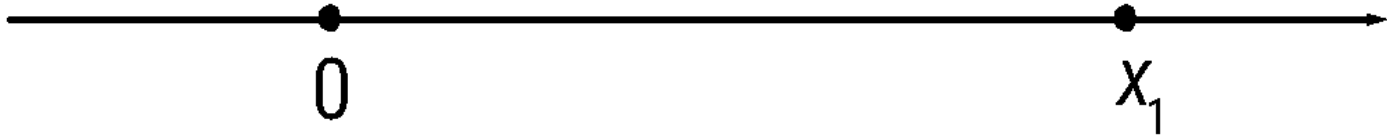


!Здравствуйте

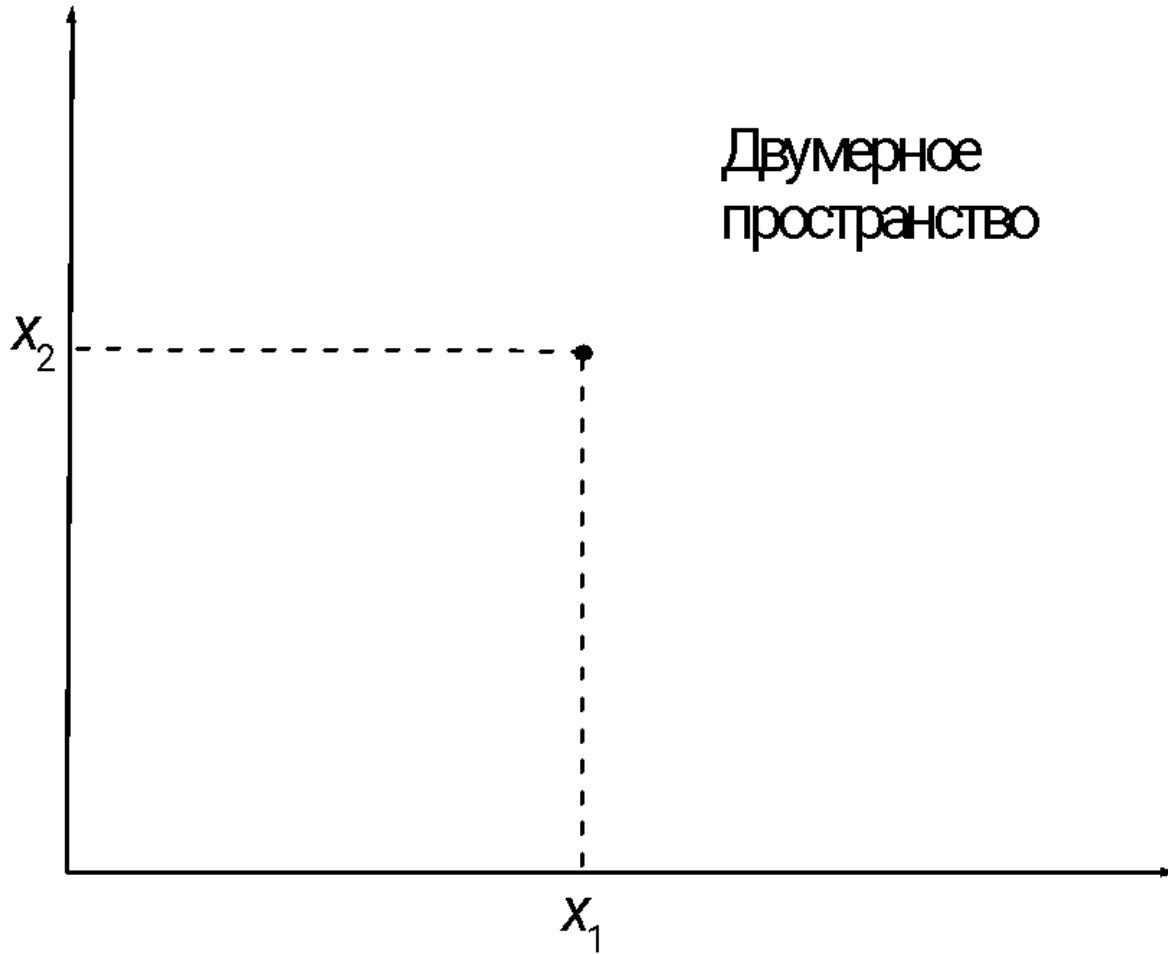
Лекция №16

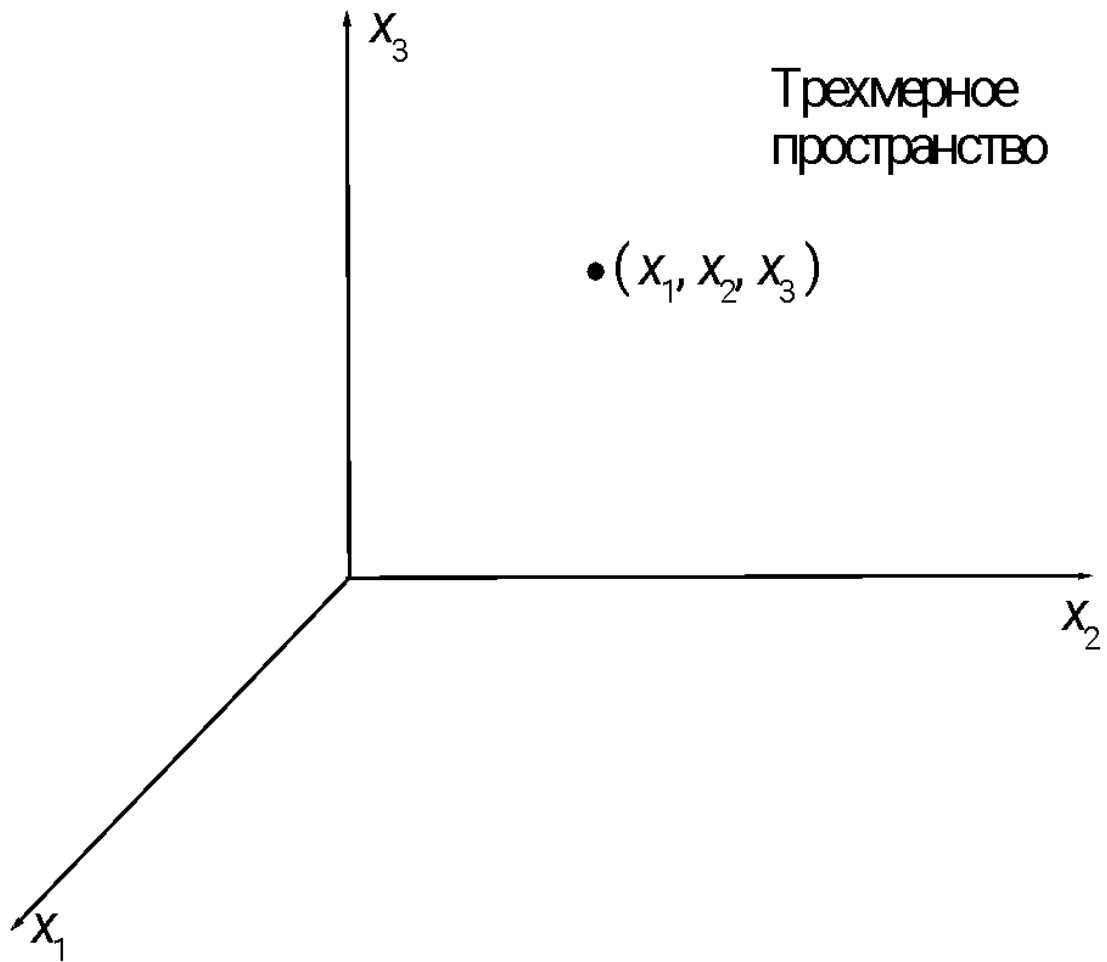
Функции многих переменных

Одномерное
пространство



Двумерное
пространство





В n -мерном пространстве точка – это совокупность n вещественных чисел $(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$, которые называются **координатами** точки n -мерном пространстве. Для сокращения записи, мы в дальнейшем будем часто точку обозначать одной буквой x , но надо всегда помнить, что это сокращенное обозначение подразумевает следующее

$$x = (x_1, x_2, x_3, \dots, x_n).$$

Расстояние между двумя точками.

Пусть имеются две точки — $x = (x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$ и $y = (y_1, y_2, y_3, \dots, y_n)$. **Эвклидовым расстоянием** между этими точками называется величина

$$d(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2}.$$

Так как других расстояний в данном курсе не будет, то слово «эвклидово» мы будем опускать.

Это расстояние обладает следующими свойствами:

1. $d(x, y) \geq 0$; $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$ (то есть $\forall i = \overline{1, n} \quad x_i = y_i$).
2. $d(x, y) = d(y, x)$.
3. Неравенство треугольника:
 $\forall z \quad d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$.

Области в n -мерном пространстве

Определение. Областью в n -мерном пространстве называется любое множество точек из этого пространства.

1. Замкнутый параллелепипед – это множество точек x , координаты которых удовлетворяют соотношению

$$a_i \leq x_i \leq b_i, \quad i = \overline{1, n}.$$

Он обозначается символом

$$[a_1, b_1; a_2, b_2; a_3, b_3; \dots; a_n, b_n].$$

Точка с координатами

$$\left(\frac{a_1 + b_1}{2}, \frac{a_2 + b_2}{2}, \frac{a_3 + b_3}{2}, \dots, \frac{a_n + b_n}{2} \right)$$

называется **центром** параллелепипеда, величины $b_i - a_i$, $i = \overline{1, n}$ – **сторонами** параллелепипеда.

2. Открытый параллелепипед – это множество точек x , координаты которых удовлетворяют соотношению

$$a_i < x_i < b_i, \quad i = \overline{1, n}.$$

Он обозначается символом

$$(a_1, b_1; a_2, b_2; a_3, b_3; \dots a_n, b_n).$$

3. Замкнутый шар – это множество точек x , координаты которых удовлетворяют соотношению

$$\sum_{i=1}^n (x_i - x_i^0)^2 \leq r^2.$$

Он обозначается символом $R[x_0, r]$. Точка $x_0 = (x_1^0, x_2^0, x_3^0, \dots, x_n^0)$ называется **центром** шара, величина r – его **радиусом**.

4. Открытый шар – это множество точек x , координаты которых удовлетворяют соотношению

$$\sum_{i=1}^n (x_i - x_i^0)^2 < r^2$$

Он обозначается символом $R(x_0, r)$. Шар $R(x_0, \varepsilon) = O_\varepsilon(x_0)$ называется **ε -окрестностью** точки x_0 .

Теорема. Во всякий параллелепипед можно вписать шар и наоборот – во всякий шар можно вписать параллелепипед.

Доказательство.

1. Пусть дан параллелепипед

$$P = [a_1 - \delta_1, a_1 + \delta_1; a_2 - \delta_2, a_2 + \delta_2; \dots a_n - \delta_n, a_n + \delta_n]$$

с центром в точке $a = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ и сторонами $2\delta_1, 2\delta_2, \dots, 2\delta_n$.

Рассмотрим шар с центром в точке a и радиусом $\delta = \min(\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n)$, то есть $R[a, \delta]$.

Пусть $x \in R[a, \delta]$. Это значит, что

$$\sum_{j=1}^n (x_j - a_j)^2 \leq \delta^2.$$

Но тогда $\forall i = \overline{1, n}$ имеем

$$|x_i - a_i| = \sqrt{(x_i - a_i)^2} \leq \sqrt{\sum_{j=1}^n (x_j - a_j)^2} \leq \delta \leq \delta_i,$$

и, следовательно, $x \in P$. Это означает, что $R[a, \delta] \subset P$.

2. Пусть дан шар $R[a, r]$. Возьмем $\delta = r/\sqrt{n}$ и рассмотрим параллелепипед

$$P = [a_1 - \delta, a_1 + \delta; a_2 - \delta, a_2 + \delta; \dots a_n - \delta, a_n + \delta].$$

Пусть $x \in P$. Тогда $\forall i = \overline{1, n} \quad |x_i - a_i| \leq \delta$ и мы имеем

$$\sum_{i=1}^n (x_i - a_i)^2 \leq \sum_{i=1}^n \delta^2 = n\delta^2 = n \cdot \frac{r^2}{n} = r^2,$$

то есть $x \in R[a, r]$. Следовательно, $P \subset R[a, r]$.

Эта теорема позволяет переходить от шара к параллелепипеду и обратно.

Функции n переменных

Пусть в n -мерном пространстве задана какая-то область G . Правило, которое каждой точке области G с координатами $x = (x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$ ставит в соответствие число z , называется **функцией** n переменных и обозначается символом $z = f(x)$, или, в полной форме записи, $z = f(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$.

Множество точек x , где это правило имеет смысл, называется **областью определения** функции. Множество чисел z называется **областью значений** функции.

Пусть $z = f(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$, а переменные x_i в свою очередь являются функциями m -мерных переменных $t = (t_1, t_2, \dots, t_m)$, то есть

$$x_i = \varphi_i(t_1, t_2, \dots, t_m), \quad i = \overline{1, n}.$$

Подставим в вместо x_i эти функции. Тогда мы получим **сложную** функцию, или **суперпозицию** функций

$$\begin{aligned} z &= f(\varphi_1(t_1, t_2, \dots, t_m), \varphi_2(t_1, t_2, \dots, t_m), \dots, \varphi_n(t_1, t_2, \dots, t_m)) = \\ &= F(t_1, t_2, \dots, t_m) \end{aligned}$$

Предел функции n переменных

Определение. Число A называют **пределом** функции $f(x)$ при $x \rightarrow a$ ($a = (a_1, a_2, \dots, a_n)$), если

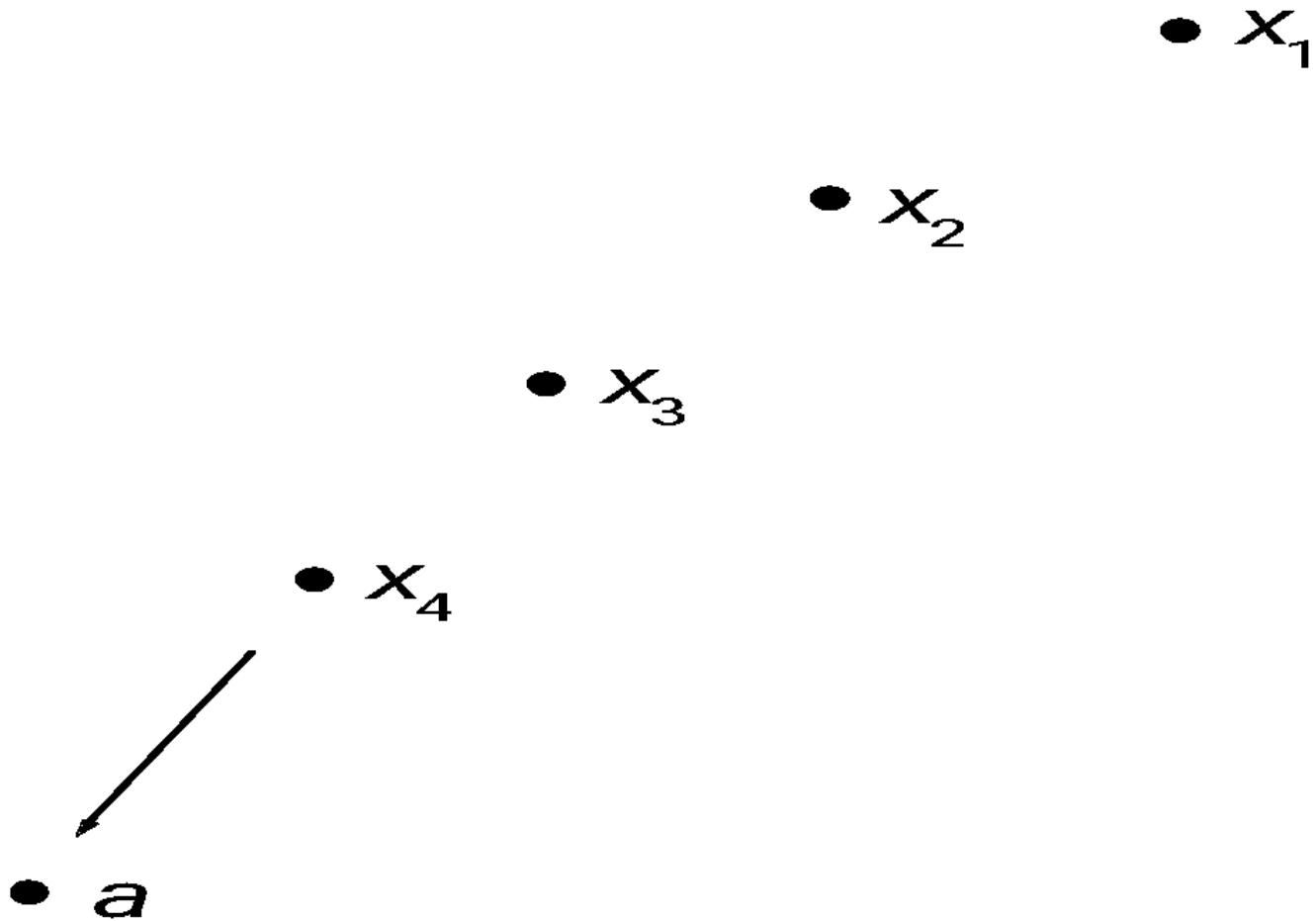
$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \mid x_i - a_i \mid < \delta \quad i = \overline{1, n} \mid f(x) - A \mid < \varepsilon,$$

или

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \quad d(x, a) < \delta \quad \mid f(x) - A \mid < \varepsilon.$$

Геометрически это означает следующее. Пусть около значения A мы взяли сколь угодно малый отрезок $(A - \varepsilon, A + \varepsilon)$. Тогда найдется такой параллелепипед с центром в точке a и со сторонами равными 2δ , что как только точка x попадет в этот параллелепипед, так значение функции попадет в отрезок $(A - \varepsilon, A + \varepsilon)$

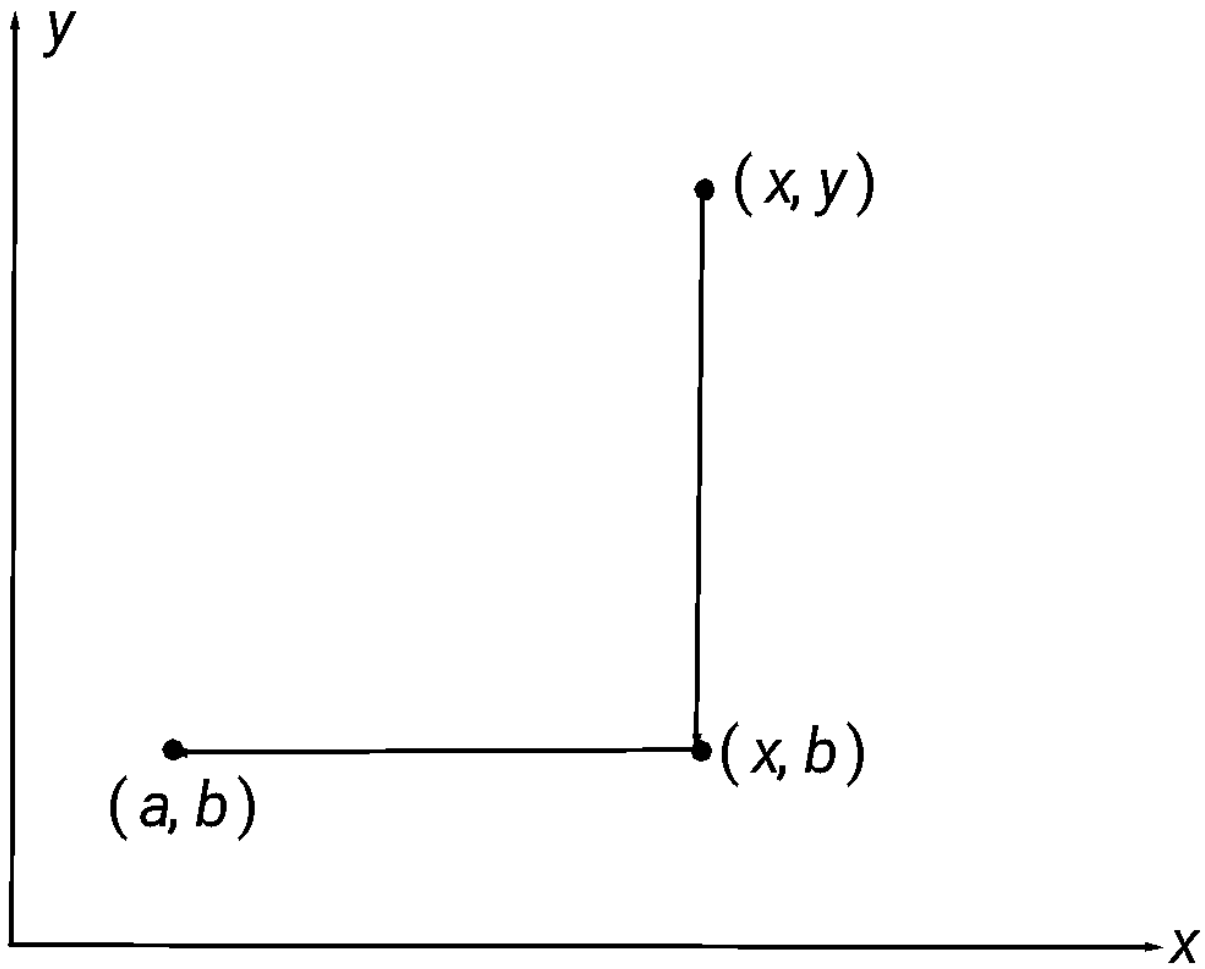
Второе определение отличается от первого тем, что вместо параллелепипеда фигурирует шар с центром в точке a и радиусом δ и попадание точки x внутрь этого шара приводит к тому, что значение $f(x)$ попадет в отрезок $(A - \varepsilon, A + \varepsilon)$.



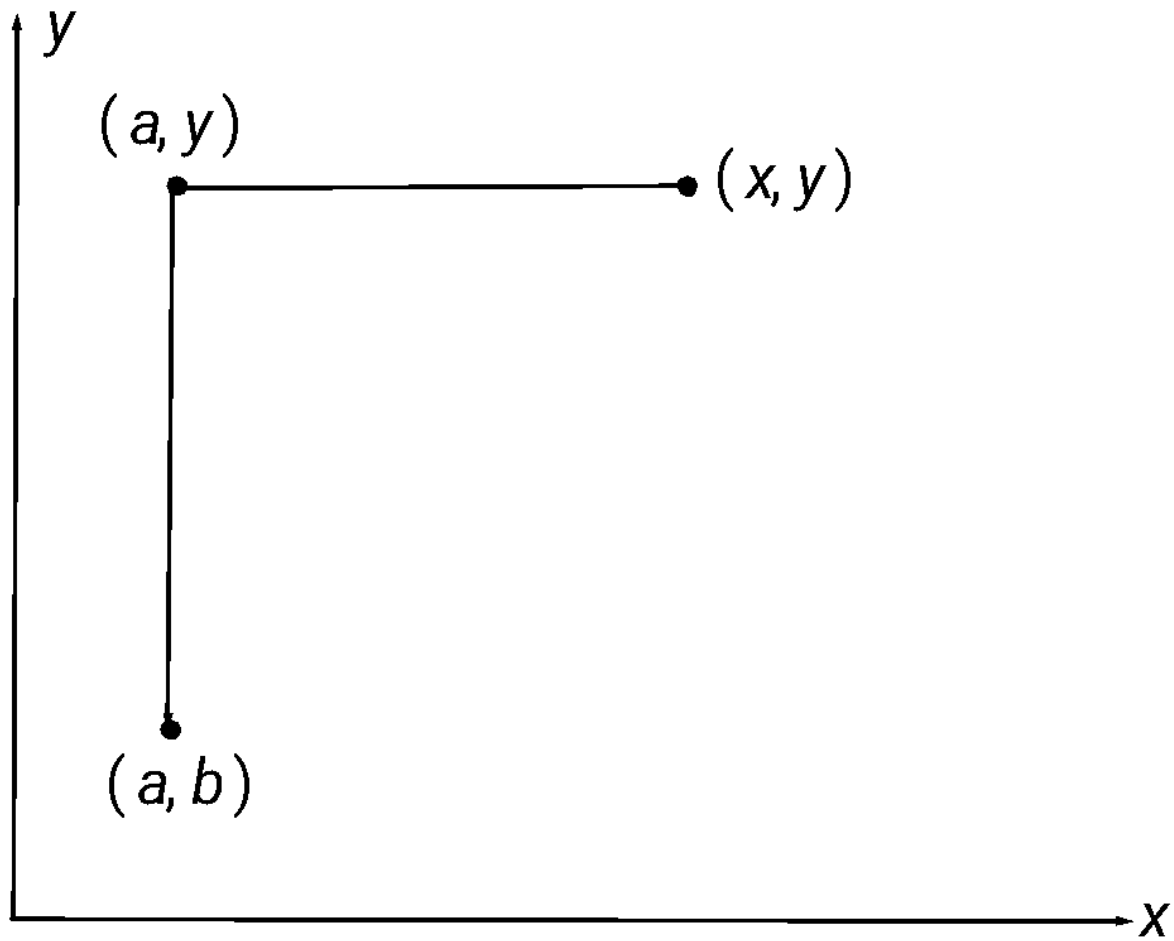
Повторные пределы

Пусть задана функция $f(x, y)$ двух переменных x и y . Пусть точка (x, y) стремится к точке с координатами (a, b) , то есть $(x, y) \rightarrow (a, b)$. Это означает, что $x \rightarrow a$ и $y \rightarrow b$.

Будем подходить к точке (a, b) двумя путями. Первый путь выглядит так: Сначала из точки (x, y) перейдем в точку (x, b) , двигаясь параллельно оси OY , а затем из этой точки перейдем в точку (a, b) , двигаясь параллельно оси OX . В приложении к функции $f(x, y)$ это означает, что сначала мы перешли к пределу $\lim_{y \rightarrow b} f(x, y)$ получив некоторую функцию $\psi(x) = \lim_{y \rightarrow b} f(x, y)$, а затем уже нашли $\lim_{x \rightarrow a} \psi(x)$, получив так называемый **повторный предел** $\lim_{x \rightarrow a} \lim_{y \rightarrow b} f(x, y)$.



Теперь пойдём от точки (x, y) к точке (a, b) по такой траектории: сначала перейдём в точку (a, y) двигаясь параллельно оси OX . Тем самым мы найдём $\lim_{x \rightarrow a} f(x, y) = \varphi(y)$, который будет функцией от y . Затем из точки (a, y) , двигаясь параллельно оси OY перейдём в точку (a, b) , вычисляя теперь уже $\lim_{y \rightarrow b} \varphi(y)$. Тем самым мы нашли другой повторный предел $\lim_{y \rightarrow b} \lim_{x \rightarrow a} f(x, y)$



Теорема. Если

1. Существует двойной предел $\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x,y)$;

2. $\forall y$ существует $\lim_{x \rightarrow a} f(x,y) = \varphi(y)$,

то существует и повторный предел $\lim_{y \rightarrow b} \lim_{x \rightarrow a} f(x,y)$ и он равен

двойному пределу, то есть $\lim_{y \rightarrow b} \lim_{x \rightarrow a} f(x,y) = \lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x,y)$.

Доказательство.

Пусть $\exists A = \lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x,y)$. Это означает, что

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x, y \ |x-a| < \delta \ |y-b| < \delta \ |f(x,y) - A| < \varepsilon.$$

Перейдем в этой строке к пределу $x \rightarrow a$. Тогда выписывать неравенство $|x-a| < \delta$ не будет необходимости, так как $x-a \rightarrow 0$.

Далее, так как $\forall y$ существует $\lim_{x \rightarrow a} f(x,y) = \varphi(y)$, то

$$\lim_{x \rightarrow a} |f(x,y) - A| = \lim_{x \rightarrow a} |f(x,y) - A| = |\varphi(y) - A|,$$

и наша строчка кванторов примет вид

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall y \ |y-b| < \delta \ |\varphi(y) - A| < \varepsilon.$$

По определению предела функции одной переменной это и означает, что существует

$$\lim_{y \rightarrow b} \varphi(y) = \lim_{y \rightarrow b} \lim_{x \rightarrow a} f(x,y) = A.$$

Следствие. Если к ограничениям теоремы добавить еще, что

3. $\forall x$ существует $\lim_{y \rightarrow b} f(x, y) = \psi(x)$,

то существуют оба повторных предела, и они равны друг другу (так как оба они равны двойному пределу)

$$\lim_{x \rightarrow a} \lim_{y \rightarrow b} f(x, y) = \lim_{y \rightarrow b} \lim_{x \rightarrow a} f(x, y) = \lim_{(x, y) \rightarrow (a, b)} f(x, y).$$

Через понятие предела обычным образом вводится понятие непрерывности функции n переменных: функция $f(x)$ называется непрерывной в точке a , если $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$. Все свойства непрерывных функций сохраняются и в случае функций n переменных.