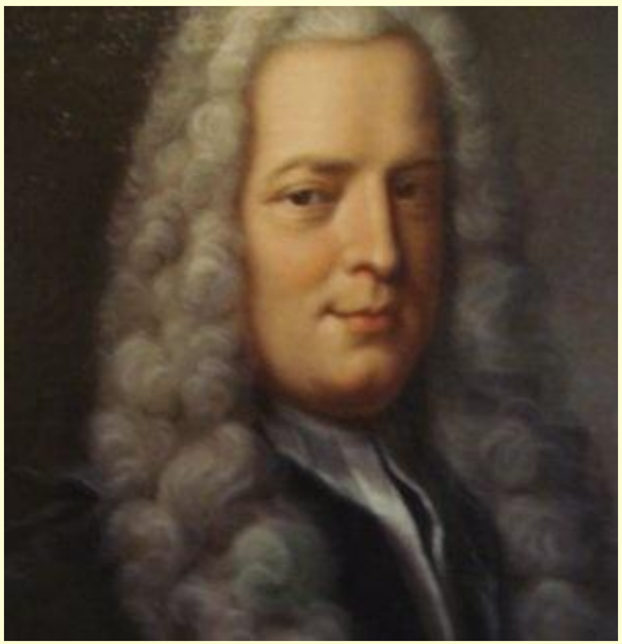
Метод решения систем линейных уравнений методом Крамера

Габриель Крамер

швейцарский математик



31.08.1704 – 04.01.1752

Крамер родился в семье франкоязычного врача. С раннего возраста показал большие способности в области математики. В 18 лет защитил диссертацию. В 20-летнем возрасте Крамер выставил свою кандидатуру на должность преподавателя на кафедре философии Женевского университета.

Самая известная из работ Крамера — трактат «Введение в анализ алгебраических кривых» 1750 году. Для доказательства Крамер строит систему линейных уравнений и решает её с помощью алгоритма, названного позже его именем: метод Крамера

Рассмотрим квадратную систему линейных алгебраических уравнений

1

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

Количество неизвестных равно числу уравнений

$$\boxed{m = n}$$

Вспомним такие понятия как:

$AX = B$ - **запись СЛАУ в матричном виде**

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \dots & a_{2n} \\ \dots\dots & \dots\dots & \dots\dots \\ a_{m1} & a_{m2} \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \qquad X = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \dots \\ X_n \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{pmatrix}$$

A – основная матрица системы
X – матрица-столбец неизвестных
B – матрица-столбец свободных членов

Метод Крамера

Решение системы квадратных линейных уравнений $AX = B$, где количество неизвестных равно количеству уравнений данной системы, с невырожденной квадратной матрицей A - единственно и имеет вид :

$$X_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \quad X_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}, \quad X_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta}, \quad \ldots, \quad X_n = \frac{\Delta_n}{\Delta}$$

$X_1, X_2, X_3, \ldots, X_n$ - неизвестные переменные, значения которых надо найти, а

Δ ; Δ_1 ; Δ_2 ; Δ_3 ; .... ; Δ_n – определители, которые нужно составить по методу Крамера, а затем вычислить

1) Составим главный определитель - Δ

$$\Delta = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

- определитель системы, определитель основной матрицы

2) Составим определитель - $\Delta 1$

$$\Delta_1 = \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} b_1 \\ b_2 \\ \ldots \\ b_m \end{matrix}} & \begin{matrix} a_{12} \ldots & a_{1n} \\ a_{22} \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots \\ a_{m2} \ldots & a_{mn} \end{matrix} \end{pmatrix}$$

-получается из главного определителя заменой 1-го столбца столбцом свободных членов

3) Составим определитель - Δ_2

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & \boxed{b_1} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & b_2 & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & b_m & \dots & a_{mn} \end{vmatrix}$$

получается из главного определителя заменой 2-го столбца столбцом свободных членов.

3) Составим определитель - Δ_n

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & b_m \end{vmatrix}$$

получается из главного определителя заменой n-го столбца столбцом свободных членов

Рассмотрим пример 1

Задание.

Решите систему линейных уравнений методом Крамера

$$\begin{cases} 2X_1 - X_2 = 0 \\ X_1 + 3X_2 = 7 \end{cases}$$

Решение.

Основная матрица системы имеет вид

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

1) Вычислим ее определитель

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 6 + 1 = 7$$

$\boldsymbol{\Delta}$ - отличен от нуля $\Rightarrow$ система имеет единственное решение, которое может быть найдено методом Крамера.

2) **Составим и вычислим необходимые определители**

$$\Delta_1 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 7 & 3 \end{pmatrix} = 7 ; \quad \Delta_2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 7 \end{pmatrix} = 14 ;$$

3) **Находим неизвестные переменные по формулам**

$$X_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{7}{7} = 1 \qquad X_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{14}{7} = 2$$

Ответ: $X_1 = 1$, $X_2 = 2$.

Рассмотрим пример 2

Задание.

Решите систему линейных уравнений методом Крамера

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 9 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = 3 \\ x_1 + 2x_3 = 2 \end{cases}$$

Решение.

Основная матрица системы имеет вид

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

1) Вычислим ее определитель

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 2\cdot(-2)\cdot 2 + 3\cdot 1\cdot 1 + (-1)\cdot 1\cdot 0 -$$

$$-(-1)\cdot(-2)\cdot 1 - 3\cdot 1\cdot 2 - 2\cdot 1\cdot 0 = -13$$

Так как определитель основной матрицы системы отличен от нуля, то система имеет единственное решение, которое может быть найдено методом Крамера.

2) Составим и вычислим необходимые определители

$$\Delta_1 = \begin{pmatrix} 9 & 3 & -1 \\ 3 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} = -36 + 6 + 0 - 4 - 18 - 0 = -52$$

$$\Delta_2 = \begin{pmatrix} 2 & 9 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} = 12 + 9 - 2 + 3 - 18 - 4 = 0$$

$$\Delta_3 = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 9 \\ 1 & -2 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} = -8 + 9 + 0 + 18 - 6 - 0 = 13$$

3) Находим неизвестные переменные по формулам

$$X_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{-52}{-13} = 4$$

$$X_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{0}{-13} = 0$$

$$X_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{13}{-13} = -1$$

Ответ: $X_1 = 4$, $X_2 = 0$, $X_3 = -1$.

Рассмотрим пример 3

Задание.

Решите систему линейных уравнений методом Крамера

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 = 4, \\ x_1 + x_2 - x_3 = 2, \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = 1 \end{cases}$$

Решение.

Основная матрица системы имеет вид $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$

1) Вычислим ее определитель

$$\Delta = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} = 2 - 2 + 1 - 1 - 4 + 1 = -3$$

Так как определитель основной матрицы системы отличен от нуля, то система имеет единственное решение, которое может быть найдено методом Крамера.

2) Составим и вычислим необходимые определители

$$\Delta_1 = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} = -6 \qquad \Delta_2 = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = -3$$

$$\Delta_3 = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} = -2$$

3) Находим неизвестные переменные по формулам

$$X_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = 2\,; \quad X_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = 1\,; \quad X_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = 1$$

Ответ: $X_1 = 2$, $X_2 = 1$, $X_3 = 1$.

Рассмотрим пример 4

Задание.

Решите систему линейных уравнений методом Крамера

$$\begin{cases} x_1 + 5x_2 - x_3 = 0, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 3, \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 = -2 \end{cases}$$

Решение.

Основная матрица системы имеет вид $A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -3 \end{pmatrix}$

1) Вычислим ее определитель

$$\Delta = \begin{pmatrix} 1 & 5 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -3 \end{pmatrix} = 31$$

Δ - отличен от нуля $\Rightarrow$ система имеет единственное решение, которое может быть найдено методом Крамера.

2) Составим и вычислим необходимые определители

$$\Delta_1 = \begin{pmatrix} 0 & 5 & -1 \\ 3 & -1 & 1 \\ -2 & 2 & -3 \end{pmatrix} = 31 \qquad \Delta_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & -2 & -3 \end{pmatrix} = 0$$

$$\Delta_3 = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 0 \\ 2 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & -2 \end{pmatrix} = 31$$

3) Находим неизвестные переменные по формулам

$$X_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{31}{31} = 1;$$

$$X_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{31}{31} = 1$$

$$X_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{0}{31} = 0;$$

Ответ: $X_1 = 1$, $X_2 = 0$, $X_3 = 1$.

Основные источники

- Лунгу К.Н. Сборник задач по высшей математике. 1 часть / К.Н. Лунгу, Д.Т. Письменный, С. Н. Федин. – 7-е изд. – М.: Айрис – пресс, 2008. - 576с.: ил. – (Высшее образование)
- Письменный Д.Т. Конспект лекций по высшей математике. 1 часть / Д.Т. Письменный – 5-е изд. – М.: Айрис – пресс, 2005.-288с.: ил.
- Тюрникова Г.В. Курс высшей математики для начинающих: Учебное пособие. – М.: ГУ-ВШЭ, 2008. 376с.
- http://mathsun.ru/ - История математики. Биографии великих математиков