

РАЗДЕЛ 2. ПРОИЗВОДНАЯ И ДИФФЕРЕНЦИАЛ ФУНКЦИИ

ТЕМА 2.3. ИССЛЕДОВАНИЕ ФУНКЦИИ С ПОМОЩЬЮ ПРОИЗВОДНОЙ

План

- 1. Исследование функции с помощью производной.**
- 2. Задачи для самостоятельного решения.**

НАЙТИ ТОЧКИ ПЕРЕГИБА ФУНКЦИИ
 $y = 4x^3 - 6x$.

□

$$y' = 12x^2 - 6$$

$$y'' = 24x$$

$$24x = 0$$

$x = 0$ – точка перегиба.

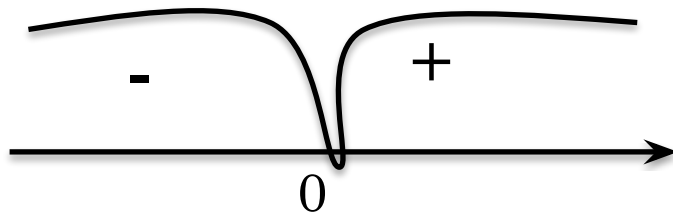


СХЕМА ИССЛЕДОВАНИЯ ГРАФИКА ФУНКЦИИ

1. Найти область определения функции
2. Определить возможный тип симметрии функции (четность, нечетность)
3. Найти точки пересечения графика функции с осями координат, т.е. решить уравнение $y=0$ и $x=0$.



4. Найти точки возможного экстремума ($y'(x)=0$)

5. Найти критические точки ($y''(x)=0$)

6. Исследовать знаки первой и второй производных, определить участки монотонности функции, направление выпуклости графика, точки экстремума и перегиба



7. Определить максимум и минимум функции на области ее определения. Если ООФ является отрезок $[a,b]$, то необходимо вычислить значения функции в его точках и сопоставить их с локальными экстремумами

8. Построить график функции



ИССЛЕДОВАТЬ ФУНКЦИЮ И
ПОСТРОИТЬ ГРАФИК

$$y = -x^4 + 8x^2 - 16.$$

1. ООФ: $x \in \mathbb{R}$

2. $f(-x) = -(-x)^4 + 8(-x)^2 - 16 = -x^4 + 8x^2 - 16 = f(x)$ – функция чётная.



$$3. -x^4 + 8x^2 - 16 = 0 \quad x^2 = t$$

$$-t^2 + 8t - 16 = 0$$

$$t_{1,2} = \frac{-8 \pm \sqrt{64 - 4 \cdot 16}}{-2} = \frac{-8 \pm 0}{-2}$$

$$t_{1,2} = 4 \quad x_{1,2,3,4} = \pm 2$$

$(2; 0), (-2; 0)$ — точки пересечения с осью OX

$$y = 0 + 0 - 16 = -16$$

$(0; -16)$ — точка пересечения с осью OY



□

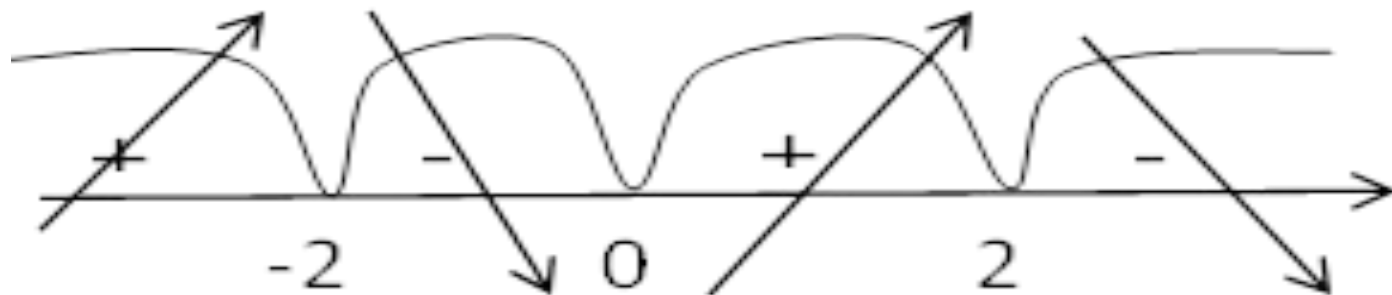
$$4. y' = -4x^3 + 16x$$

$$-4x(x^2 - 4) = 0$$

$$x_1 = 0 - (\cdot)min$$

$$x_2 = 2 - (\cdot)max$$

$$x_3 = -2 - (\cdot)max$$



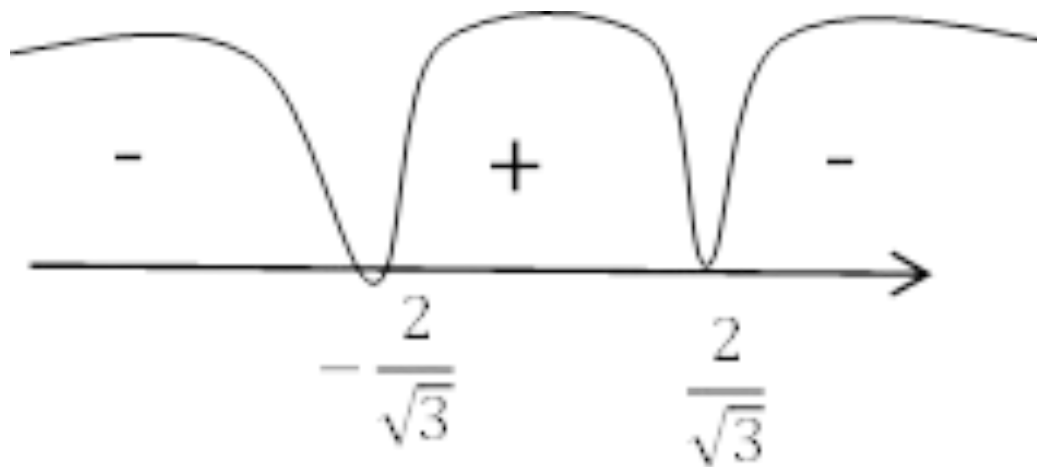
$$5. y'' = -12x^2 + 16$$

$$-12x^2 + 16 = 0$$

$$x^2 = \frac{16}{12}$$

$$x_{1,2} = \pm \sqrt{\frac{16}{12}} = \pm \frac{2}{\sqrt{3}} - \text{координаты точек}$$

перегиба



6. $(-\infty; -2)$ и $(0; 2)$ – интервалы возрастания функции
 $(-2; 0)$ и $(2; \infty)$ – интервалы убывания функции

$$\left(-\infty; -\frac{2}{\sqrt{3}}\right) \text{ и } \left(\frac{2}{\sqrt{3}}; \infty\right) - y''$$

< 0 функция выпукла вверх

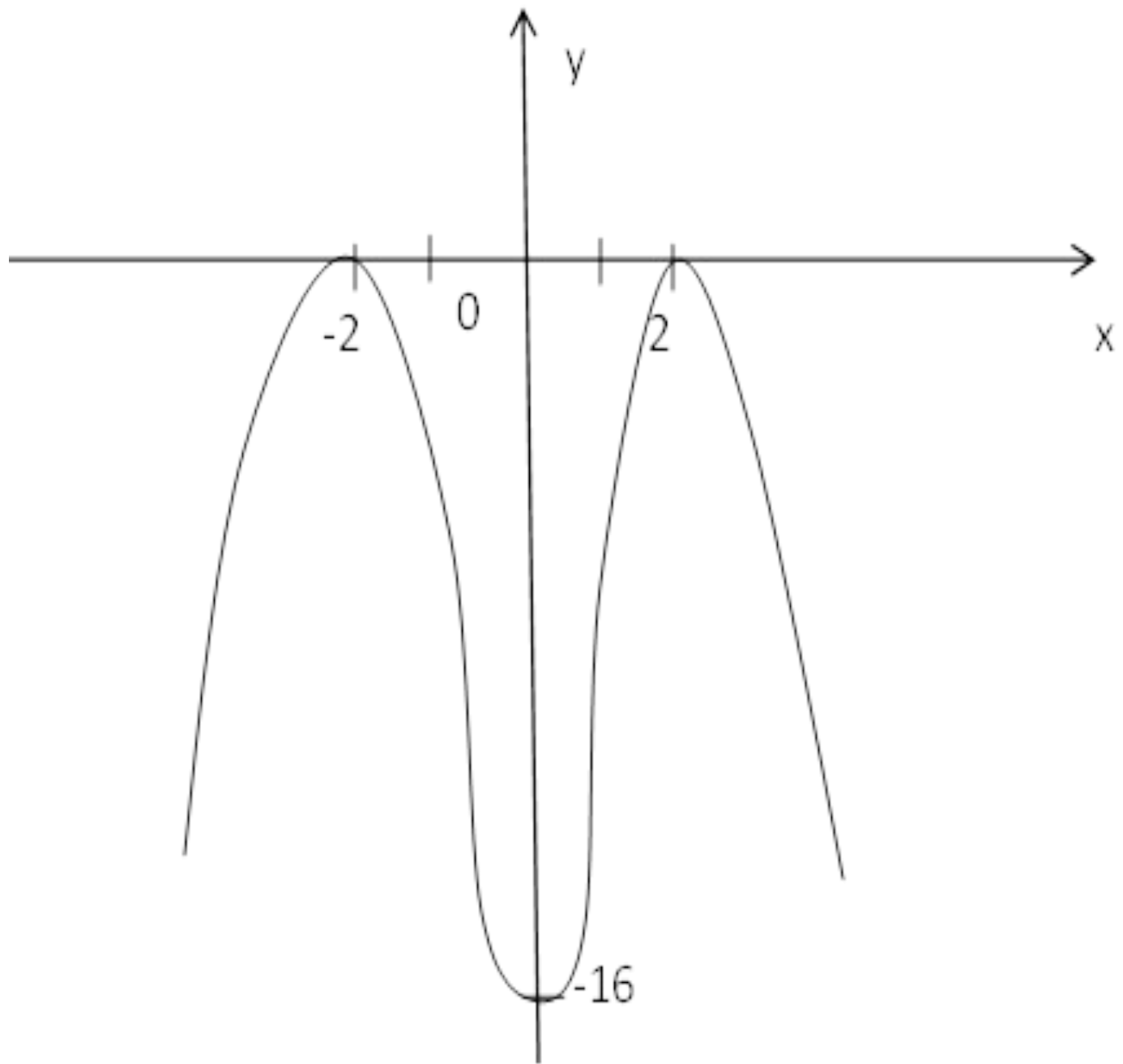
$$\left(-\frac{2}{\sqrt{3}}; \frac{2}{\sqrt{3}}\right) - y'' > 0 \text{ функция выпукла вниз}$$

$$7. f(0) = -16$$

$$f(-2) = 0$$

$$f(2) = 0$$





ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

1. Найти производную функции $y = \frac{1}{4} \sin^4 2x + \ln\left(2 - \frac{x}{3}\right) + 2x^6 + 7$
2. Найти точки перегиба функции $y = x^3 - 6x^2 + x$.
3. Размер популяции бактерий определяется формулой $P(t) = 10^6 + 10^4 t - 10^3 t^2$, где t - время в часах. Найти скорость роста популяции при $t = 2$ ч.
4. Концентрация раствора изменяется с течением времени по закону: $C = \frac{100t}{1+5t}$. Найти скорость растворения.



5. Зависимость между количеством вещества Q , полученной в некоторой химической реакции, и временем t выражается уравнением: $Q = 100t + 10e^{-2t}$. Определить скорость реакции.

6. Исследовать функцию и построить график $y = x^3 - 6x^2 + x$.

