. Для любой матрицы $A = (a_{ij})_{m\times n}$ максимальный порядок ненулевого минора равен рангу матрицы.

Доказательство. Предположим, что r – порядок максимального ненулевого минора. Очевидно, что

$r \leq \min\{m, n\}$. Не уменьшая общности, предположим, что это – минор подматрицы первых r строк и r столбцов (этого можно всегда добиваться, переставляя строки и столбцы).

Пусть $D = \det(a_{ij})_{r\times r}$. Тогда первые r столбцов (строк) матрицы A линейно независимы. Если при этом

$r = \min\{s, n\}$, то доказательство завершено. Пусть

$r < \min\{m, n\}$. Покажем, что любой l-й столбец матрицы A, $r<l<n$, линейно зависим от первых r столбцов.

Определитель и обратная матрица

- Рассмотрим матрицу

$$B^{i,l} = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots. & a_{1r} & a_{1l} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{r1} & \cdots & a_{rr} & a_{rl} \\ a_{i1} & \cdots & a_{ir} & a_{il} \end{bmatrix}.$$

Если i>r, то det $B^{i,l}$ - минор, порядка больше r и согласно условию он равен нулю. Но, при условии $i \leq r$, это – не минор матрицы A, а минор с совпадающими строками, и поэтому равен нулю.

Рассмотрим определитель $B^{i,l}$, разложив его по последней строке:

$$a_{i1}B_{i1} + a_{i2}B_{i2} + \cdots + a_{ir}B_{ir} + a_{il}D = 0.$$

Здесь, B_{ij} - алгебраическое дополнение элемента (i,j) матрицы $B^{i,l}$.

Для всех i минор B_{ij} не зависит от i и формируется из элементов первых r строк A.

Поскольку $D \neq 0$, $a_{il} = \frac{1}{D}(-a_{i1}B_{i1} - a_{i2}B_{i2} - \cdots - a_{ir}B_{ir})$.

Последнее выражение верно для любого $i=1,\ldots,m$.

Таким образом каждый столбец l является линейной комбинацией первых r столбцов с коэффициентами $\frac{-B_{11}}{D}, \ldots, \frac{-B_{ir}}{D}$.

Пример к теореме 2

- Рассмотрим матрицу $A_{5\times4} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 3 & 4 & 11 & 14 \\ 2 & 2 & 6 & 8 \\ -2 & 3 & 4 & 2 \end{pmatrix}$.

Несмотря на ее «внушительный размер» , максимальный порядок ненулевого минора равен 2. В матрице нет даже минора 3-го порядка, отличающегося от нуля. Т.е. если Вы составите из элементов матрицы подматрицу 3 на 3, то ее определитель будет 0. Естественно все миноры 4-го порядка также равны нулю. Для простоты в качестве ненулевого минора 2-го порядка берем элементы первых двух строк и первых двух столбцов (наверху подматрица выделена красным цветом.).

Нам нужно доказать, что ранг матрицы равен 2.

Для этого сперва рассматриваем ранг подматрицы, составленной из первых двух столбцов и какого-то другого, например четвертого столбца.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 14 \\ 2 & 2 & 8 \\ -2 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

Пример к теореме 2

- Сначала берем 3-ю строку и создаем подматрицу 3 на 3 след. образом.

$X = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 14 \end{bmatrix}$. Согласно условию порядок максимального ненулевого минора равен 2. Значит, $\det X$=0 (поскольку ее порядок равен 3).

Вычислим ее нулевой определитель разложением по третьей строке.

$$\det X = 3 * (-1)^4 \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + 4 * (-1)^5 * \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} + 14 * (-1)^6 * \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 0;$$

$$\det X = 3 * (-2) + 4 * (-1) * 2 + 14 * 1 = 0;$$

$$\det X = (3, 4, 14) * (-2, -2, 1)^T = 0. \qquad (1)$$

Вектор-строка $(-2, -2, 1)$ - это вектор алгебраических дополнений элементов третьей строки. Естественно, эти алгебраические дополнения не зависят от элементов третьей строки. Заменим элементы третьей строки на элементы из 4-й строки нашей исходной матрицы:

$$Y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 8 \end{bmatrix}. \ \det Y = (2, 2, 8) * (-2, -2, 1)^T = 0. \qquad (2)$$

Наконец, заменим элементов третьей строки на элементы из 5-й строки нашей исходной матрицы:

$$Z = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ -2 & 3 & 2 \end{bmatrix}. \ \det Y = (-2, 3, 2) * (-2, -2, 1)^T = 0. \qquad (3)$$

Пример к теореме 2

- Из матриц X, Y, Z создадим след. матрицу

$$B_{5\times 3} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 14 \\ 2 & 2 & 8 \\ -2 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Согласно построению третья, четвертая и пятая строки этой матрицы являются линейными комбинациями первых двух строк. Поэтому число линейно независимых строк этой матрицы равно 2. Аналогичным образом, третий столбец является лин. комбинацией первых двух столбцов (согласно теореме 2, коэффициенты лин. комбинации равны 2 и 2). Значит, ранг матрицы B равен двум.

Аналогичным образом, заменив третий столбец на третий столбец нашей исходной матрицы , мы получим след. матрицу ранга 2:

$$C_{5\times 3} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 11 \\ 2 & 2 & 6 \\ -2 & 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

Из того, что ранги матриц B и C равны 2, получается, по что построению ранг матрицы A также равен 2.

Определитель и обратная матрица

- Определение 5. Если ранг матрицы $A = \left(a_{ij}\right)_{m\times n}$ равен $\min\{m, n\}$, то матрицу называют матрицей полного ранга.

Следствие из теоремы 2. Максимальное число линейно независимых строк матрицы равно максимальному числу линейно независимых ее столбцов, который равен рангу матрицы.

Определитель и обратная матрица. Правило Крамера

- Рассмотрим систему лин. уравнений

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n. \end{cases}$$

Эту систему можно записать в матричной форме

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b}, \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{bmatrix}.$$

$$\mathrm{x} = A^{-1}\mathbf{b} = A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot (\operatorname{adj} A)\mathbf{b}.$$

$$x_k = \frac{1}{\det A} \cdot [(-1)^{k+1} \det M_{1k}\, b_1 + \cdots + (-1)^{k+n} \det M_{nk}\, b_1].$$

Определитель и обратная матрица. Правило Крамера

- Заметим, что выражение

$$(-1)^{k+1}\det M_{1k}\, b_1 + \cdots + (-1)^{k+n}\det M_{nk}\, b_1$$

есть определитель матрицы (разложен по k-му столбцу)

$$A(k) = \begin{bmatrix} a_{11} \cdots b_1 \cdots a_{1n} \\ a_{21} \cdots b_2 \cdots a_{2n} \\ \ldots \;\; \cdots \ldots \cdots \;\; \ldots \\ a_{n1} \cdots b_n \cdots a_{nn} \end{bmatrix},$$

которая получена из матрицы A заменой $к$-го столбца на вектор-столбец **b**.

Таким образом мы доказали след. теорему:

Теорема. (правило Крамера для решения систем. лин. уравн.)

$$x_k = \frac{\det A(k)}{\det A}.$$

Пример правила Крамера

Пример . С помощью правила Крамера решить след. систему уравнений.

$x + 2z = 7;$

$2x - y + z = 3;$

$x + 3y - z = 4.$

Данная система уже была решена с помощью обратной матрицы (см. слайд 12). А теперь решим правилом Крамера. Матрицы коэффициентов, вектор-столбец неизвестных и вектор-столбец правой части такие:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 7 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x3 \end{bmatrix}.$$

Вычисляем 4 определителя: В определителе $A(i)$, i-й столбец равен вектор-столбцу **b**, а остальные столбцы - такие, как у матрицы A.

$$\det A = \det \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \end{bmatrix} = 12; \quad \det A(1) = \det \begin{bmatrix} 7 & 0 & 2 \\ 3 & -1 & 1 \\ 4 & 3 & -1 \end{bmatrix} = 12;$$

$$\det A(2) = \det \begin{bmatrix} 1 & 7 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 4 & -1 \end{bmatrix} = 24; \quad \det A(3) = \det \begin{bmatrix} 1 & 0 & 7 \\ 2 & -1 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{bmatrix} = 36.$$

$$x_1 = \frac{\det A(1)}{\det A} = \frac{12}{12} = 1; \qquad x_1 = \frac{\det A(2)}{\det A} = \frac{24}{12} = 2; \qquad x_1 = \frac{\det A(3)}{\det A} = \frac{36}{12} = 3.$$

Домашнее задание

Все ответы можно найти

в учебнике [Ал_Пи] - «Алескеров_Пиантковский» (Глава 4)

Найти обратные матрицы [АлПи]

1. For each of the following matrix, find the inverse.

(a) $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$; (b) $\begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$; (c) $\begin{bmatrix} 2 & 7 & 3 \\ 3 & 9 & 4 \\ 1 & 5 & 3 \end{bmatrix}$;

2. Find the inverse of

(a) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 0 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix}$; (b) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 0 \end{bmatrix}$; (c) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 0 \end{bmatrix}$.

3. [АлПи] Найти матрицу X (подсказка: уравнение справа умножить на обр. матрицу, которая справа от X)

$$X \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 5 \\ -2 & 6 \end{bmatrix};$$

Домашнее задание

7. Find the rank of the matrix below for all possible values of λ

(a) $\begin{bmatrix} 1 & \lambda & -1 & 2 \\ 2 & -1 & \lambda & 5 \\ 1 & 10 & 6 & 1 \end{bmatrix}$;

10.[Ал_Пи] Найти необходимое и достаточное условия пересечения след. трех линий в одной точке.

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1 = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2 = 0 \\ a_3x + b_3y + c_3 = 0 \end{cases}$$

(non-singular – невырожденная)

4. Let A and B be non-singular matrices of the order n. Show that the following statements are equivalent.
   (a) $AB = BA$,
   (b) $AB^{-1} = B^{-1}A$,
   (c) $A^{-1}B = BA^{-1}$,
   (d) $A^{-1}B^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

Домашнее задание

- Решить матричное уравнение (из книги Демидовича) (подсказка: уравнение слева умножить на обр. матрицу, которая слева от X)

3.124. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 3 & 2 & -4 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 10 & 2 & 7 \\ 10 & 7 & 8 \end{pmatrix}$.

[Ал_Пи]

5. Let A be symmetric non-singular matrix. Show that A^{-1} is also symmetric.
6. Let A be a lower triangular (or an upper triangular) matrix. Show that A^{-1} is also lower (respectively, upper) triangular.

Этой задачи нет в учебниках.

С помощью правила Крамера решить след. систему уравнений.

$2x + 3z = 11;$

$x - y + z = 2;$

$x + 3y - z = 4.$

Домашнее задание