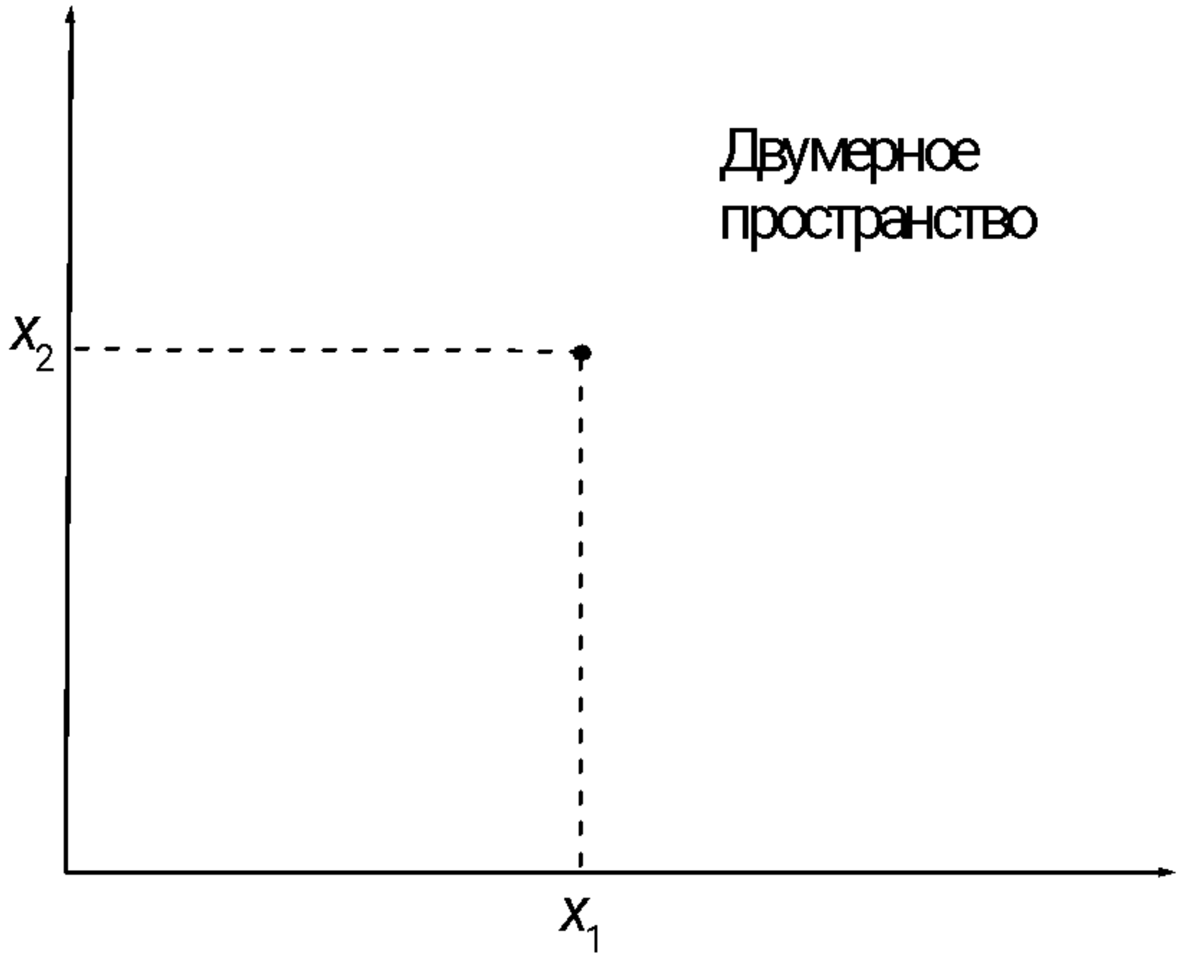
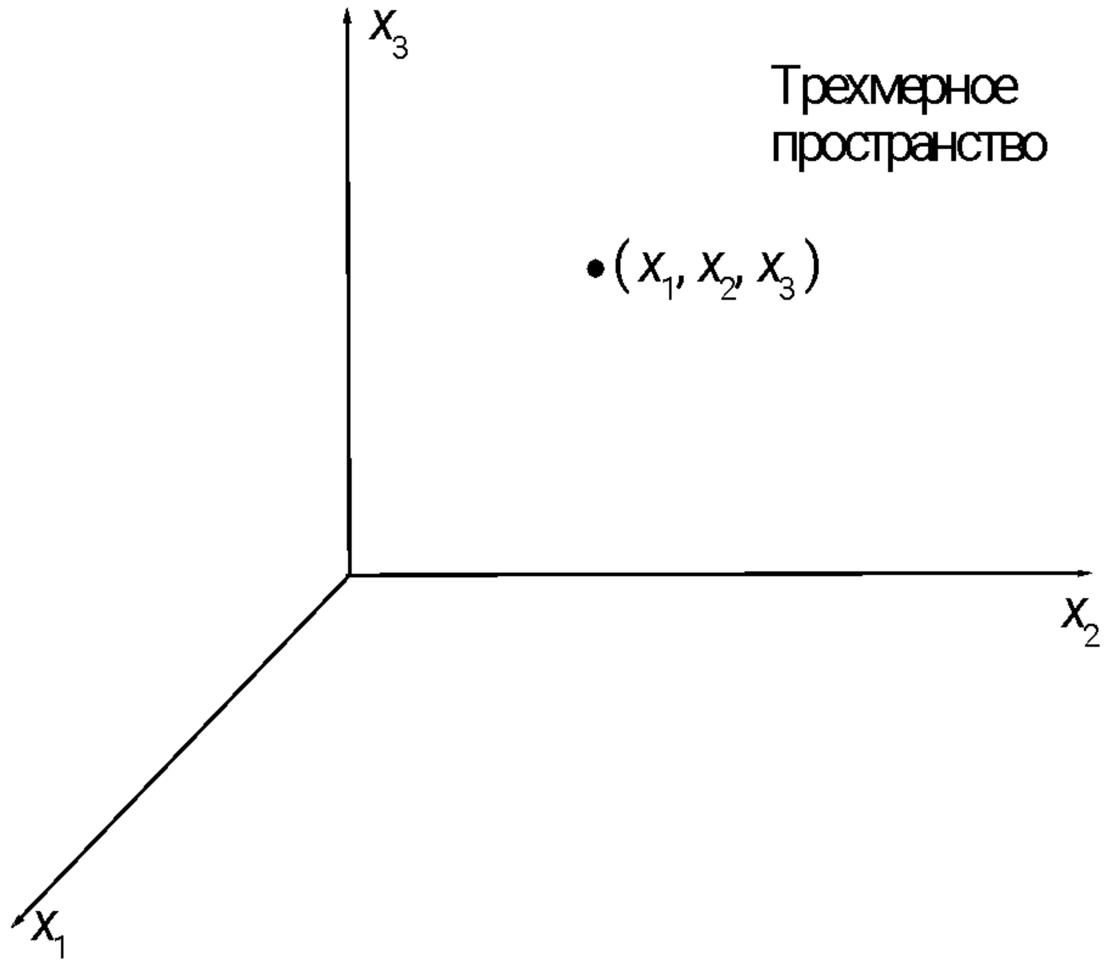
!Здравствуйте

Лекция №16

Функции многих переменных

Одномерное пространство


Двумерное
пространство
x_2
x_1


x_3
Трехмерное пространство
(x_1, x_2, x_3)
x_2
x_1

В n-мерном пространстве точка – это совокупность n вещественных чисел $(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$, которые называются **координатами** точки n-мерном пространстве. Для сокращения записи, мы в дальнейшем будем часто точку обозначать одной буквой x, но надо всегда помнить, что это сокращенное обозначение подразумевает следующее

$$x = (x_1, x_2, x_3, \dots, x_n).$$

Расстояние между двумя точками.

Пусть имеются две точки – $x = (x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$ и $y = (y_1, y_2, y_3, \dots, y_n)$. **Эвклидовым расстоянием** между этими точками называется величина

$$d(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2}.$$

Так как других расстояний в данном курсе не будет, то слово «эвклидово» мы будем опускать.

Это расстояние обладает следующими свойствами:

1. $d(x, y) \geq 0$; $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$ (то есть $\forall i = \overline{1, n}\quad x_i = y_i$).
2. $d(x, y) = d(y, x)$.
3. Неравенство треугольника:

$\forall z \quad d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$.

Области в *n*-мерном пространстве

Определение. Областью в *n*-мерном пространстве называется любое множество точек из этого пространства.

1. Замкнутый параллелепипед – это множество точек x, координаты которых удовлетворяют соотношению

$$a_i \le x_i \le b_i\,, \quad i = \overline{1,n}.$$

Он обозначается символом

$$[a_1, b_1; a_2, b_2; a_3, b_3; \ldots a_n, b_n].$$

Точка с координатами

$$\left(\frac{a_1 + b_1}{2}, \frac{a_2 + b_2}{2}, \frac{a_3 + b_3}{2}, \ldots, \frac{a_n + b_n}{2}\right)$$

называется **центром** параллелепипеда, величины $b_i - a_i$, $i = \overline{1,n}$ – **сторонами** параллелепипеда.

2. Открытый параллелепипед – это множество точек x, координаты которых удовлетворяют соотношению

$$a_i < x_i < b_i\,, \quad i = \overline{1,n}\,.$$

Он обозначается символом

$$(a_1,b_1;a_2,b_2;a_3,b_3;...a_n,b_n).$$

3. Замкнутый шар – это множество точек x, координаты которых удовлетворяют соотношению

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i - x_i^0)^2 \le r^2.$$

Он обозначается символом $R[x_0\,,r]$. Точка $x_0 = (x_1^0\,,x_2^0\,,x_3^0\,,...x_n^0\,)$ называется **центром** шара, величина r – его **радиусом.**

4. Открытый шар – это множество точек x, координаты которых удовлетворяют соотношению

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i - x_i^0)^2 < r^2$$

Он обозначается символом $R(x_0, r)$. Шар $R(x_0, \varepsilon) = O_\varepsilon(x_0)$ называется **ε-окрестностью** точки x_0.

Теорема. Во всякий параллелепипед можно вписать шар и наоборот – во всякий шар можно вписать параллелепипед.

Доказательство.

1. Пусть дан параллелепипед

$$P=[a_1-\delta_1, a_1+\delta_1; a_2-\delta_2, a_2+\delta_2; \ldots a_n-\delta_n, a_n+\delta_n]$$

с центром в точке $a=(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ и сторонами $2\delta_1$, $2\delta_2$, … , $2\delta_n$. Рассмотрим шар с центром в точке a и радиусом $\delta=\min(\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n)$, то есть $R[a,\delta]$.

Пусть $x\in R[a,\delta]$. Это значит, что

$$\sum_{j=1}^{n}(x_j-a_j)^2\le\delta^2 .$$

Но тогда $\forall i=\overline{1,n}$ имеем

$$|x_i-a_i|=\sqrt{(x_i-a_i)^2}\le\sqrt{\sum_{j=1}^{n}(x_j-a_j)^2}\le\delta\le\delta_i,$$

и, следовательно, $x\in P$. Это означает, что $R[a,\delta]\subset P$.

2. Пусть дан шар $R[a,r]$. Возьмем $\delta = r/\sqrt{n}$ и рассмотрим параллелепипед

$$P = [a_1 - \delta, a_1 + \delta; a_2 - \delta, a_2 + \delta; \dots a_n - \delta, a_n + \delta].$$

Пусть $x \in P$. Тогда $\forall i = \overline{1,n} \quad |x_i - a_i| \le \delta$ и мы имеем

$$\sum_{i=1}^{n} (x_i - a_i)^2 \le \sum_{i=1}^{n} \delta^2 = n\delta^2 = n \cdot \frac{r^2}{n} = r^2,$$

то есть $x \in R[a,r]$. Следовательно, $P \subset R[a,r]$.

Эта теорема позволяет переходить от шара к параллелепипеду и обратно.

Функции *n* переменных

Пусть в n-мерном пространстве задана какая-то область G. Правило, которое каждой точке области G с координатами $x=(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n)$ ставит в соответствие число z, называется **функцией** n переменных и обозначается символом $z = f(x)$, или, в полной форме записи, $z = f(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n)$.

Множество точек x, где это правило имеет смысл, называется **областью определения** функции. Множество чисел z называется **областью значений** функции.

Пусть $z = f(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n)$, а переменные x_i в свою очередь являются функциями m-мерных переменных $t=(t_1, t_2, \ldots, t_m)$, то есть

$$x_i = \varphi_i(t_1, t_2, \ldots, t_m), \quad i = \overline{1, n}.$$

Подставим в вместо x_i эти функции. Тогда мы получим **сложную** функцию, или **суперпозицию** функций

$$z = f(\varphi_1(t_1, t_2, \ldots, t_m), \varphi_2(t_1, t_2, \ldots, t_m), \ldots, \varphi_n(t_1, t_2, \ldots, t_m)) =$$

$$= F(t_1, t_2, \ldots, t_m)$$

Предел функции *n* переменных

Определение. Число A называют **пределом** функции $f(x)$ при $x \to a \quad (a = (a_1, a_2, ..., a_n))$, если

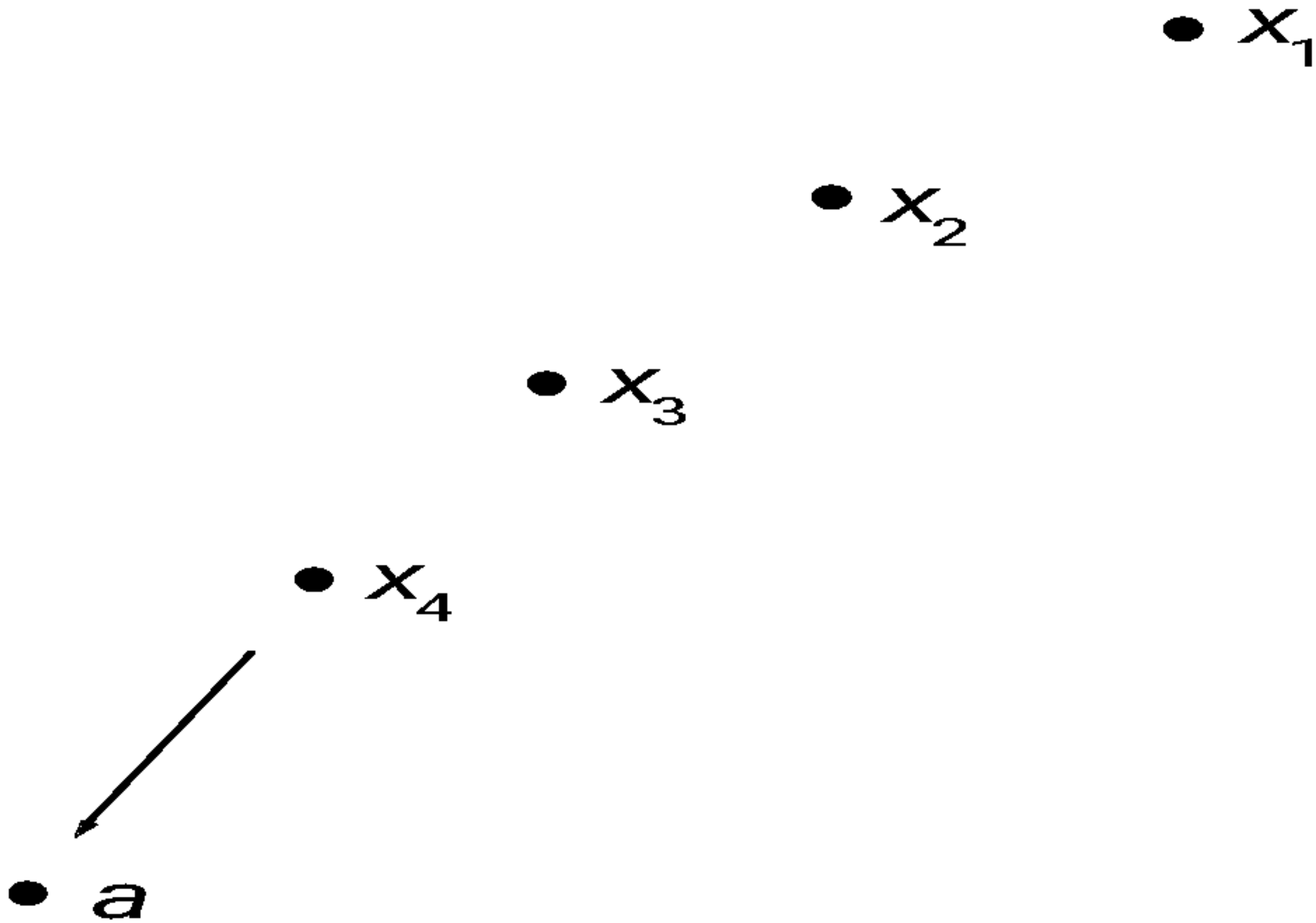
$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \forall x \ |x_i - a_i| < \delta \ i = \overline{1,n} \ |f(x) - A| < \varepsilon,$$

или

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \forall x \ d(x,a) < \delta \quad |f(x) - A| < \varepsilon.$$

Геометрически это означает следующее. Пусть около значения A мы взяли сколь угодно малый отрезок $(A - \varepsilon, A + \varepsilon)$. Тогда найдется такой параллелепипед с центром в точке a и со сторонами равными 2δ, что как только точка x попадет в этот параллелепипед, так значение функции попадет в отрезок $(A - \varepsilon, A + \varepsilon)$

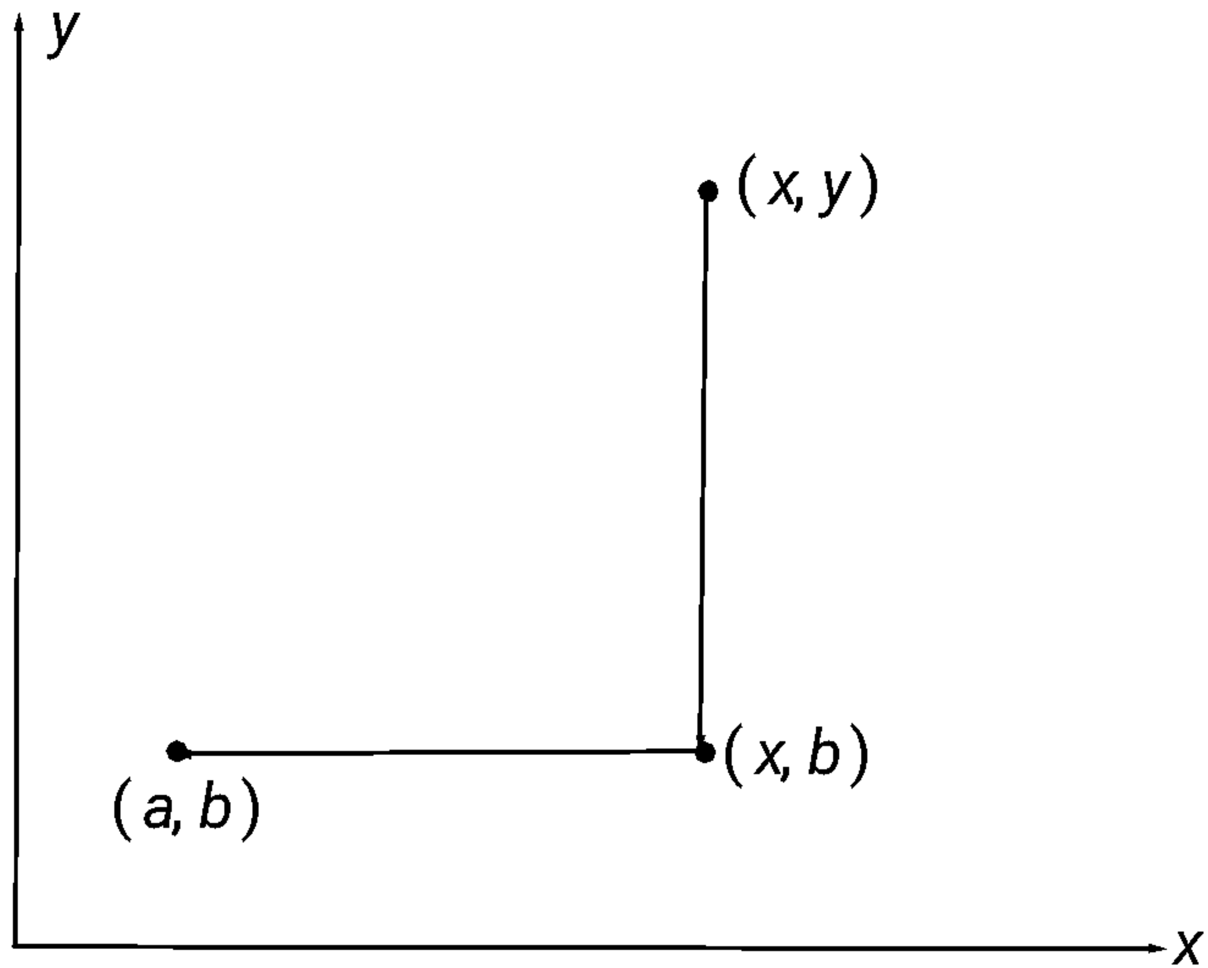
Втрое определение отличается от первого тем, что вместо параллелепипеда фигурирует шар с центром в точке a и радиусом δ и попадание точки x внутрь этого шара приводит к тому, что значение $f(x)$ попадет в отрезок $(A - \varepsilon, A + \varepsilon)$.


x_1
x_2
x_3
x_4
a

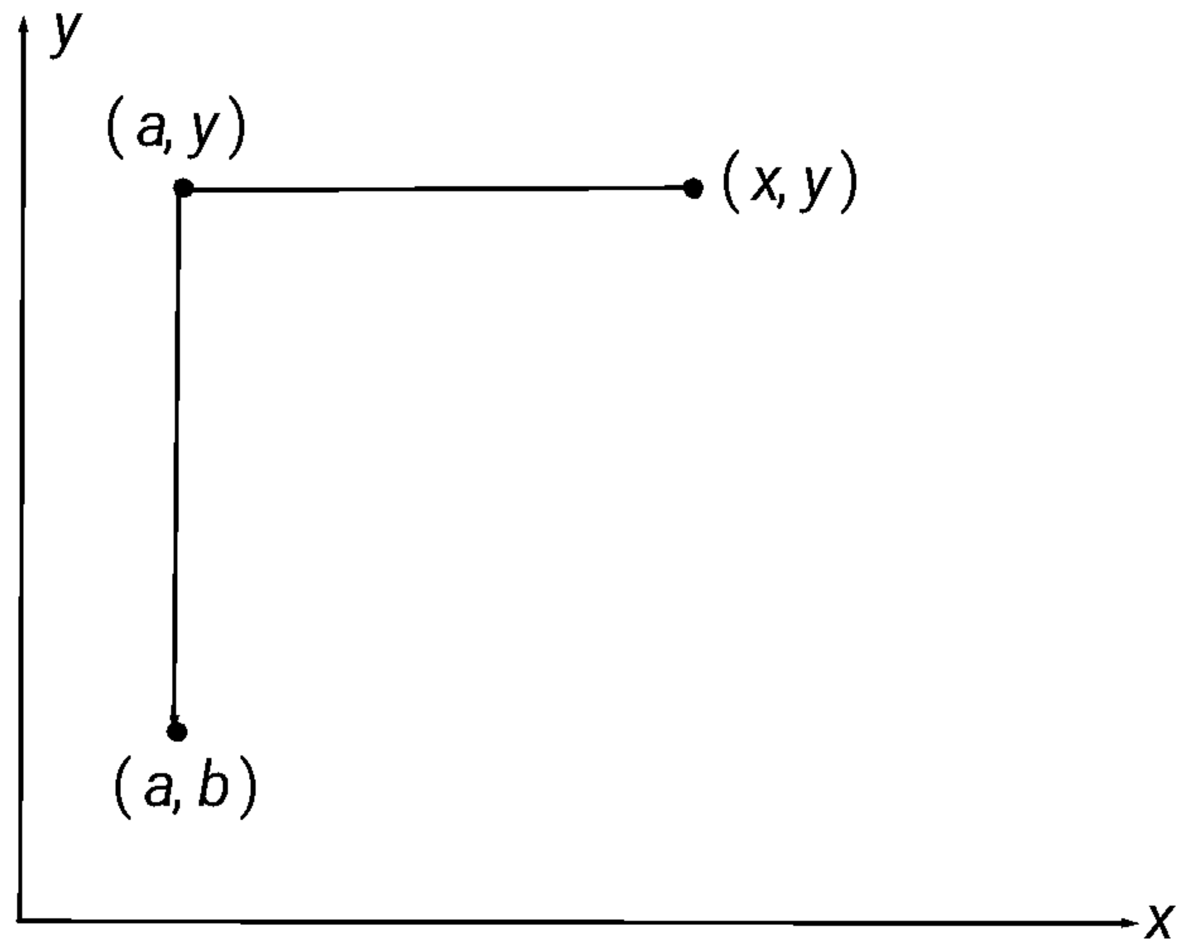
Повторные пределы

Пусть задана функция $f(x,y)$ двух переменных x и y. Пусть точка (x, y) стремится к точке с координатами (a, b), то есть $(x, y) \to (a, b)$. Это означает, что $x \to a$ и $y \to b$.

Будем подходить к точке (a, b) двумя путями. Первый путь выглядит так: Сначала из точки (x, y) перейдем в точку (x, b), двигаясь параллельно оси OY, а затем из этой точки перейдем в точку (a, b), двигаясь параллельно оси OX. В приложении к функции $f(x,y)$ это означает, что сначала мы перешли к пределу $\lim\limits_{y \to b} f(x,y)$ получив некоторую функцию $\psi(x) = \lim\limits_{y \to b} f(x,y)$, а затем уже нашли $\lim\limits_{x \to a} \psi(x)$, получив так называемый **повторный предел** $\lim\limits_{x \to a} \lim\limits_{y \to b} f(x,y)$.


y
(x, y)
(x, b)
(a, b)
x

Теперь пойдем от точки (x, y) к точке (a, b) по такой траектории: сначала перейдем в точку (a, y) двигаясь параллельно оси OX. Тем самым мы найдем $\lim\limits_{x\to a} f(x, y) = \varphi(y)$, который будет функцией от y. Затем из точки (a, y), двигаясь параллельно оси OY перейдем в точку (a, b), вычисляя теперь уже $\lim\limits_{y\to b} \varphi(y)$. Тем самым мы нашли другой повторный предел $\lim\limits_{y\to b} \lim\limits_{x\to a} f(x, y)$


y
(a, y)
(x, y)
(a, b)
x

Теорема. Если

1. Существует двойной предел $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)$;

2. $\forall y$ существует $\lim\limits_{x\to a} f(x,y) = \varphi(y)$,

то существует и повторный предел $\lim\limits_{y\to b}\lim\limits_{x\to a} f(x,y)$ и он равен двойному пределу, то есть $\lim\limits_{y\to b}\lim\limits_{x\to a} f(x,y) = \lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)$.

Доказательство.

Пусть $\exists A = \lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)$. Это означает, что

$$\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0\ \forall x,y\ |x-a|<\delta\ |y-b|<\delta\ |f(x,y)-A|<\varepsilon.$$

Перейдем в этой строке к пределу $x \to a$. Тогда выписывать неравенство $|x-a|<\delta$ не будет необходимости, так как $x-a\to 0$. Далее, так как $\forall y$ существует $\lim\limits_{x\to a} f(x,y)=\varphi(y)$, то

$$\lim_{x\to a}|f(x,y)-A|=|\lim_{x\to a} f(x,y)-A|=|\varphi(y)-A|,$$

и наша строчка кванторов примет вид

$$\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0\ \forall y\ \ |y-b|<\delta\ |\varphi(y)-A|<\varepsilon.$$

По определению предела функции одной переменной это и означает, что существует

$$\lim_{y\to b}\varphi(y)=\lim_{y\to b}\lim_{x\to a} f(x,y)=A.$$

Следствие. Если к ограничениям теоремы добавить еще, что
3. $\forall x$ существует $\lim\limits_{y \to b} f(x, y) = \psi(x)$,

то существуют оба повторных предела, и они равны друг другу (так как оба они равны двойному пределу)

$$\lim_{x \to a} \lim_{y \to b} f(x, y) = \lim_{y \to b} \lim_{x \to a} f(x, y) = \lim_{(x, y) \to (a, b)} f(x, y).$$

Через понятие предела обычным образом вводится понятие непрерывности функции n переменных: функция $f(x)$ называется непрерывной в точке a, если $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$. Все свойства непрерывных функций сохраняются и в случае функций n переменных.