

# Тема: Линейные звенья первого порядка

Учебная цель: изучить линейные звенья первого порядка

Вопросы:

1. Пропорциональные звенья.
2. Интегрирующие звенья.
3. Дифференциальные звенья.
4. Апериодические звенья первого порядка.

*Перечень литературы:*

1. В.А. Бесекерский, Е.П. Попов. Теория систем автоматического регулирования.

## ВВЕДЕНИЕ

Для исследования динамики, расчета и классификации целесообразно делить САУ на составные части. Такими составными частями являются динамические звенья (ДЗ).

ДЗ – это устройство любого физического вида и конструктивного исполнения, обладающее определенными динамическими свойствами и описываемое определенным д.у.

Одним и тем же д.у. могут описываться разнообразные устройства (механические, гидравлические, электрические и т.д.). В ОТУ независимо от принципа действия, вида энергии, используемой в устройстве ДЗ считаются однотипными, если описываются одним и тем же д.у.

Пример. Электрическая цепь (рис. 1) состоит из сопротивления  $R$ , емкости  $C$  и индуктивности  $L$ . При наличии внешнего напряжения  $u$  динамические процессы электрической цепи описываются д.у. второго порядка:

$$L \frac{d^2 q}{dt^2} + R \frac{dq}{dt} + \frac{1}{C} q = u$$

где  $R$  – сопротивление;  
 $L$  – индуктивность;  
 $q$  – заряд емкости  $C$ .

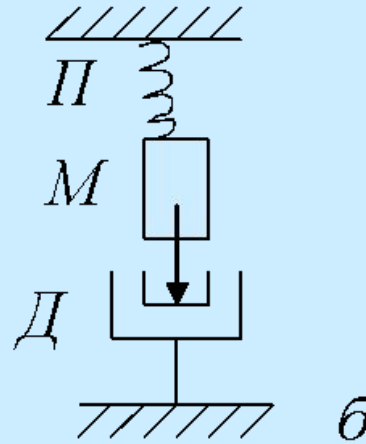
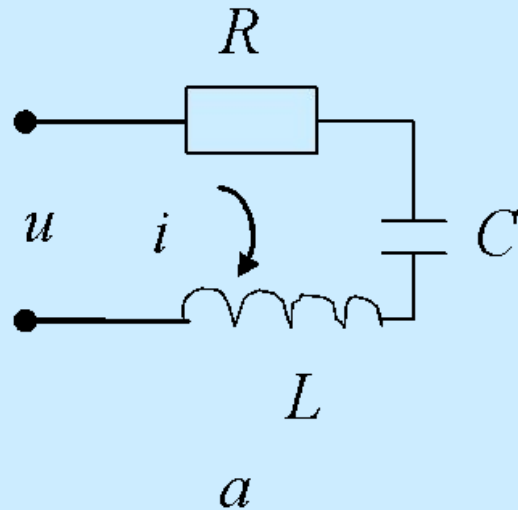


Рис. 1. Схема электрической (а) и механической (б) колебательных систем

Механическая система состоит из твердого тела  $M$ , пружины  $\Pi$  и демпфера  $Д$ . При наличии внешней силы  $f$  д.у. динамики механической

системы имеет вид  $m \frac{d^2 x}{dt^2} + \lambda \frac{dx}{dt} + cx = f$

где  $x$  – перемещение тела;

$m$  – масса тела;

$\lambda$  – коэффициент силы демпфера  $D$ ;

$c$  – коэффициент жесткости пружины  $P$ .

Таким образом, уравнения динамики электрической цепи и механической системы являются однотипными несмотря на различную физическую природу.

По виду д.у. различают следующие типы ДЗ:

- пропорциональные;
- дифференцирующие;
- интегрирующие;
- апериодические устойчивые и неустойчивые;
- колебательные;
- реальные интегрирующие;
- резонансные.

При изучении динамических характеристик ДЗ используются следующие термины:

ДЗ, передаточные функции которых можно представить в виде простых множителей или дробей называются элементарными.

Линейное звено – звено, у которого входные и выходные воздействия, а также их производные связаны в д.у. линейной зависимостью.

Для нелинейных ДЗ условие линейности входных и выходных воздействия, а также их производных в д.у. не соблюдается.

Примеры:

$3u'' + 4u = 5x$  – линейное д.у. второго порядка;

$4u = \ln 5x'$  – нелинейное д.у. первого порядка.

Стационарное звено – звено, описываемое д.у. с постоянными коэффициентами.

Нестационарное звено – звено, описываемое д.у. с переменными коэффициентами.

В зависимости от порядка д.у., описывающего работу элемента (звена) САУ, различают звенья первого, второго и более высоких порядков.

Порядком звена называется неотрицательное целое число, равное порядку старшей производной в д.у., описывающего работу этого звена

# 1. ПРОПОРЦИОНАЛЬНЫЕ ЗВЕНЬЯ

Пропорциональным (усилительным) звеном называется звено, у которого выходное воздействие пропорционально входному. Пропорциональная зависимость между входной и выходной величинами описывается уравнением вида  $u = kx$  (1), где  $k$  - коэффициент пропорциональности (передачи).

Пропорциональные звенья используются в усилительных устройствах и устройствах, в которых осуществляется преобразование одной энергии в другую.

Примеры.

1. Электроакустический преобразователь (ЭАП) - преобразует акустические сигналы в электрические и наоборот.

2. Усилитель – преобразует входной сигнал в  $k$  раз.

Рассмотрим поведение пропорционального звена при воздействии на вход различными типами сигналов.

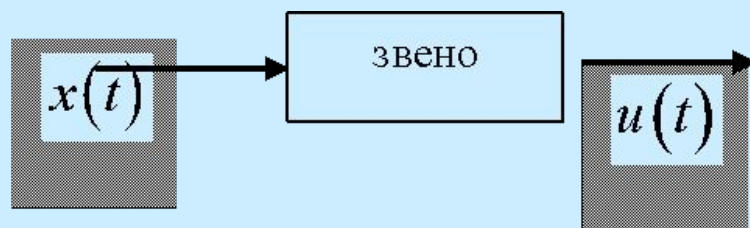
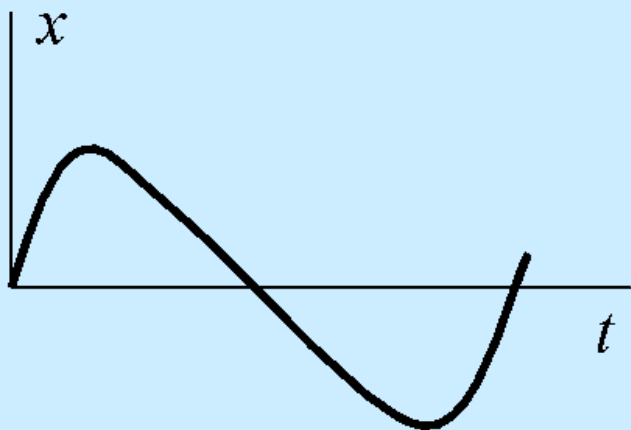
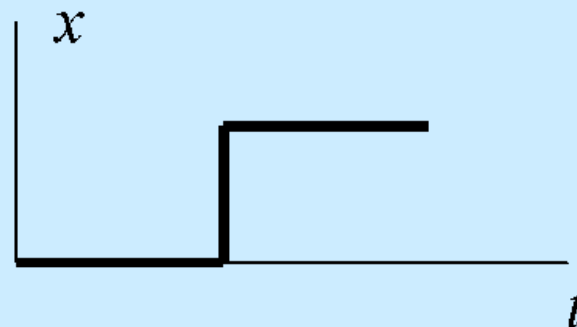


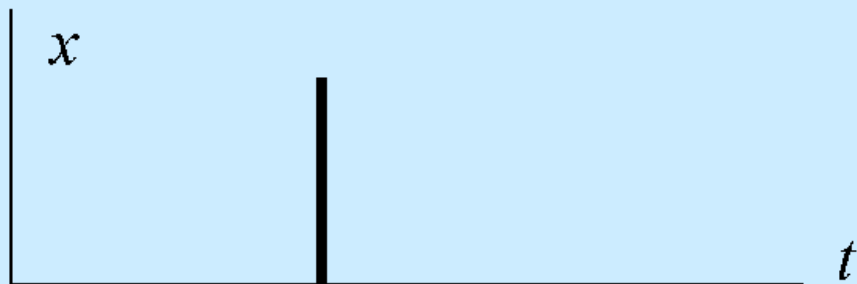
Рис. 2. Структурная схема САУ



Гармоническое воздействие на вход



Ступенчатое воздействие на вход



Импульсное воздействие на вход

1.  $u = kx$  - операция дифференцирования не применяется.

2.  $R(p) = k$  - оператор воздействия;

3.  $Q(p) = 1$  - собственный оператор;

4.  $W(p) = \frac{R(p)}{Q(p)} = k$  - передаточная функция;

5.  $W(j\omega) = \frac{R(j\omega)}{Q(j\omega)} = k$  - частотная передаточная функция;

6.  $U(\omega) = k$  - действительная (вещественная) часть;

7.  $V(\omega) = 0$  - мнимая часть;

8.  $A(\omega) = \sqrt{U^2 + V^2} = k$  - модуль передаточной функции

(амплитудная функция) показывает, что модуль гармонического воздействия на выходе изменится в  $k$  раз. Следовательно, в пропорциональном звене амплитуда выходного воздействия увеличивается в  $k$  раз.



9.  $\varphi(\omega) = \arctg \frac{V}{U} = 0$  - фазовая функция равна нулю. Следова-

тельно, фаза входного и выходного воздействия совпадают, в пропорциональном звене входной сигнал не изменяет своей фазы.

10. Динамические свойства пропорционального звена по переходной функции  $h(t)$ , т.е. по реакции звена на входной сигнал типа единичной ступенчатой функции  $1(t)$ , т.е.

$$x(t) = 1(t) \Rightarrow u(t) = 1(t)k \Rightarrow u(t) = h(t) = 1(t)k \Rightarrow h(t) = k1(t)$$

Таким образом, пропорциональное звено мгновенно копирует входной сигнал, изменяет его масштаб в  $k$  раз. Переходной процесс отсутствует, следовательно, пропорциональное звено является безинерционным.

11. Динамические свойства пропорционального звена по весовой функции, т.е. реакция звена на импульсное воздействие:  $x(t) = \delta(t)$ .

$$u(t) = \delta(t)k \Rightarrow \text{т.к. } u(t) = w(t) = \delta(t)k$$

или  $w(t) = h'(t) = (1(t)k)' = \delta(t)k$

или  $w(t) = L^{-1}[W(s)] = L^{-1}[W(k \cdot 1(t))] = k\delta(t)$

Таким образом, при подаче на вход пропорционального звена гармонического воздействия с выхода звена можно снять воздействие, подчиняющееся гармоническому закону с амплитудой в  $k$  раз большей и фазой, совпадающей с фазой входного воздействия. При входном воздействии в виде импульса с выхода также снимается импульс. При ступенчатом воздействии на пропорциональное звено выходное воздействие также будет ступенчатым и по величине в  $k$  раз больше входного воздействия.

## 2. ИНТЕГРИРУЮЩИЕ ЗВЕНЬЯ

Интегрирующим называется звено, выходная величина которого пропорциональна интегралу по времени от входной величины:

$$u(t) = k \int_0^t x(t) dt$$

Продифференцируем левую и правую части этого уравнения по  $dt$  и получим:

$$\frac{u(t)}{dt} = \frac{d \left( k \int_0^t x(t) dt \right)}{dt}$$

Продифференцируем отдельно правую часть, для чего введем следующие обозначения:  $x(t) = X'(t)$ , т.е.  $X(t)$  - первообразная для  $x(t)$ . Получим

$$\begin{aligned} \frac{d\left(k \int_0^t x(t) dt\right)}{dt} &= \frac{d\left(kX(t) /_0^t\right)}{dt} = \frac{d\left(kX(t) - X(0)\right)}{dt} = \\ &= \frac{d\left(kX(t)\right)}{dt} - \frac{d\left(kX(0)\right)}{dt} = k \frac{dX(t)}{dt} = kX'(t) = kx(t) \end{aligned}$$

С учетом последней формулы получим:

$$\frac{du(t)}{dt} = kx(t) \Leftrightarrow u'(t) = kx(t)$$

где  $k$  - коэффициент передачи, равный скорости изменения выходной величины при единичном значении входной величины. Другое название – коэффициент передачи по скорости.

Учитывая последнюю формулу можно дать следующее определение интегрирующему звену.

Интегрирующим называется линейное стационарное звено первого порядка, у которого входное воздействие пропорционально скорости изменения (производной) выходного воздействия.

Исследуем поведение интегрирующего звена на гармоническое, единичное и импульсное воздействия.

1. Д.у. в операторной форме:  $u'(t) = kx(t); pu = kx$

2.  $R(p) = k$  - оператор воздействия;

3.  $Q(p) = p$  - собственный оператор;

4.  $W(p) = \frac{R(p)}{Q(p)} = \frac{k}{p}$  - передаточная функция;

5.  $W(j\omega) = \frac{k}{j\omega} = \frac{kj}{j^2\omega} = -j \frac{k}{\omega}$  - частотная передаточная

функция;

6.  $U(w) = 0$  - действительная (вещественная) часть;

7.  $V(w) = -\frac{k}{w}$  - мнимая часть;

8.  $A(w) = \sqrt{U^2 + V^2} = \frac{k}{w}$  - модуль передаточной функции (ам-

плитудная частотная функция) показывает, что модуль гармонического воздействия на выходе изменится в  $k$  раз. Следовательно, при подаче на вход интегрирующего звена гармонического воздействия с выхода после окончания переходного процесса можно снять воздействие, подчиняющееся гармоническому закону с амплитудой в  $\frac{k}{w}$  раз большей амплитуды входного воздействия.

9. Фазовая частотная функция равна

$$\varphi(\omega) = \arctg \frac{V}{U} = \arctg \left[ -\frac{k}{\omega \cdot 0} \right] = -\frac{\pi}{2}.$$

При подаче на вход интегрирующего звена гармонического воздействия с выхода после окончания переходного процесса можно снять воздействие, подчиняющееся гармоническому закону с фазой, отличающейся на  $-\frac{\pi}{2}$  от фазы входного воздействия.

10. Динамические свойства интегрирующего звена по переходной функции  $h(t)$ , т.е. по реакции звена на входной сигнал типа единичной ступенчатой функции  $1(t)$ , т.е.

$$x(t) = 1(t) \quad u(t) = h(t) \Rightarrow h(t) = u(t) \stackrel{!}{=} \int_0^t k(t) dt = kt$$

Таким образом, при постоянном (ступенчатом) входном воздействии выходной сигнал интегрирующего звена изменяется с постоянной скоростью и его переходная функция непрерывно возрастает по линейному закону от нулевого значения

11. Динамические свойства пропорционального звена по весовой функции, т.е. реакция звена на импульсное воздействие:  $x(t) = \delta(t)$ . Т.к.

$x(t) = \delta(t)$  и  $w(t) = u(t)$ , то:

$$\text{а) } w(t) = u(t) = \int_0^t k\delta(t) dt = k \int_0^t \delta(t) dt = k \cdot 1 = k;$$

$$\text{б) } w(t) = L^{-1}[w(s)] = L^{-1}\left[\frac{k}{s}\right] = kL^{-1}\left[\frac{1}{s}\right]^{-1} = k \cdot 1 = k;$$

$$\text{в) } w(t) = h'(t) = (k \cdot t)' = k.$$

Таким образом, при входном воздействии в виде импульса с выхода также снимается импульс.

Отличительным свойством интегрирующего звена является то обстоятельство, что после прекращения действия входного сигнала выходной сигнал звена остается на том же уровне, на котором он был в момент исчезновения входного сигнала, т.е. интегрирующее звено обладает свойством «запоминать» (удерживать) последнее значение выходной величины. Благодаря «памяти» интегрирующего звена достигается астатизм САУ.



### 3. Дифференцирующие звенья

Дифференцирующим называется звено, выходная величина которого пропорциональна производной по времени от входной величины:

$u(t) = kx'(t)$ . Другое определение: дифференцирующим называется линейное стационарное звено первого порядка, у которого выходное воздействие пропорционально скорости изменения (производной) входного воздействия.

1.  $u = kpx$  - операция дифференцирования не применяется.

2.  $R(p) = kp$  - оператор воздействия;

3.  $Q(p) = 1$  - собственный оператор;

4.  $W(p) = \frac{R(p)}{Q(p)} = kp$  - передаточная функция;

5.  $W(jw) = \frac{R(jw)}{Q(jw)} = kjw$  - частотная передаточная функция;

6.  $U(w) = 0$  - действительная (вещественная) часть;

7.  $V(\omega) = k\omega$  - мнимая часть;

8.  $A(\omega) = \sqrt{U^2 + V^2} = k\omega$  - модуль передаточной функции (амплитудная функция). Показывает, что при подаче на вход дифференцирующего звена гармонического воздействия с выхода, после окончания переходного процесса, можно снять воздействие, подчиняющееся гармоническому закону с амплитудой в  $k\omega$  раз большей амплитуды входного воздействия.

9. Фазовая частотная функция равна

$$\varphi(\omega) = \arctg \frac{V}{U} = \arctg \left[ \frac{k \cdot \omega}{0} \right] = \frac{\pi}{2}.$$

При подаче на вход дифференцирующего звена гармонического воздействия с выхода, после окончания переходного процесса, можно снять воздействие, подчиняющееся гармоническому закону с фазой опережающей на  $\frac{\pi}{2}$  фазу входного воздействия.

10. Динамические свойства дифференцирующего звена по переходной функции  $h(t)$ , т.е. по реакции звена на входной сигнал типа единичной ступенчатой функции  $1(t)$ , т.е.

$$x(t) = 1(t) \quad h(t) = u(t)k(t)' = k\delta(t) \approx \delta(t)$$

Таким образом, при постоянном (ступенчатом) входном воздействии выходной сигнал дифференцирующего звена будет в виде импульса.

11. Динамические свойства дифференцирующего звена по весовой функции, т.е. реакция звена на импульсное воздействие:  $x(t) = \delta(t)$ . Т.к.  $x(t) = \delta(t)$  и  $w(t) = u(t)$ , то:

а)  $w(t) = u(t) = k(\delta(t))' = k\delta(t)$ ;

б)  $w(t) = L^{-1}[w(s)] = L^{-1}[k \cdot s] = kL^{-1}[s] = k \cdot \delta(t)$ ;

в)  $w(t) = h'(t) = k(\delta(t))' = k\delta(t)$ .

Таким образом, при импульсном входном сигнале выходной сигнал будет в виде импульса.

Пример. Тахогенератор: вырабатываемое им напряжение пропорционально скорости вращения его якоря. Скорость вращения якоря является производной по времени от угла поворота.

Дифференцирующее звено хорошо пропускает сигналы больших частот и плохо малых и поэтому дифференцирующее звено чувствительно к помехам, которые обычно бывают высокочастотными.

#### 4. Аperiodическое звено первого порядка

Аperiodическим называется звено, описываемое д.у. вида

$$Tu' + u = kx$$

где  $T$  - постоянная времени, с;

$k$  - коэффициент пропорциональности (передачи).

1. Д.у. в операторной форме:  $Tru + u = kx \Leftrightarrow u(Tp + 1) = kx$ ;

2. Оператор воздействия:  $R(p) = k$ ;

3. Собственный оператор  $Q(p) = Tp + 1$ ;

4. Частотная передаточная функция:

$$W(j\omega) = \frac{k}{1 + Tj\omega} = \frac{k}{(1 + Tj\omega)(1 - Tj\omega)} =$$
$$= \frac{k - kTj\omega}{1 + T^2\omega^2} = \frac{k}{1 + T^2\omega^2} - j \frac{kT\omega}{1 + T^2\omega^2}$$

5. Действительная часть:  $\frac{k}{1 + T^2\omega^2}$ ;

6. Мнимая часть:  $-\frac{kT\omega}{1 + T^2\omega^2}$

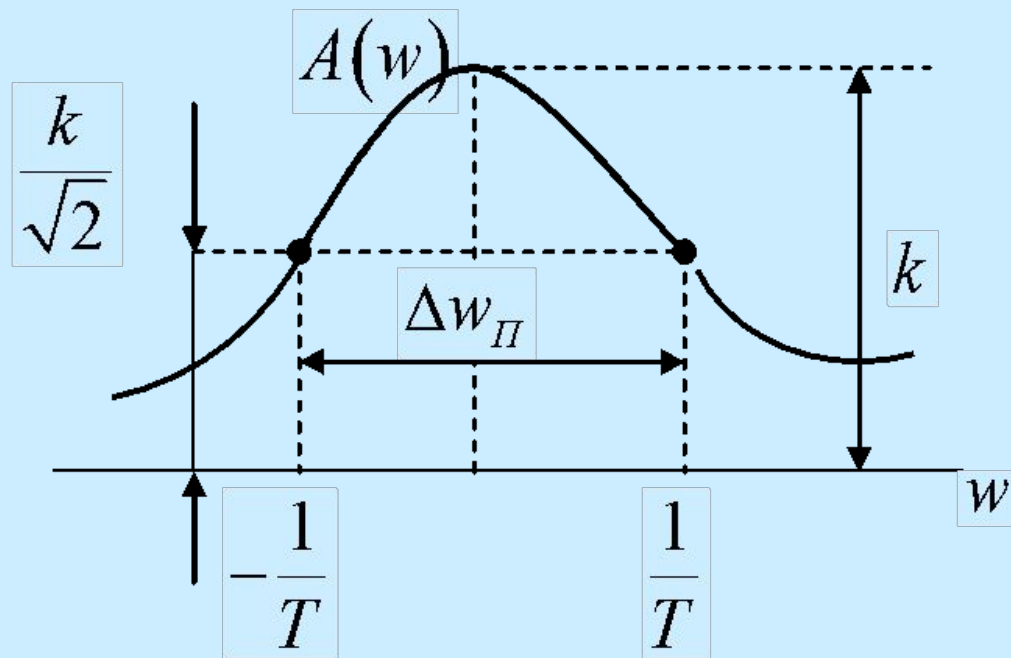
## 8. Модуль передаточной функции (амплитудная частотная функция)

$$A(\omega) = \sqrt{U^2(\omega) + V^2(\omega)} = \sqrt{\frac{k^2}{(1 + T^2\omega^2)^2} + \frac{k^2 T^2 \omega^2}{(1 + T^2\omega^2)^2}} =$$
$$= \frac{k}{1 + T^2\omega^2} \sqrt{1 + T^2\omega^2} = \frac{k}{\sqrt{1 + T^2\omega^2}}$$

Из амплитудной характеристики видно, что колебания малых частот  $\left(\omega < \frac{1}{T}\right)$  «пропускаются» данным звеном с отношением амплитуд выходной и входной величин, близким к статическому коэффициенту пропорциональности (передачи) звена .

Колебания больших частот  $\left(\omega > \frac{1}{T}\right)$  проходят с сильным ослаблением амплитуды, т.е. «плохо пропускаются» или практически совсем «не пропускаются» звеном.

Чем меньше постоянная времени  $T$ , т.е. чем меньше инерционность звена, тем более вытянута амплитудная характеристика  $A(\omega)$  вдоль оси частот, или, как говорят, тем шире полоса пропускания частот  $\Delta\omega_{\Pi}$  у данного звена:



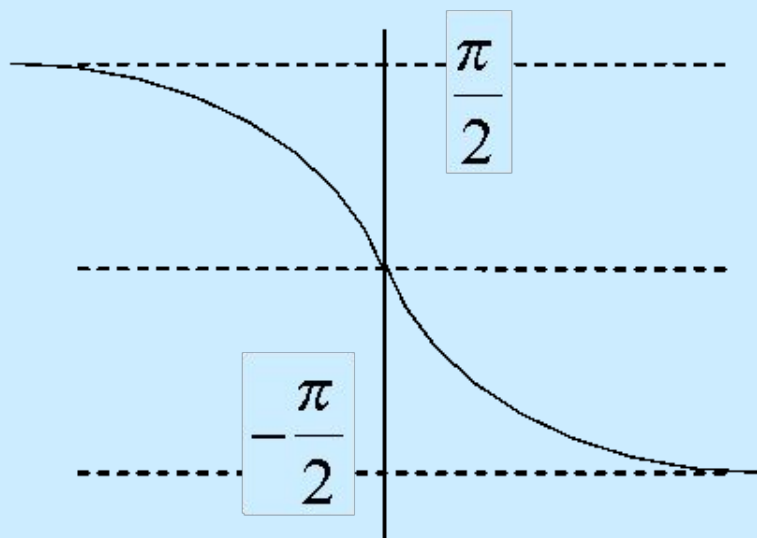
$$\Delta\omega_{\Pi} = \frac{1}{T} - \left(-\frac{1}{T}\right) = \frac{2}{T}$$

Таким образом, апериодическое звено обладает свойством фильтра: хорошо пропускает сигналы малых частот и плохо – больших.  $A(\omega)$  с ростом частоты убывает и убывает амплитуда выходного

сигнала.

9.

Фазовая частотная функция:



$$\varphi(\omega) = \operatorname{arctg} \frac{V(\omega)}{U(\omega)} = \operatorname{arctg} \frac{-\frac{kT\omega}{1+T^2\omega^2}}{\frac{k}{1+T^2\omega^2}} = \operatorname{arctg}(-T\omega)$$

$$\varphi(\omega) = \operatorname{arctg}(-T\omega) = -\operatorname{arctg}(\omega T)$$

Следовательно, выходные воздействия отстают по фазе от входных. Эти отстояния изменяется в пределах от  $0^\circ$  до  $90^\circ$ . На частоте  $\omega_0 = 1/T$ ,  $\varphi(\omega) = -45^\circ$ . Вносимый апериодическим звеном отрицательный сдвиг фаз неблагоприятно сказывается на устойчивости САУ



Оценим переходную функцию:

$x(t) = 1(t)$  и  $u(t) = h(t)$ . Положим  $x = 1$ , тогда

$$Th'(t) + h(t) = k \Leftrightarrow T \frac{dh}{dt} = k - h(t) \Leftrightarrow$$

$$\frac{dh}{dt} = \frac{k - h(t)}{T} \Leftrightarrow \frac{dt}{T} = \frac{dh}{k - h(t)} \Leftrightarrow$$

$$-\ln[k - h(t)] = \frac{t}{T} - \ln C \Leftrightarrow$$

$$\ln[k - h(t)] = -\frac{t}{T} + \ln C \Leftrightarrow$$

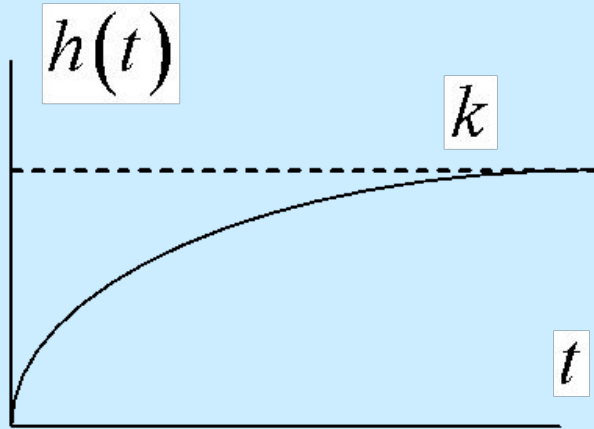
$$\ln[k - h(t)] - \ln C = -\frac{t}{T} \Leftrightarrow$$

$$\ln \left[ \frac{k - h(t)}{C} \right] = -\frac{t}{T} \Leftrightarrow \frac{k - h(t)}{C} = e^{-\frac{t}{T}}$$

$$\Leftrightarrow k - h(t) = Ce^{-\frac{t}{T}}$$

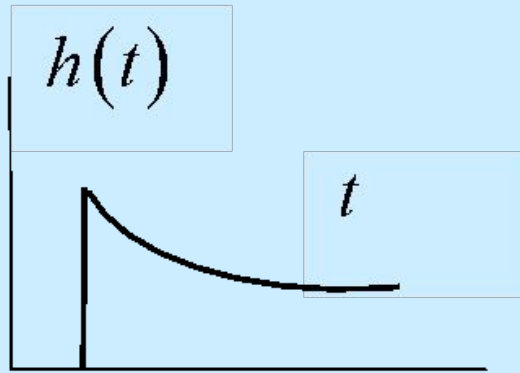
Для нулевых начальных условий  $t = u = h = 0$  получим:

$$\begin{aligned} h(0) = 0 &\Rightarrow k - 0 = C \cdot e^{-\frac{0}{T}} \Rightarrow k = C \Rightarrow \\ &\Rightarrow k - h(t) = k \cdot e^{-\frac{t}{T}} \Rightarrow h(t) = k \left( 1 + e^{-\frac{t}{T}} \right) \end{aligned}$$



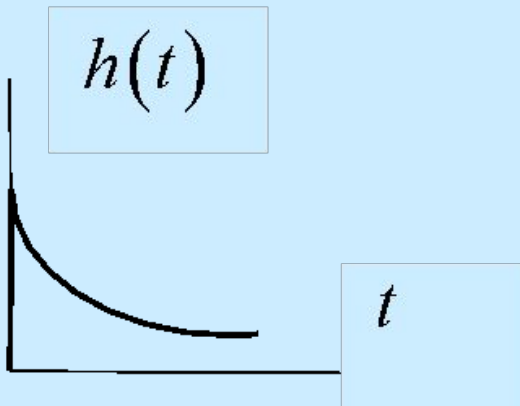
Переходная функция апериодического звена достигает своего установившегося значения не сразу, а постепенно по экспоненциальному (апериодическому) закону. Апериодическое звено показывает инерционность процесса.

Переходной процесс заканчивается при  $t = (3 \div 4)T$ . Чем меньше  $T$ , тем апериодическое звено ближе по своим свойствам к пропорциональному звену. Если на вход звена поступает единичная ступенчатая функция, то сначала наблюдается значительный рост, а затем спад.



Постоянная времени  $T$  характеризует «инерционность» или «инерционное запаздывание» звена. Выходное значение  $u(t) = kx$  в звене аperiodическом устанавливается только спустя некоторое время  $t$  после подачи входного воздействия.

11. Оценим весовую функцию:



Так как  $x(t) = \delta(t)$  и  $w(t) = 1(t)$ , то

$$w(t) = h'(t) = \frac{k}{T} \cdot e^{-\frac{t}{T}}.$$

При подаче им-

пульсного воздействия вначале наблюдается рост (скачок) до  $k$ , а затем убывание по экспоненте.

Примерами аperiodического звена являются магнитные и электромагнитные усилители, электрические двигатели.