Раздел 2. Производная и дифференциал функции
Тема 2.3. Исследование функции с помощью производной

План

1. **Исследование функции с помощью производной.**
2. **Задачи для самостоятельного решения.**

Найти точки перегиба функции $y = 4x^3 - 6x$.

$$y' = 12x^2 - 6$$

$$y'' = 24x$$

$$24x = 0$$

$$x = 0 - \text{точка перегиба.}$$

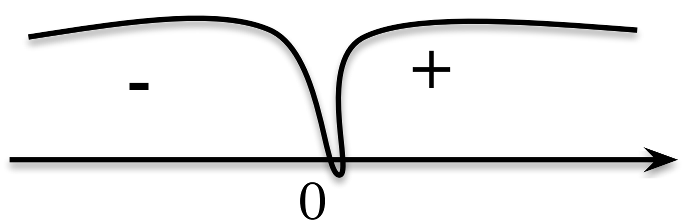


Схема исследования графика функции

1. Найти область определения функции

2. Определить возможный тип симметрии функции (четность, нечетность)

3. Найти точки пересечения графика функции с осями координат, т.е. решить уравнение y=0 и x=0.

4. Найти точки возможного экстремума ($y'(x)=0$)

5. Найти критические точки ($y''(x)=0$)

6. Исследовать знаки первой и второй производных, определить участки монотонности функции, направление выпуклости графика, точки экстремума и перегиба

7. Определить максимум и минимум функции на области ее определения. Если ООФ является отрезок [a,b], то необходимо вычислить значения функции в его точках и сопоставить их с локальными экстремумами

8. Построить график функции

Исследовать функцию и построить график $y = -x^4 + 8x^2 - 16.$

1. ООФ: x € R

2. $f(-x) = -(-x)^4 + 8(-x)^2 - 16 = -x^4 + 8x^2 - 16 = f(x)$ – функция чётная.

3. $-x^4 + 8x^2 - 16 = 0$ $\qquad x^2 = t$

$$-t^2 + 8t - 16 = 0$$

$$t_{1,2} = \frac{-8 \pm \sqrt{64 - 4 \cdot 16}}{-2} = \frac{-8 \pm 0}{-2}$$

$t_{1,2} = 4$ $\qquad x_{1,2,3,4} = \pm 2$

$(2; 0), (-2; 0)$ – точки пересечения с осью ОХ

$$y = 0 + 0 - 16 = -16$$

$(0; -16)$ – точка пересечения с осью ОУ

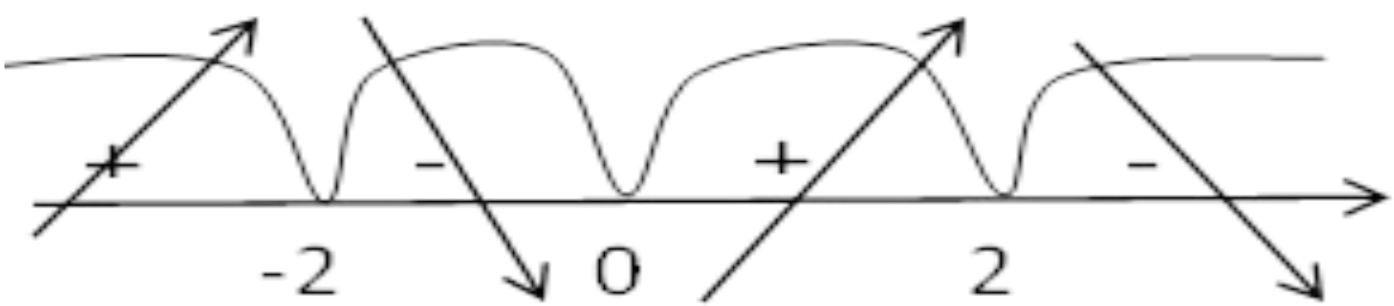
$$4.\ y' = -4x^3 + 16x$$

$$-4x(x^2 - 4) = 0$$

$$x_1 = 0 - (\cdot)min$$

$$x_2 = 2 - (\cdot)max$$

$$x_3 = -2 - (\cdot)max$$

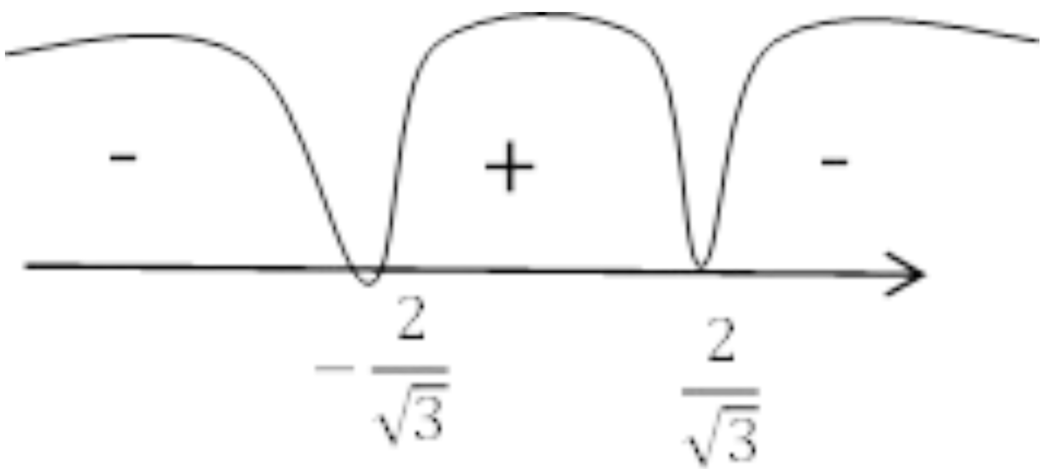


5. $y'' = -12x^2 + 16$

$$-12x^2 + 16 = 0$$

$$x^2 = \frac{16}{12}$$

$x_{1,2} = \pm\sqrt{\frac{16}{12}} = \pm\frac{2}{\sqrt{3}}$ – координаты точек перегиба



6. $(-\infty; -2)$ и $(0; 2)$ – интервалы возрастания функции

$(-2; 0)$ и $(2; \infty)$ – интервалы убывания функции

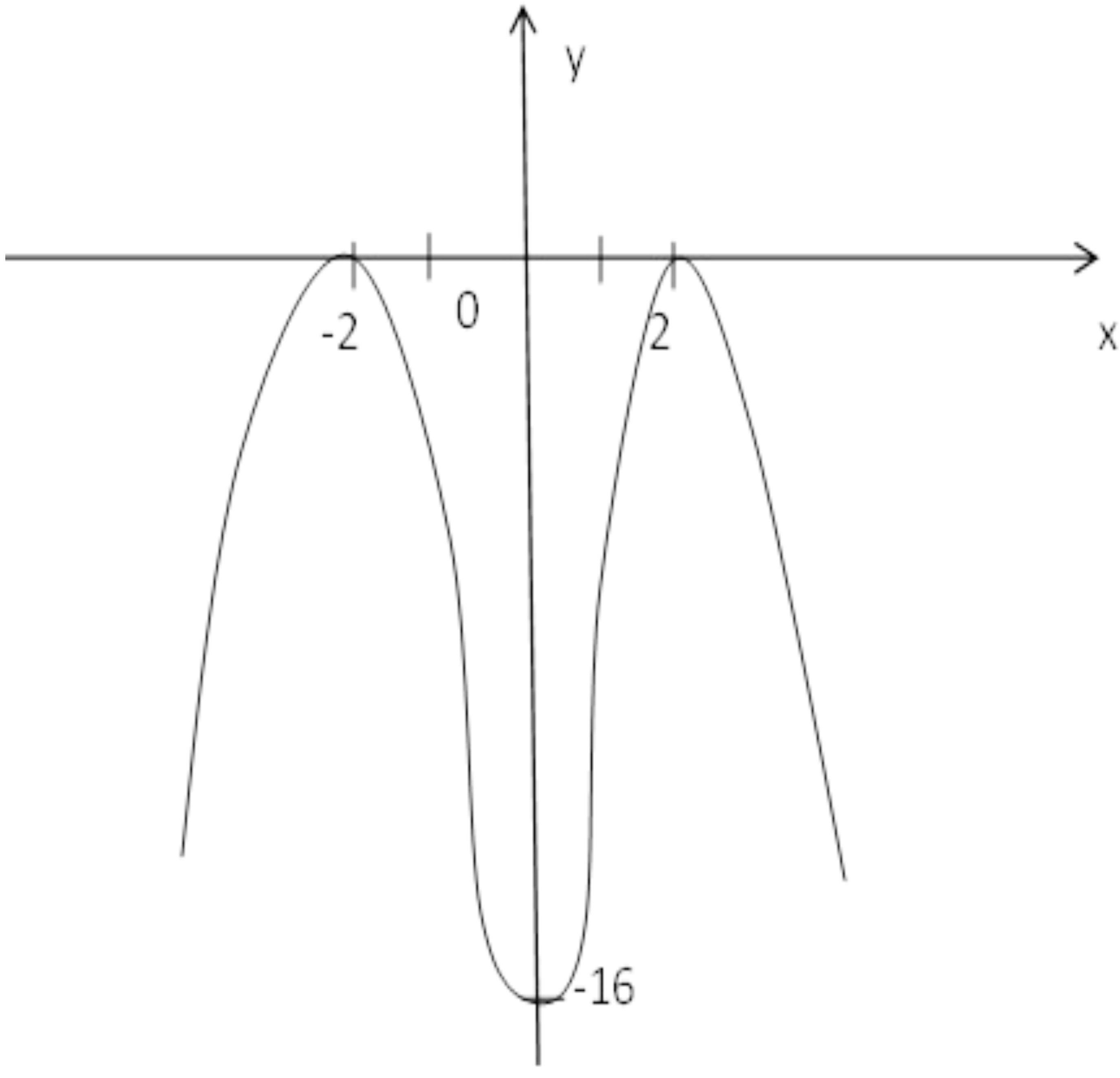
$$\left(-\infty; -\frac{2}{\sqrt{3}}\right) \text{ и } \left(\frac{2}{\sqrt{3}}; \infty\right) - y'' < 0 \text{ функция выпукла вверх}$$

$$\left(-\frac{2}{\sqrt{3}}; \frac{2}{\sqrt{3}}\right) - y'' > 0 \text{ функция выпукла вниз}$$

7. $f(0) = -16$

$f(-2) = 0$

f(2)=0



y
x
-2
0
2
-16

Задачи для самостоятельного решения

1. Найти производную функции у = $\frac{1}{4}sin^4 2x + \ln\left(2 - \frac{x}{3}\right) + 2x^6 + 7$
2. Найти точки перегиба функции у = $x^3 - 6x^2 + x$.
3. Размер популяции бактерий определяется формулой $P(t) = 10^6 + 10^4 t - 10^3 t^2$, где t- время в часах. Найти скорость роста популяции при t= 2 ч.
4. Концентрация раствора изменяется с течением времени по закону: $C = \frac{100t}{1+5t}$. Найти скорость растворения.

5. Зависимость между количеством вещества Q, полученной в некоторой химической реакции, и временем t выражается уравнением: $Q = 100t + 10e^{-2t}$. Определить скорость реакции.

6. Исследовать функцию и построить график $y = x^3 - 6x^2 + x$.