Тема: Линейные звенья первого порядка

Учебная цель: изучить линейные звенья первого порядка

Вопросы:

1. Пропорциональные звенья.
2. Интегрирующие звенья.
3. Дифференциальные звенья.
4. Апериодические звенья первого порядка.

Перечень литературы:

1. В.А. Бесекерский, Е.П. Попов. Теория систем автоматического регулирования.

ВВЕДЕНИЕ

Для исследования динамики, расчета и классификации целесообразно делить САУ на составные части. Такими составными частями являются динамические звенья (ДЗ).

ДЗ – это устройство любого физического вида и конструктивного исполнения, обладающее определенными динамическими свойствами и описываемое определенным д.у.

Одним и тем же д.у. могут описываться разнообразные устройства (механические, гидравлические, электрические и т.д.). В ОТУ независимо от принципа действия, вида энергии, используемой в устройстве ДЗ считаются однотипными, если описываются одним и тем же д.у.

Пример. Электрическая цепь (рис. 1) состоит из сопротивления R, емкости C и индуктивности L. При наличии внешнего напряжения u динамические процессы электрической цепи описываются д.у. второго порядка: $L\dfrac{d^2q}{dt^2}+R\dfrac{dq}{dt}+\dfrac{1}{C}q=u$

где R – сопротивление;

L – индуктивность;

q – заряд емкости C.

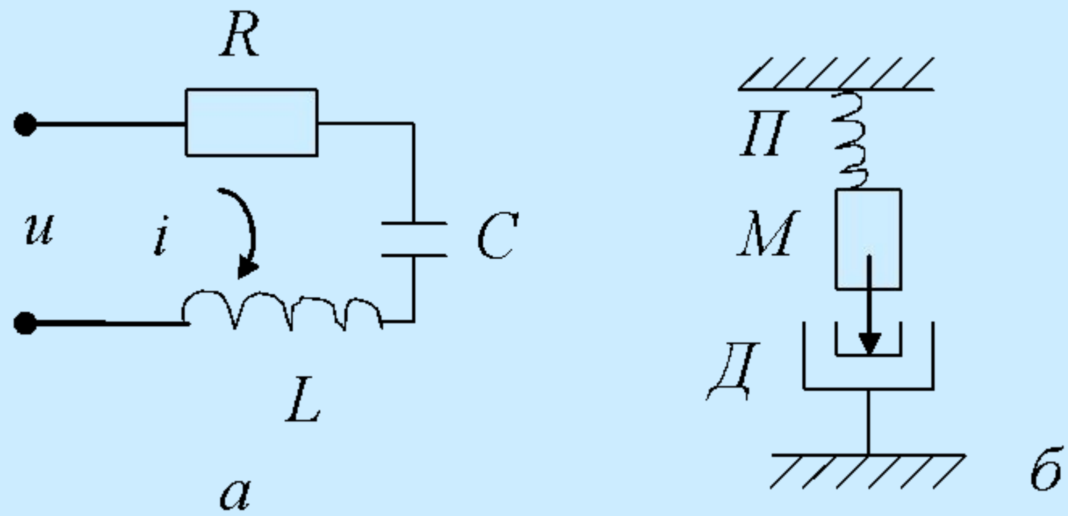


Рис. 1. Схема электрической (а) и механической (б) колебательных систем

Механическая система состоит из твердого тела M, пружины $П$ и демпфера $Д$. При наличии внешней силы f д.у. динамики механической системы имеет вид $m\dfrac{d^2x}{dt^2}+\lambda\dfrac{dx}{dt}+cx=f$

где x – перемещение тела;

m – масса тела;

λ – коэффициент силы демпфера $Д$;

c – коэффициент жесткости пружины $П$.

Таким образом, уравнения динамики электрической цепи и механической системы являются однотипными несмотря на различную физическую природу.

По виду д.у. различают следующие типы ДЗ:

– пропорциональные;
– дифференцирующие;
– интегрирующие;
– апериодические устойчивые и неустойчивые;
– колебательные;
– реальные интегрирующие;
– резонансные.

При изучении динамических характеристик ДЗ используются следующие термины:

ДЗ, передаточные функции которых можно представить в виде простых множителей или дробей называются элементарными.

Линейное звено – звено, у которого входные и выходные воздействия, а также их производные связаны в д.у. линейной зависимостью.

Для нелинейных ДЗ условие линейности входных и выходных воздействия, а также их производных в д.у. не соблюдается.

Примеры:

$3u'' + 4u = 5x$ – линейное д.у. второго порядка;

$4u = \ln 5x'$ – нелинейное д.у. первого порядка.

Стационарное звено – звено, описываемое д.у. с постоянными коэффициентами.

Нестационарное звено – звено, описываемое д.у. с переменными коэффициентами.

В зависимости от порядка д.у., описывающего работу элемента (звена) САУ, различают звенья первого, второго и более высоких порядков.

Порядком звена называется неотрицательное целое число, равное порядку старшей производной в д.у., описывающего работу этого звена

1. ПРОПОРЦИОНАЛЬНЫЕ ЗВЕНЬЯ

Пропорциональным (усилительным) звеном называется звено, у которого выходное воздействие пропорционально входному. Пропорциональная зависимость между входной и выходной величинами описывается уравнением вида $u = kx$ (1), где k - коэффициент пропорциональности (передачи).

Пропорциональные звенья используются в усилительных устройствах и устройствах, в которых осуществляется преобразование одной энергии в другую.

Примеры.

1. Электроакустический преобразователь (ЭАП) - преобразует акустические сигналы в электрические и наоборот.

2. Усилитель – преобразует входной сигнал в k раз.

Рассмотрим поведение пропорционального звена при воздействии на вход различными типами сигналов.

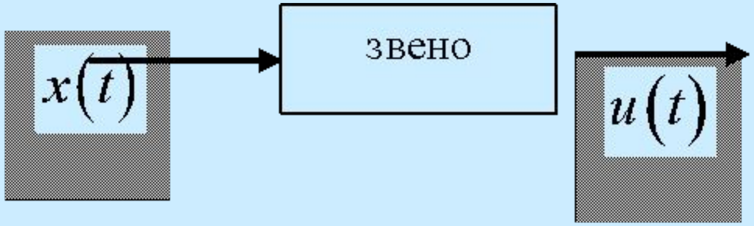
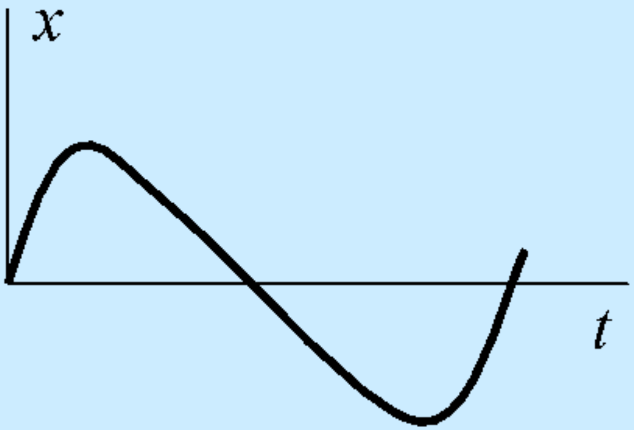
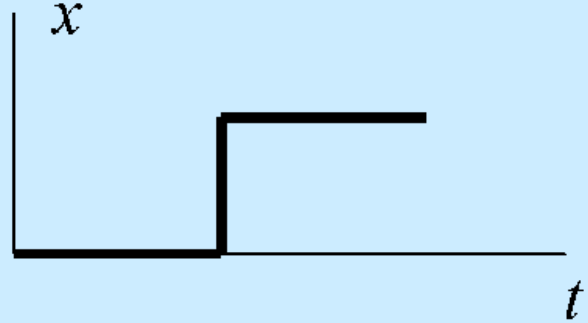


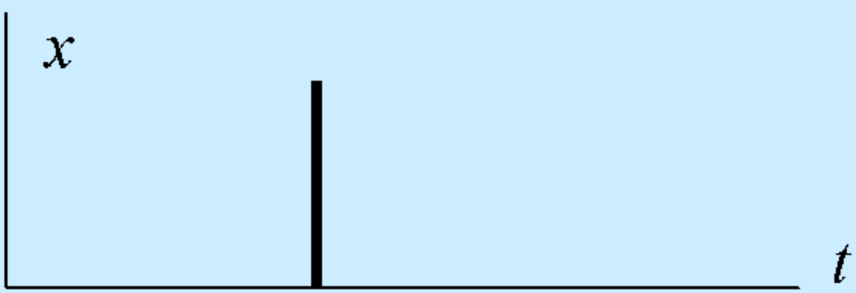
Рис. 2. Структурная схема САУ



Гармоническое воздействие на вход



Ступенчатое воздействие на вход



Импульсное воздействие на вход

1. $u = kx$ - операция дифференцирования не применяется.

2. $R(p) = k$ - оператор воздействия;

3. $Q(p) = 1$ - собственный оператор;

4. $W(p) = \dfrac{R(p)}{Q(p)} = k$ - передаточная функция;

5. $W(jw) = \dfrac{R(jw)}{Q(jw)} = k$ - частотная передаточная функция;

6. $U(w) = k$ - действительная (вещественная) часть;

7. $V(w) = 0$ - мнимая часть;

8. $A(w) = \sqrt{U^2 + V^2} = k$ - модуль передаточной функции (амплитудная функция) показывает, что модуль гармонического воздействия на выходе изменятся в k раз. Следовательно, в пропорциональном звене амплитуда выходного воздействия увеличивается в k раз.

9. $\varphi(w) = arctg\frac{V}{U} = 0$ - фазовая функция равна нулю. Следовательно, фаза входного и выходного воздействия совпадают, в пропорциональном звене входной сигнал не изменяет своей фазы.

10. Динамические свойства пропорционального звена по переходной функции $h(t)$, т.е. по реакции звена на входной сигнал типа единичной ступенчатой функции $1(t)$, т.е. $x(t) = 1(t) \Rightarrow u(t) = 1(t)k \Rightarrow u(t) = h(t) = 1(t)k \Rightarrow h(t) = k1(t)$

Таким образом, пропорциональное звено мгновенно копирует входной сигнал, изменяет его масштаб в k раз. Переходной процесс отсутствует, следовательно, пропорциональное звено является безинерционным.

11. Динамические свойства пропорционального звена по весовой функции, т.е. реакция звена на импульсное воздействие: $x(t) = \delta(t)$.

$u(t) = \delta(t)k \Rightarrow \text{т.к. } u(t) = w(t) = \delta(t)k$

или $w(t) = h'(t) = (1(t)k)' = \delta(t)k$

или $w(t) = L^{-1}[W(s)] = L^{-1}[W(k \cdot 1(t))] = k\delta(t)$

.

Таким образом, при подаче на вход пропорционального звена гармонического воздействия с выхода звена можно снять воздействие, подчиняющееся гармоническому закону с амплитудой в k раз большей и фазой, совпадающей с фазой входного воздействия. При входном воздействии в виде импульса с выхода также снимается импульс. При ступенчатом воздействии на пропорциональное звено выходное воздействие также будет ступенчатым и по величине в k раз больше входного воздействия.

2. ИНТЕГРИРУЮЩИЕ ЗВЕНЬЯ

Интегрирующим называется звено, выходная величина которого пропорциональна интегралу по времени от входной величины:

$$u(t) = k\int_0^t x(t)dt$$

Продифференцируем левую и правую части этого уравнения по dt и получим:

$$\frac{u(t)}{dt} = \frac{d\left(k\int_0^t x(t)dt\right)}{dt}$$

Продифференцируем отдельно правую часть, для чего введем следующие обозначения: $x(t) = X'(t)$, т.е. $X(t)$ - первообразная для $x(t)$. Получим

$$\frac{d\left(k\int_0^t x(t)dt\right)}{dt}=\frac{d\left(kX(t)/_0^t\right)}{dt}=\frac{d\left(kX(t)-X(0)\right)}{dt}=$$
$$=\frac{d\left(kX(t)\right)}{dt}-\frac{d\left(kX(0)\right)}{dt}=k\frac{dX(t)}{dt}=kX'(t)=kx(t)$$

С учетом последней формулы получим:

$$\frac{du(t)}{dt}=kx(t)\Leftrightarrow u'(t)=kx(t)$$

где k - коэффициент передачи, равный скорости изменения выходной величины при единичном значении входной величины. Другое название – коэффициент передачи по скорости.

Учитывая последнюю формулу можно дать следующее определение интегрирующему звену.

Интегрирующим называется линейное стационарное звено первого порядка, у которого входное воздействие пропорционально скорости изменения (производной) выходного воздействия.

Исследуем поведение интегрирующего звена на гармоническое, единичное и импульсное воздействия.

1. Д.у. в операторной форме: $u'(t) = kx(t); pu = kx$

2. $R(p) = k$ - оператор воздействия;

3. $Q(p) = p$ - собственный оператор;

4. $W(p) = \dfrac{R(p)}{Q(p)} = \dfrac{k}{p}$ - передаточная функция;

5. $W(jw) = \dfrac{k}{jw} = \dfrac{kj}{j^2 w} = -j\dfrac{k}{w}$ - частотная передаточная функция;

6. $U(w) = 0$ - действительная (вещественная) часть;

7. $V(w) = -\dfrac{k}{w}$ - мнимая часть;

8. $A(w) = \sqrt{U^2 + V^2} = \dfrac{k}{w}$ - модуль передаточной функции (амплитудная частотная функция) показывает, что модуль гармонического воздействия на выходе изменятся в k раз. Следовательно, при подаче на вход интегрирующего звена гармонического воздействия с выхода после окончания переходного процесса можно снять воздействие, подчиняющееся гармоническому закону с амплитудой в $\dfrac{k}{w}$ раз большей амплитуды входного воздействия.

9. Фазовая частотная функция равна

$$\varphi(w) = \operatorname{arc\,tg}\frac{V}{U} = \operatorname{arc\,tg}\left[-\frac{k}{w\cdot 0}\right] = -\frac{\pi}{2}.$$

При подаче на вход интегрирующего звена гармонического воздействия с выхода после окончания переходного процесса можно снять воздействие, подчиняющееся гармоническому закону с фазой, отличающейся на $-\frac{\pi}{2}$ от фазы входного воздействия.

10. Динамические свойства интегрирующего звена по переходной функции $h(t)$, т.е. по реакции звена на входной сигнал типа единичной ступенчатой функции $1(t)$, т.е.

$$x(t) = 1(t) \qquad u(t) = h(t) \Rightarrow h(t) = u(t) = \int_0^t k\ (t)dt = kt$$

Таким образом, при постоянном (ступенчатом) входном воздействии выходной сигнал интегрирующего звена изменяется с постоянной скоростью и его переходная функция непрерывно возрастает по линейному закону от нулевого значения

11. Динамические свойства пропорционального звена по весовой функции, т.е. реакция звена на импульсное воздействие: $x(t)=\delta(t)$. Т.к. $x(t)=\delta(t)$ и $w(t)=u(t)$, то:

а) $w(t)=u(t)=\int_0^t k\delta(t)\,dt=k\int_0^t \delta(t)\,dt=k\cdot 1=k$;

б) $w(t)=L^{-1}\left[w(s)\right]=L^{-1}\left[\frac{k}{s}\right]=kL^{-1}\left[\frac{1}{s}\right]^{-1}=k\cdot 1=k$;

в) $w(t)=h'(t)=(k\cdot t)'=k$.

Таким образом, при входном воздействии в виде импульса с выхода также снимается импульс.

Отличительным свойством интегрирующего звена является то обстоятельство, что после прекращения действия входного сигнала выходной сигнал звена остается на том же уровне, на котором он был в момент исчезновения входного сигнала, т.е. интегрирующее звено обладает свойством «запоминать» (удерживать) последнее значение выходной величины. Благодаря «памяти» интегрирующего звена достигается астатизм САУ.

3. Дифференцирующие звенья

Дифференцирующим называется звено, выходная величина которого пропорциональна производной по времени от входной величины: $u(t)=kx'(t)$. Другое определение: дифференцирующим называется линейное стационарное звено первого порядка, у которого выходное воздействие пропорционально скорости изменения (производной) входного воздействия.

1. $u = kpx$ - операция дифференцирования не применяется.
2. $R(p)=kp$ - оператор воздействия;
3. $Q(p)=1$ - собственный оператор;
4. $W(p)=\dfrac{R(p)}{Q(p)}=kp$ - передаточная функция;
5. $W(jw)=\dfrac{R(jw)}{Q(jw)}=kjw$ - частотная передаточная функция;
6. $U(w)=0$ - действительная (вещественная) часть;

7. $V(w) = kw$ - мнимая часть;

8. $A(w) = \sqrt{U^2 + V^2} = kw$ - модуль передаточной функции (амплитудная функция). Показывает, что при подаче на вход дифференцирующего звена гармонического воздействия с выхода, после окончания переходного процесса, можно снять воздействие, подчиняющееся гармоническому закону с амплитудой в kw раз большей амплитуды входного воздействия.

9. Фазовая частотная функция равна

$$\varphi(w) = \operatorname{arc\,tg}\frac{V}{U} = \operatorname{arc\,tg}\left[\frac{k \cdot w}{0}\right] = \frac{\pi}{2}.$$

При подаче на вход дифференцирующего звена гармонического воздействия с выхода, после окончания переходного процесса, можно снять воздействие, подчиняющееся гармоническому закону с фазой опережающей на $\frac{\pi}{2}$ фазу входного воздействия.

10. Динамические свойства дифференцирующего звена по переходной функции $h(t)$, т.е. по реакции звена на входной сигнал типа единичной ступенчатой функции $1(t)$, т.е.

$$x(t)=1(t) \quad h(t)=u(t)=k\left(1(t)\right)'=k\delta(t)\approx\delta(t)$$

Таким образом, при постоянном (ступенчатом) входном воздействии выходной сигнал дифференцирующего звена будет в виде импульса.

11. Динамические свойства дифференцирующего звена по весовой функции, т.е. реакция звена на импульсное воздействие: $x(t)=\delta(t)$. Т.к. $x(t)=\delta(t)$ и $w(t)=u(t)$, то:

а) $w(t)=u(t)=k\left(\delta(t)\right)'=k\delta(t)$;

б) $w(t)=L^{-1}\left[w(s)\right]=L^{-1}\left[k\cdot s\right]=kL^{-1}\left[s\right]=k\cdot\delta(t)$;

в) $w(t)=h'(t)=k\left(\delta(t)\right)'=k\delta(t)$.

Таким образом, при импульсном входном сигнале выходной сигнал будет в виде импульса.

Пример. Тахогенератор: вырабатываемое им напряжение пропорционально скорости вращения его якоря. Скорость вращения якоря является производной по времени от угла поворота.

Дифференцирующее звено хорошо пропускает сигналы больших частот и плохо малых и поэтому дифференцирующее звено чувствительно к помехам, которые обычно бывают высокочастотными.

4. Апериодическое звено первого порядка

Апериодическим называется звено, описываемое д.у. вида $Tu' + u = kx$

где T - постоянная времени, с;

k - коэффициент пропорциональности (передачи).

1. Д.у. в операторной форме: $Tpu + u = kx \Leftrightarrow u\left(Tp+1\right) = kx$;

2. Оператор воздействия: $R\left(p\right) = k$;

3. Собственный оператор $Q\left(p\right) = Tp + 1$;

4. Частотная передаточная функция:

$$W\left(jw\right) = \frac{k}{1+Tjw} = \frac{k}{\left(1+Tjw\right)}\frac{\left(1-Tjw\right)}{\left(1-Tjw\right)} =$$

$$= \frac{k-kTjw}{1+T^2w^2} = \frac{k}{1+T^2w^2} - j\frac{kTw}{1+T^2w^2}$$

5. Действительная часть: $\frac{k}{1+T^2w^2}$;

6. Мнимая часть: $-\frac{kTw}{1+T^2w^2}$

8. Модуль передаточной функции (амплитудная частотная функция)

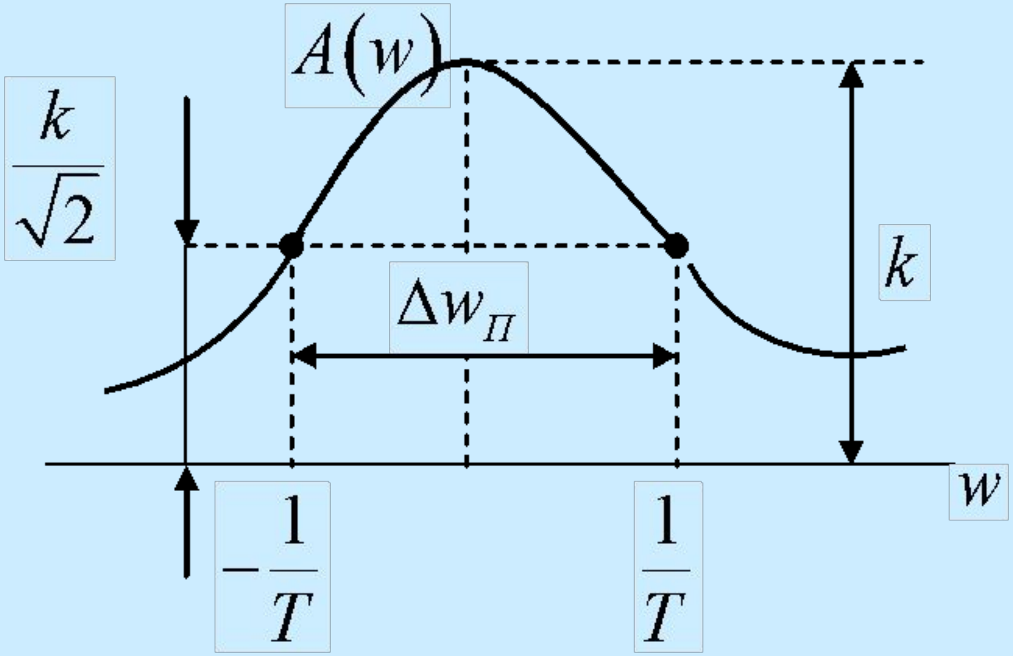
$$A(w)=\sqrt{U^2(w)+V^2(w)}=\sqrt{\frac{k^2}{\left(1+T^2w^2\right)^2}+\frac{k^2T^2w^2}{\left(1+T^2w^2\right)^2}}=$$

$$=\frac{k}{1+T^2w^2}\sqrt{1+T^2w^2}=\frac{k}{\sqrt{1+T^2w^2}}$$

Из амплитудной характеристики видно, что колебания малых частот $\left(w<\dfrac{1}{T}\right)$ «пропускаются» данным звеном с отношением амплитуд выходной и входной величин, близким к статическому коэффициенту пропорциональности (передачи) звена .

Колебания больших частот $\left(w>\dfrac{1}{T}\right)$ проходят с сильным ослаблением амплитуды, т.е. «плохо пропускаются» или практически совсем «не пропускаются» звеном.

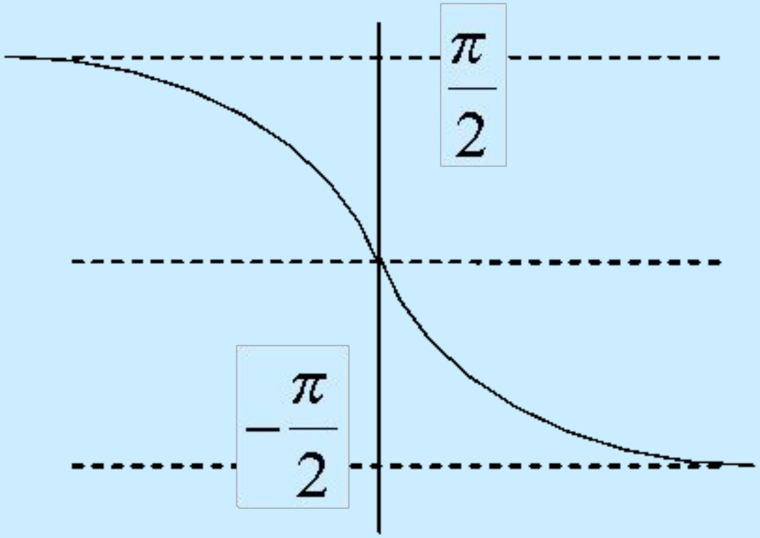
Чем меньше постоянная времени T, т.е. чем меньше инерционность звена, тем более вытянута амплитудная характеристика $A(w)$ вдоль оси частот, или, как говорят, тем шире полоса пропускания частот $\Delta w_П$ у данного звена:



$$\Delta w_П = \frac{1}{T} - \left(-\frac{1}{T}\right) = \frac{2}{T}$$

Таким образом, апериодическое звено обладает свойством фильтра: хорошо пропускает сигналы малых частот и плохо – больших. $A(w)$ с ростом частоты убывает и убывает амплитуда выходного сигнала.

9. Фазовая частотная функция:



$$\varphi(w)=\operatorname{arctg}\frac{V(w)}{U(w)}=\operatorname{arctg}\frac{-\frac{kTw}{1+T^2w^2}}{\frac{k}{1+T^2w^2}}=\operatorname{arctg}(-Tw)$$

$$\varphi(w)=\operatorname{arctg}(-Tw)=-\operatorname{arctg}(wT)$$

Следовательно, выходные воздействия отстоят по фазе от входных. Эти отстояния изменяется в пределах от 0^0 до 90^0. На частоте $w_0=1/T,\varphi(w)=-45^0$. Вносимый апериодическим звеном отрицательный сдвиг фаз неблагоприятно сказывается на устойчивости САУ.

Оценим переходную функцию:

$x(t) = 1(t)$ и $u(t) = h(t)$. Положим $x = 1$, тогда

$$Th'(t) + h(t) = k \Leftrightarrow T\frac{dh}{dt} = k - h(t) \Leftrightarrow$$

$$\frac{dh}{dt} = \frac{k - h(t)}{T} \Leftrightarrow \frac{dt}{T} = \frac{dh}{k - h(t)} \Leftrightarrow$$

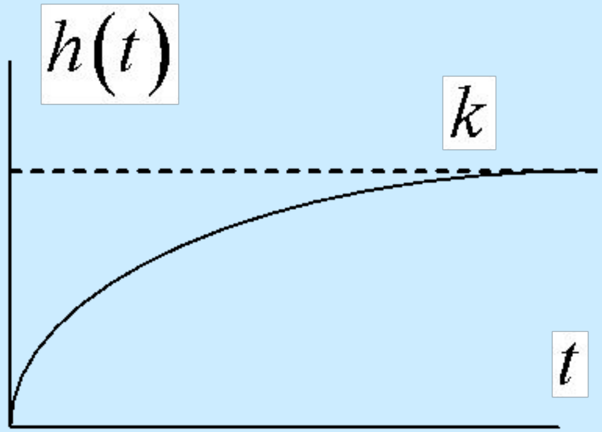
$$-\ln\left[k - h(t)\right] = \frac{t}{T} - \ln C \Leftrightarrow$$

$$\ln\left[k - h(t)\right] = -\frac{t}{T} + \ln C \Leftrightarrow$$

$$\ln\left[k - h(t)\right] - \ln C = -\frac{t}{T} \Leftrightarrow$$

$$\ln\left[\frac{k - h(t)}{C}\right] = -\frac{t}{T} \Leftrightarrow \frac{k - h(t)}{C} = e^{-\frac{t}{T}}$$

$$\Leftrightarrow k - h(t) = Ce^{-\frac{t}{T}}$$



Для нулевых начальных условий $t = u = h = 0$ получим:

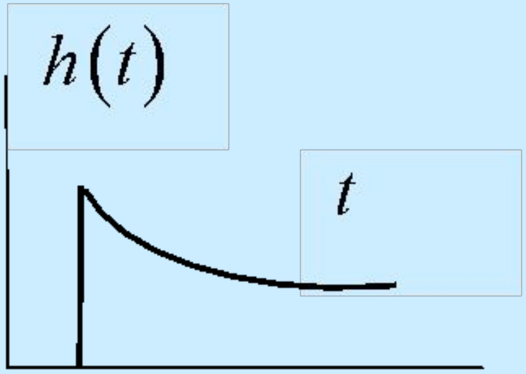
$$h(0) = 0 \Rightarrow k - 0 = C \cdot e^{-\frac{0}{T}} \Rightarrow k = C \Rightarrow$$

$$\Rightarrow k - h(t) = k \cdot e^{-\frac{t}{T}} \Rightarrow h(t) = k\left(1 + e^{-\frac{t}{T}}\right)$$

Переходная функция апериодического звена достигает своего установившегося значения не сразу, а постепенно по экспоненциальному (апериодическому) закону. Апериодическое звено показывает инерционность процесса.

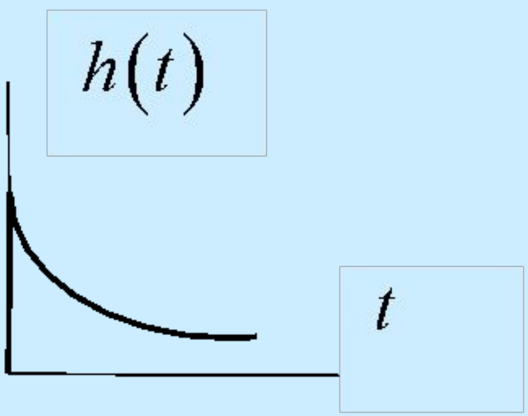
Переходной процесс заканчивается при $t = (3 \div 4)T$. Чем меньше T, тем апериодическое звено ближе по своим свойствам к пропорциональному звену. Если на вход звена поступает единичная ступенчатая функция, то сначала наблюдается значительный рост, а затем спад.

Постоянная времени T характеризует «инерционность» или «инерционное запаздывание» звена. Выходное значение $u(t) = kx$ в звене апериодическом устанавливается только спустя некоторое время t после подачи входного воздействия.



11. Оценим весовую функцию:

Так как $x(t) = \delta(t)$ и $w(t) = 1(t)$, то $w(t) = h'(t) = \frac{k}{T} \cdot e^{-\frac{t}{T}}$. При подаче импульсного воздействия вначале наблюдается рост (скачок) до k, а затем убывание по экспоненте.



Примерами апериодического звена являются магнитные и электромагнитные усилители, электрические двигатели.